Chinese Research on Elementary Mathematics No. 4 2012

中国初等数学研究

Chinese Research on Elementary Mathematics

主编 杨学枝

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

hininese Research on Elementary Mathematics

No. 4 2012

中国初等数学研究

Chinese Research on Elementary Mathematics

主编 杨学枝

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

中国初等数学研究.第4辑/杨学校主编.—哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2012.7

ISBN 978-7-5603-3635-0

Ⅰ.①中… Ⅱ.①杨… Ⅲ.①初等数学—文集
Ⅳ.①O12—53

中国版本图书馆CIP数据核字(2012)第149401号

策划编辑 刘培杰 张永芹
责任编辑 王勇钢
封面设计 孙茵艾
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街10号 邮编150006
传 真 0451—86414749
网 址 http://hitpress.hit.edu.cn
印 刷 哈尔滨市石桥印务有限公司
开 本 880mm×1230mm 1/16 印张9 字数310千字
版 次 2012年7月第1版 2012年7月第1次印刷
书 号 ISBN 978—7—5603—3635—0
定 价 48.00元

中国初等數學研究

陳省身

1995年5月20日

已故国际著名数学大师陈省身先生生前为本文集所题写的书名

目　录

· **初数专题**

· **拓展延伸**

· **解题探秘**

· **数学教育**

· **数学文化**

· **短论荟萃**

· **信息指南**

三个三角不等式及其应用

杨学枝

(福建省福州第二十四中学,福建　福州　350015)

本文将首先给出并证明三个三角不等式(定理),然后由它推导出关于平面三角形和四边形不等式.由于这三个三角不等式(定理)证法相类似,所以以下只给出定理 1 的证明.

定理 1　设 $\alpha_i,\beta_i\in[0,\pi)(i=1,2,3,4)$,且 $\sum\limits_{i=1}^{4}\alpha_i=\sum\limits_{i=1}^{4}\beta_i=\pi$,则

$$\sum_{i=1}^{4}\sin\alpha_i\cos\beta_i\geqslant\frac{1}{2}\left[\left(\sum_{i=1}^{4}\sin 2\alpha_i\right)\left(\sum_{i=1}^{4}\sin 2\beta_i\right)\right]^{\frac{1}{2}}\tag{1}$$

当且仅当 $\alpha_i=\beta_i(i=1,2,3,4)$ 时,式(1)取等号.

证明　由于 $\sum\limits_{i=1}^{4}\alpha_i=\sum\limits_{i=1}^{4}\beta_i=\pi$,则

$$\begin{aligned}-\sin\alpha_1+\sin\alpha_2+\sin\alpha_3+\sin\alpha_4&=-2\cos\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}\sin\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}+2\sin\frac{\alpha_3+\alpha_4}{2}\cos\frac{\alpha_3-\alpha_4}{2}=\\&-2\sin\frac{\alpha_3+\alpha_4}{2}\sin\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}+2\sin\frac{\alpha_3+\alpha_4}{2}\cos\frac{\alpha_3-\alpha_4}{2}=\\&2\sin\frac{\alpha_3+\alpha_4}{2}\left(-\cos\frac{\pi-\alpha_1+\alpha_2}{2}+\cos\frac{\alpha_3-\alpha_4}{2}\right)=\\&4\sin\frac{\alpha_3+\alpha_4}{2}\sin\frac{\pi-\alpha_1-\alpha_4+\alpha_2+\alpha_3}{4}\sin\frac{\pi-\alpha_1-\alpha_3+\alpha_2+\alpha_4}{4}=\\&4\sin\frac{\alpha_2+\alpha_3}{2}\sin\frac{\alpha_2+\alpha_4}{2}\sin\frac{\alpha_3+\alpha_4}{2}\end{aligned}$$

即

$$-\sin\alpha_1+\sin\alpha_2+\sin\alpha_3+\sin\alpha_4=4\sin\frac{\alpha_2+\alpha_3}{2}\sin\frac{\alpha_2+\alpha_4}{2}\sin\frac{\alpha_3+\alpha_4}{2}$$

同理可得

$$\sin\alpha_1-\sin\alpha_2+\sin\alpha_3+\sin\alpha_4=4\sin\frac{\alpha_1+\alpha_3}{2}\sin\frac{\alpha_1+\alpha_4}{2}\sin\frac{\alpha_3+\alpha_4}{2}$$

$$\sin\alpha_1+\sin\alpha_2-\sin\alpha_3+\sin\alpha_4=4\sin\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}\sin\frac{\alpha_1+\alpha_4}{2}\sin\frac{\alpha_2+\alpha_4}{2}$$

$$\sin\alpha_1+\sin\alpha_2+\sin\alpha_3-\sin\alpha_4=4\sin\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}\sin\frac{\alpha_1+\alpha_3}{2}\sin\frac{\alpha_2+\alpha_3}{2}$$

$$-\cos\beta_1+\cos\beta_2+\cos\beta_3+\cos\beta_4=4\sin\frac{\beta_1+\beta_2}{2}\sin\frac{\beta_1+\beta_3}{2}\sin\frac{\beta_1+\beta_4}{2}$$

$$\cos\beta_1-\cos\beta_2+\cos\beta_3+\cos\beta_4=4\sin\frac{\beta_2+\beta_1}{2}\sin\frac{\beta_2+\beta_3}{2}\sin\frac{\beta_2+\beta_4}{2}$$

$$\cos\beta_1+\cos\beta_2-\cos\beta_3+\cos\beta_4=4\sin\frac{\beta_3+\beta_1}{2}\sin\frac{\beta_3+\beta_2}{2}\sin\frac{\beta_3+\beta_4}{2}$$

$$\cos\beta_1+\cos\beta_2+\cos\beta_3-\cos\beta_4=4\sin\frac{\beta_4+\beta_1}{2}\sin\frac{\beta_4+\beta_2}{2}\sin\frac{\beta_4+\beta_3}{2}$$

因此,有

$$\sum_{i=1}^{4}\sin\alpha_i\cos\beta_i=\frac{1}{4}\sum(-\sin\alpha_1+\sin\alpha_2+\sin\alpha_3+\sin\alpha_4)(-\cos\beta_1+\cos\beta_2+\cos\beta_3+\cos\beta_4)=$$

$$4(\sin\frac{\alpha_2+\alpha_3}{2}\sin\frac{\alpha_2+\alpha_4}{2}\sin\frac{\alpha_3+\alpha_4}{2}\cdot\sin\frac{\beta_1+\beta_2}{2}\sin\frac{\beta_1+\beta_3}{2}\sin\frac{\beta_1+\beta_4}{2}+$$

$$\sin\frac{\alpha_1+\alpha_3}{2}\sin\frac{\alpha_1+\alpha_4}{2}\sin\frac{\alpha_3+\alpha_4}{2}\cdot\sin\frac{\beta_2+\beta_1}{2}\sin\frac{\beta_2+\beta_3}{2}\sin\frac{\beta_2+\beta_4}{2}+$$

$$\sin\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}\sin\frac{\alpha_1+\alpha_4}{2}\sin\frac{\alpha_2+\alpha_4}{2}\cdot\sin\frac{\beta_3+\beta_1}{2}\sin\frac{\beta_3+\beta_2}{2}\sin\frac{\beta_3+\beta_4}{2}+$$

$$\sin\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}\sin\frac{\alpha_1+\alpha_3}{2}\sin\frac{\alpha_2+\alpha_3}{2}\cdot\sin\frac{\beta_4+\beta_1}{2}\sin\frac{\beta_4+\beta_2}{2}\sin\frac{\beta_4+\beta_3}{2})\geqