大学数学系列教材

复变函数与积分变换

◆ 大连理工大学数学科学学院
◆ 刘西民　卢玉峰　李崇君　编

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

大学数学系列教材

复变函数与积分变换

Fubian Hanshu yu Jifen Bianhuan

大连理工大学数学科学学院
刘西民　卢玉峰　李崇君　编

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS　BEIJING

内容简介

本书是为高等学校工科各专业“复变函数与积分变换”课程编写的教材。主要内容包括：复数与复变函数、解析函数、复变函数的积分、解析函数的级数表示、留数理论、保形映射、傅里叶变换、拉普拉斯变换等。本书强调复变函数与积分变换的基本理论的几何背景及其在物理和工程技术问题中的应用，在编写过程中力求做到条理清晰，层次分明，通俗易懂，注重解题方法的训练和能力的培养。为巩固所学知识，每节后配备了丰富的习题。

本书可供高等学校工科各专业师生作为教材使用，也可供有关工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

复变函数与积分变换/刘西民，卢玉峰，李崇君编.
--北京：高等教育出版社，2012.6
ISBN 978-7-04-034838-5

Ⅰ.①复… Ⅱ.①刘…②卢…③李… Ⅲ.①复变函数-高等学校-教材②积分变换-高等学校-教材
Ⅳ.①O174.5②O177.6

中国版本图书馆CIP数据核字(2012)第063791号

策划编辑 李 茜　责任编辑 杨 帆　封面设计 李卫青　版式设计 杜微言
插图绘制 郝 林　责任校对 陈旭颖　责任印制 刘思涵

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400-810-0598
社　　址	北京市西城区德外大街4号	网　　址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印　　刷	煤炭工业出版社印刷厂	网上订购	http://www.landraco.com
开　　本	787mm × 960mm　1/16		http://www.landraco.com.cn
印　　张	12.75	版　　次	2012年6月第1版
字　　数	220千字	印　　次	2012年6月第1次印刷
购书热线	010-58581118	定　　价	19.20元

物 料 号　34838-00

前　　言

复数的概念起源于求方程的根，在二次、三次代数方程的求根中就出现了负数开平方的问题。在很长时间里，人们对这类数不能理解，把它看作不能接受的“虚数”。直到 17 世纪和 18 世纪，随着微积分的发明和发展，情况才逐渐有了改变，这类数的重要性才日益显现出来。以复数作为自变量的函数叫做复变函数，而与之相关的理论就是复变函数论。解析函数是复变函数中一类具有解析性质的函数，复变函数是主要研究解析函数的数学分支。

复变函数论产生于 18 世纪。1774 年，欧拉在他的一篇论文中考虑了由复变函数的积分导出的两个方程。在此之前，法国数学家达朗贝尔在他的关于流体力学的论文中也得到了这两个方程。因此，后来把这两个方程叫做“达朗贝尔 – 欧拉方程”。到了 19 世纪，上述两个方程在柯西和黎曼研究流体力学时，作了更详细的研究，所以现在的复变函数书中这两个方程也叫做“柯西 – 黎曼方程”或“柯西 – 黎曼条件”。复变函数论的全面发展是在 19 世纪，它几乎统治了 19 世纪的数学。当时的数学家公认复变函数论是最丰饶的数学分支，也有人称赞它是抽象科学中最和谐的理论之一。

复变函数论在应用方面涉及的面很广，有很多复杂的计算都是用它来解决的。比如物理学上有很多不同的稳定平面场，对它们的计算就是通过复变函数来解决的。复变函数论不仅在其他学科得到了广泛的应用，而且在数学领域的许多分支也有重要的应用。它已深入到微分方程、积分方程、概率论和数论等学科，对它们的发展产生了深刻的影响。

积分变换是通过积分运算，把一个函数变成另一个函数的变换。这里所说的积分变换指的是傅里叶变换和拉普拉斯变换，它与复变函数有着密切的联系。它的理论和方法不仅在数学的许多分支，而且在其他自然科学和许多工程技术领域都有着广泛的应用，已成为不可缺少的运算工具。

复变函数与积分变换是工科数学中一门重要的数学基础课，它是在实变函数微积分的基础上发展起来的，因此它不仅在内容上与实变函数微积分有许多相似之处，而且在研究问题的方法与逻辑结构方面也很类似。当然，它也有自身的特点，有自己的研究工具和方法，在学习过程中，应注意与微积分理论的比较，从而加深理解，同时也需注意其自身的特点，并掌握它自身所固有的理论和方法。

本书只假定读者熟悉基本的微积分理论，全面介绍了复变函数与积分变换的基本理论及其在工程问题上的应用，理论和实际应用密切结合。通过本课程的学习，读者不仅能学到复变函数与积分变换的基本理论和工程数学中的常用数学方法，同时还可以巩固和复习高等数学的基础知识。本书可作为高等学校工科各专业本科生工程数学课程教材，也可作为工程技术人员自学复变函数与积分变换的参考书。

本书的编写得到了高等教育出版社的关心和指导，编者谨表示衷心的感谢！由于编者的水平所限，书中缺点和错误在所难免，恳请专家、同行和广大读者批评指正。

编 者

2011 年 12 月

目　录

第一章　复数与复变函数

复变函数是以复数为自变量的函数. 本章主要介绍复数的基本概念、复数的运算及其表示、平面点集的概念以及复变函数等内容. 这些内容是全书的基础, 今后所研究的问题都是在复数范围内讨论. 在本章的学习中, 必须熟练掌握复数的运算及其表示法, 特别是复数的三角表示式.

§1.1　复数与复平面

1.1.1　复数及其代数运算

在解实系数一元二次方程

$$ax^2+bx+c=0 \ \ (a\neq 0)$$

时, 如果判别式 $b^2-4ac<0$, 就会遇到负数开平方的问题. 最简单的例子就是在解方程 $x^2+1=0$ 时, 遇到 -1 开平方的问题. 为了使负数开平方有意义, 需要进一步扩大数系. 为此引入虚数单位 i, 并规定 $\mathrm{i}^2=-1$, 从而 i 就是方程 $x^2+1=0$ 的一个解. 这样数就由实数扩充到复数.

定义 1.1　称形如 $a+b\mathrm{i}$ 的数为复数, 其中 a,b 为实数. 两个复数 $a+b\mathrm{i}$ 和 $c+d\mathrm{i}$ 相等当且仅当 $a=c$ 且 $b=d$.

记复数全体为 $\mathbb{C}$, 复数的加法运算定义为

$$(a+b\mathrm{i})+(c+d\mathrm{i})=(a+c)+(b+d)\mathrm{i}.$$

复数的乘法运算定义为

$$(a+b\mathrm{i})(c+d\mathrm{i})=(ac-bd)+(bc+ad)\mathrm{i}.$$

特别地, n(n 为正整数) 个相同复数 z 的乘积称为 z 的 n 次幂, 记作 z^n.

复数的减法运算和除法运算分别定义为加法和乘法的逆运算, 从而有

$$(a+b\mathrm{i})-(c+d\mathrm{i})=(a-c)+(b-d)\mathrm{i},$$

$$\frac{a+b\mathrm{i}}{c+d\mathrm{i}}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\mathrm{i} \qquad (c^2+d^2\neq 0).$$

例 1.1 计算

$$\frac{(-1+\mathrm{i})+(2+\mathrm{i})}{(2+\mathrm{i})-(3+4\mathrm{i})}.$$

解

$$\frac{(-1+\mathrm{i})+(2+\mathrm{i})}{(2+\mathrm{i})-(3+4\mathrm{i})}=\frac{1+2\mathrm{i}}{-1-3\mathrm{i}}=\frac{(1+2\mathrm{i})(-1+3\mathrm{i})}{(-1-3\mathrm{i})(-1+3\mathrm{i})}=-\frac{7}{10}+\frac{1}{10}\mathrm{i}.\qquad\square$$

定义 1.2 对复数 $z=a+b\mathrm{i}$, 分别称 a 和 b 为 z 的实部和虚部, 并记为 $a=\operatorname{Re}z$, $b=\operatorname{Im}z$.

若 $a=\operatorname{Re}z=0$, 且 $b\neq 0$, 则称复数 z 为纯虚数. 若 $b=\operatorname{Im}z=0$, 则 z 是实数. 显然, $z_1=z_2$ 当且仅当 $\operatorname{Re}z_1=\operatorname{Re}z_2$ 且 $\operatorname{Im}z_1=\operatorname{Im}z_2$.

从代数的观点出发, 复数集 $\mathbb{C}$ 可以定义为有序实数对的集合, 即

$$\mathbb{C}=\{(a,b)|a,b\in\mathbb{R}\}.$$

平面直角坐标系建立了有序实数对和 xOy 平面上的点之间的一一对应. 所以对任意复数 $a+b\mathrm{i}$, 都可以找到 xOy 平面上的一个点与之对应, 它的坐标是 (a,b); 反之, xOy 平面上任意一点 (a,b) 都唯一确定一个复数 $a+b\mathrm{i}$(如图 1.1). 因此,xOy 平面可以表示全体复数 $\mathbb{C}$.

xOy 平面被用来表示全体复数时称作复平面或 z 平面. 由于 x 轴上的点表示实数, 故称为实轴. y 轴上非原点的点表示纯虚数, 称为虚轴. 今后经常把复数 z 简称为点 z, 复数 $z=a+b\mathrm{i}$ 与复平面上点 (a,b) 不加区别.

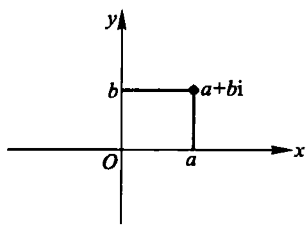

图 1.1

由勾股定理可知, 点 $z=a+b\mathrm{i}$ 到原点的距离为 $\sqrt{a^2+b^2}$. 定义

$$|z|=\sqrt{a^2+b^2}$$

为 z 的模.

令 $z_1=a_1+b_1\mathrm{i}$, $z_2=a_2+b_2\mathrm{i}$, 则

$$|z_1-z_2|=|(a_1-a_2)+(b_1-b_2)\mathrm{i}|=\sqrt{(a_1-a_2)^2+(b_1-b_2)^2}$$

就是点 (a_1,b_1) 和 (a_2,b_2) 之间的距离, 因此点 z_1 和 z_2 之间的距离用 $|z_1-z_2|$ 表示. 在描述平面上的曲线时, 这种距离的表示方法是非常有用的. 例如, 设 z_0 是一个固定的点, $r>0$, 则方程

$$|z-z_0|=r \tag{1.1}$$

表示与 z_0 的距离是 r 的所有复数的集合. 通常方程 (1.1) 称为圆周方程.

例 1.2　在复平面上描述满足下列方程的点 z 的集合

$$|z+3|=|z+2|. \tag{1.2}$$

解　点 z 满足方程 (1.2) 当且仅当它到点 -3 和 -2 的距离相等, 因此方程 (1.2) 是连接 -3 和 -2 这两点的线段的垂直平分线, 即方程 (1.2) 表示直线 $x=-\dfrac{5}{2}$.

求解方程 (1.2) 的一般方法是设 $z=x+\mathrm{i}y$ 是方程的解, 则可以得到代数式

$$|x+\mathrm{i}y+3|=|x+\mathrm{i}y+2|.$$

从而

$$x=-\frac{5}{2}.$$

□

定义 1.3　设 $z=a+b\mathrm{i}$, 称复数 $a-b\mathrm{i}$ 为 z 的共轭复数, 记作 $\overline{z}$, 即 $\overline{z}=a-b\mathrm{i}$.

显然 $z=\overline{z}$ 当且仅当 z 是一个实数、两个复数的和 (差) 的共轭等于共轭的和 (差), 即

$$\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}, \qquad \overline{z_1-z_2}=\overline{z_1}-\overline{z_2}.$$

例 1.3　证明两个复数乘积的共轭等于复数的共轭的乘积.

证明　即要证明

$$\overline{z_1z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}. \tag{1.3}$$

记 $z_1=a_1+b_1\mathrm{i}$, $z_2=a_2+b_2\mathrm{i}$, 则

$$\overline{z_1z_2}=a_1a_2-b_1b_2-(a_1b_2+a_2b_1)\mathrm{i}.$$

另一方面

$$\begin{aligned}\overline{z_1}\cdot\overline{z_2} &= (a_1-b_1\mathrm{i})(a_2-b_2\mathrm{i})=a_1a_2-b_1b_2-a_1b_2\mathrm{i}-a_2b_1\mathrm{i}\\ &= a_1a_2-b_1b_2-(a_1b_2+a_2b_1)\mathrm{i}.\end{aligned}$$

因此方程 (1.3) 成立.　□

下面是复数的模与其共轭的一些基本性质, 它们的验证留给读者作为练习.

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} \quad (z_2\neq 0),\ \ |z_1z_2|=|z_1||z_2|,\ \ \left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|}.$$

$$\operatorname{Re} z=\frac{z+\overline{z}}{2},\ \operatorname{Im} z=\frac{z-\overline{z}}{2\mathrm{i}}.$$

$$\overline{\overline{z}}=z,\ |z|=|\overline{z}|,\ z\overline{z}=|z|^2.$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{z_1\overline{z_2}}{z_2\overline{z_2}}=\frac{z_1\overline{z_2}}{|z_2|^2}\quad (z_2\neq 0),$$

特别地

$$\frac{1}{z}=\frac{\overline{z}}{|z|^2}.$$

关于复数的模有下面的三角不等式.

三角不等式: 对任意两个复数 z_1 和 z_2 都有

$$|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|,\tag{1.4}$$

即三角形两边之和大于第三边. 当三点共线时, 等号成立. 同时有另一个三角不等式

$$|z_2|-|z_1|\leqslant|z_2-z_1|,\tag{1.5}$$

或

$$|z_2|\leqslant|z_1|+|z_2-z_1|,$$

即三角形两边之差小于第三边.

现在来证明 (1.4).

$$\begin{aligned}|z_1+z_2|^2 &= (z_1+z_2)\overline{(z_1+z_2)}=(z_1+z_2)(\overline{z_1}+\overline{z_2})\\ &= z_1\overline{z_1}+z_2\overline{z_2}+z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2\\ &= |z_1|^2+|z_2|^2+2\operatorname{Re}(z_1\overline{z_2}).\end{aligned}$$

由于

$$\operatorname{Re}(z_1\overline{z_2})\leqslant|z_1\overline{z_2}|=|z_1||z_2|,$$

所以

$$|z_1+z_2|^2\leqslant(|z_1|+|z_2|)^2.$$

即

$$|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|.$$

再来证明 (1.5).

由于

$$|z_2| = |z_2 - z_1 + z_1| \leqslant |z_2 - z_1| + |z_1|,$$

所以有

$$|z_2| - |z_1| \leqslant |z_2 - z_1|. \qquad \square$$

1.1.2 复数的表示

下面介绍复数的向量表示、三角表示以及指数表示等几种表示方法.

对复平面上任意一点 z, 连接原点和 z 可得到一个有向线段, 称其为由复数 z 决定的向量, 简称为向量 $\boldsymbol{z}$. 显然由点 z 决定的向量的长度为 z 的模 $|z|$.

设 $\boldsymbol{v}_1$ 和 $\boldsymbol{v}_2$ 分别是由点 z_1 和 z_2 决定的向量. 由平行四边形法则可得向量的和 $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2$(如图 1.2). 若 $z_1 = x_1 + \mathrm{i}y_1$, $z_2 = x_2 + \mathrm{i}y_2$. 则图 1.2 中向量 $\boldsymbol{v}$ 的终点坐标为 $(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$, 即向量 $\boldsymbol{v}$ 对应于点 $z_1 + z_2$. 因此复数加法和平面上的向量加法是一致的.

例 1.4 设 z_1, z_2 和 z_3 为复平面上不同的三点, 证明这三点共线当且仅当存在实数 c, 使得 $z_3 - z_2 = c(z_2 - z_1)$.

证明 两个向量平行当且仅当其中一个是另一个与一个实数的乘积. 用复数来描述就是, z 与 w 平行当且仅当 $z = cw$, 其中 c 是实数. 由图 1.3 可以看到, z_1, z_2 和 z_3 三点共线当且仅当向量 $z_3 - z_2$ 与向量 $z_2 - z_1$ 平行, 因此结论成立. $\square$

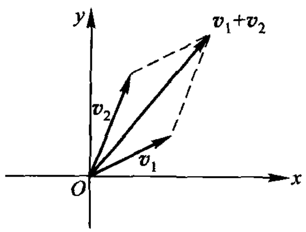

图 1.2

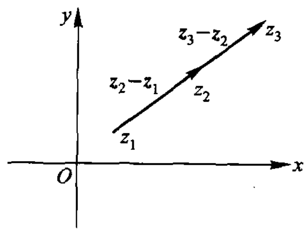

图 1.3

复平面上的点 $z = x + \mathrm{i}y$ 也可以用极坐标 (r, θ) 表示, 即

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta.$$

其中 r 是 z 的模, 即 $r = |z|$. θ 表示向量 z 的倾角, 是从正实轴沿着逆时针方向度量的 (参见图 1.4). 称 θ 是向量 z 的辐角. 显然, 辐角 θ 不是唯一的. 用 $\mathrm{Arg}z$ 表示向量 z 的辐角, $\mathrm{Arg}z$ 是一个多值函数. 如果 θ_0 是辐角 $\mathrm{Arg}z$ 的一个值, 则

$\mathrm{Arg}z = \theta_0 + 2k\pi$($k$ 为任意整数) 给出了 z 的全部辐角. 例如, 辐角 Argi 的所有值为

$$\mathrm{Argi} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \ (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots).$$

任意长度为 2π 的半开区间都包括辐角 $\mathrm{Arg}z$ 的一个值且只有一个值, 称这样的区间为 $\mathrm{Arg}z$ 的一个分支区间. 区间 $(-\pi, \pi]$ 称为 $\mathrm{Arg}z$ 的主分支区间, 将主分支区间 $(-\pi, \pi]$ 内 $\mathrm{Arg}z$ 的值称为辐角主值, 记为 $\arg z$. 显然 $\arg z$ 在负实轴处是不连续的且有 2π 的跳跃, 将负实轴这样的直线称为支割线. 用记号 $\mathrm{Arg}_{\tau} z$ 表示取值在 $(\tau, \tau + 2\pi]$ 上 $\mathrm{Arg}z$ 的一个分支. 因此 $\mathrm{Arg}_{-\pi} z$ 即辐角主值 $\arg z$.

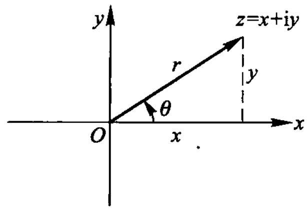

图 1.4

有了上面的约定, 则 $z = x + \mathrm{i}y$ 的极坐标表示 (或三角表示) 为

$$z = x + \mathrm{i}y = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta), \tag{1.6}$$

其中 θ 是复数 z 的辐角.

再利用欧拉 (Euler) 公式: $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$ 可得

$$z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta},$$

这种表示称为复数的指数表示法.

例 1.5 求 $\mathrm{Arg}(1+\sqrt{3}\mathrm{i})$.

解 $r = |1+\sqrt{3}\mathrm{i}| = 2$, 方程组 $\cos\theta = \dfrac{1}{2}$ 和 $\sin\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 有解 $\theta = \dfrac{\pi}{3}$, 因此 $\mathrm{Arg}(1+\sqrt{3}\mathrm{i}) = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$. 特别地, $\arg(1+\sqrt{3}\mathrm{i}) = \dfrac{\pi}{3}$. □

若

$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + \mathrm{i}\sin\theta_1), \qquad z_2 = r_2(\cos\theta_2 + \mathrm{i}\sin\theta_2),$$

则

$$z_1 z_2 = r_1 r_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + \mathrm{i}(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2)],$$

所以

$$z_1 z_2 = r_1 r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + \mathrm{i}\sin(\theta_1 + \theta_2)].$$

从而有

$$\mathrm{Arg}(z_1z_2) = \mathrm{Arg}z_1 + \mathrm{Arg}z_2. \tag{1.7}$$

由此得到复数乘法的几何解释: 复数 z_1z_2 的模与辐角分别等于复数 z_1, z_2 的模之积和辐角之和 (参见图 1.5).

由于除法运算是乘法运算的逆运算, 立即可得

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + \mathrm{i}\sin(\theta_1 - \theta_2)].$$

因此

$$\mathrm{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \mathrm{Arg}z_1 - \mathrm{Arg}z_2, \tag{1.8}$$

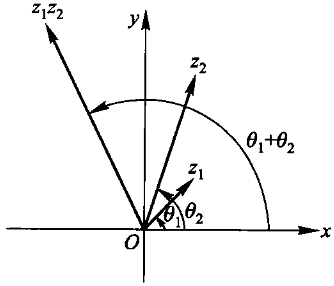

图 1.5

复数除法的几何解释是复数 $\dfrac{z_1}{z_2}$ 的模与辐角分别等于复数 z_1, z_2 的模之商和辐角之差.

例 1.6　求复数 $\dfrac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{3}-\mathrm{i}}$ 的极坐标表示.

解　由于 $1+\mathrm{i}$ 和 $\sqrt{3}-\mathrm{i}$ 的极坐标形式分别为

$$1+\mathrm{i} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

和

$$\sqrt{3}-\mathrm{i} = 2\left(\cos\frac{-\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\frac{-\pi}{6}\right).$$

因此有

$$\frac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{3}-\mathrm{i}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{5\pi}{12} + \mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{12}\right). \qquad \square$$

例 1.7　证明三角形内角和等于 π.

证明　设三角形的三个顶点分别为 z_1, z_2, z_3, 对应的三个顶角分别为 α, β, γ. 于是

$$\alpha = \arg\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1},\quad \beta = \arg\frac{z_3 - z_2}{z_1 - z_2},\quad \gamma = \arg\frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3}.$$

由于

$$\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1}\cdot\frac{z_3 - z_2}{z_1 - z_2}\cdot\frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} = -1,$$

利用公式 (1.7) 可得

$$\arg\frac{z_2-z_1}{z_3-z_1}+\arg\frac{z_3-z_2}{z_1-z_2}+\arg\frac{z_1-z_3}{z_2-z_3}=\arg(-1)+2k\pi,$$

其中 k 是某个整数. 由于 $0<\alpha<\pi, 0<\beta<\pi, 0<\gamma<\pi$, 所以

$$0<\alpha+\beta+\gamma<3\pi,$$

故必有 $k=0$, 即 $\alpha+\beta+\gamma=\pi$. □

1.1.3 黎曼 (Riemann) 球面与扩充复平面

下面给出用球面上的点表示复数的方法.

考虑三维欧氏空间 $\mathbb{R}^3$ 中的单位球面 (参见图 1.6), 其方程为

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2=1. \tag{1.9}$$

给定赤道平面上一点 z, 连接球面北极 $N=(0,0,1)$ 和点 z 的直线必交球面于某点 Z, 称点 Z 为 z 的球极投影. 如果将赤道平面作为复平面 (或 z 平面), 则单位球面称为黎曼球面.

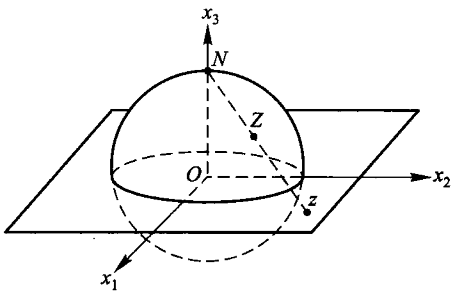

图 1.6

在球极投影下, 单位圆周 $|z|=1$(在 z 平面上) 保持不变 (即 $z=Z$), 为赤道. 单位圆周外各点 (即 $|z|>1$) 的投影在北半球, 单位圆周内各点 (即 $|z|<1$) 的投影在南半球. 特别地,z 平面的原点的投影是黎曼球面的南极.

例 1.8 若黎曼球面上点 $Z=(x_1,x_2,x_3)$ 在复平面上的投影是 $z=x+\mathrm{i}y$. 证明

$$x_1=\frac{2\mathrm{Re}\,z}{|z|^2+1},\qquad x_2=\frac{2\mathrm{Im}\,z}{|z|^2+1},\qquad x_3=\frac{|z|^2-1}{|z|^2+1}. \tag{1.10}$$

证明 过北极 $N=(0,0,1)$ 和点 $(x,y,0)$ 的直线的参数方程为

$$x_1=tx,\quad x_2=ty,\quad x_3=1-t,\qquad -\infty<t<+\infty. \tag{1.11}$$

当 t 满足

$$1=x_1^2+x_2^2+x_3^2=t^2x^2+t^2y^2+(1-t)^2$$

即

$$1=t^2(x^2+y^2+1)+1-2t \tag{1.12}$$

时, 直线穿过球面. 显然, $t=0$ 对应黎曼球面的北极. 将

$$t=\frac{2}{x^2+y^2+1}=\frac{2}{|z|^2+1}$$

代入 (1.11) 式就得到公式 (1.10). □

由此可知, 若点 (x_1,x_2,x_3) 是黎曼球面上一点, 在球极投影下与之对应的 z 平面上点 $x+\mathrm{i}y$ 的坐标为

$$x=\frac{x_1}{1-x_3},\qquad y=\frac{x_2}{1-x_3}. \tag{1.13}$$

显然北极 N 不是复平面上任一点的投影. 也就是说, 公式 (1.13) 中排除了点 $x_3=1$. 但可以给出这个特殊点的意义: 复平面上模非常大的点 (即离原点非常远的点) 投影到北极附近的点, 即当 $|z|\to+\infty$ 时, 投影趋于北极. 因此 N 可以看成是 z 平面上一个模为无穷大的扩充复数的投影, 记这个复数为 ∞, 称为无穷大. 称 $\mathbb{C}_\infty=\mathbb{C}\cup\infty$ 为扩充复平面.

平面上两点的距离和它们球极投影点的距离有着很大的不同. 球面是有界的 (两点之间的距离不超过直径), 而复平面是无界的 (两点之间的距离可以任意大).

练习 1.1

1. 计算下面各题, 结果写成 $a+b\mathrm{i}$ 的形式.

(1) $\dfrac{(3+2\mathrm{i})-(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})^2}$;

(2) $\mathrm{i}^3(1+2\mathrm{i})^2$;

(3) $(2+\mathrm{i})(5-\mathrm{i})(3-2\mathrm{i})$;

(4) $((1-\mathrm{i})^2-3)\mathrm{i}$.

2. 把复数方程 $z^3+5z^2=z+3\mathrm{i}$ 分解为两个实数方程.

3. 证明点 $1, -\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$ 和 $-\frac{1}{2}-\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$ 是一个等边三角形的三个顶点.

4. 在复平面上描述满足下列方程的点的集合并画图.

(1) $\operatorname{Im} z=-2$;

(2) $|z-1+\mathrm{i}|=3$;

(3) $|z-1|=|z-\mathrm{i}|$;

(4) $|z-1|+|z+1|=7$.

5. 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是实常数, z_0 是多项式方程

$$z^n+a_1 z^{n-1}+a_2 z^{n-2}+\cdots+a_n=0$$

的一个根, 证明 $\overline{z_0}$ 也是该方程的根.

6. 证明点 $3+\mathrm{i}$, 6 和 $4+4\mathrm{i}$ 是直角三角形的顶点.

7. 求下列复数的辐角和极坐标表示.

(1) $-3+3\mathrm{i}$; (2) $-\pi\mathrm{i}$; (3) $-2\sqrt{3}-2\mathrm{i}$; (4) $(1-\mathrm{i})(-\sqrt{3}+\mathrm{i})$.

8. 利用复数乘积 $(1+\mathrm{i})(5-\mathrm{i})^4$, 证明 $\frac{\pi}{4}=4\arctan\frac{1}{5}-\arctan\frac{1}{239}$.

9. 证明非零复数 z_1 和 z_2 满足 $|z_1+z_2|=|z_1|+|z_2|$ 的充要条件是它们具有相同的辐角.

10. 计算.

(1) $\arg(3+3\mathrm{i})$; (2) $\arg(-\pi)$; (3) $\arg(100\mathrm{i})$; (4) $\arg(\sqrt{3}+\mathrm{i})$.

11. 设 $x+\frac{1}{x}=2\cos\theta$, 证明:

$$x^k+\frac{1}{x^k}=2\cos k\theta,$$

其中 k 是正整数.

12. 求下列复平面上的点在黎曼球面上的投影.

(1) i; (2) $-\frac{3}{10}+\frac{2}{5}\mathrm{i}$.

§1.2 复平面上的点集

复变函数主要定义在复平面上的区域或闭区域上, 本节给出这些点集的严格定义.

1.2.1 区域

定义 1.4 设 ρ 是正实数, 满足不等式

$$|z-z_0|<\rho$$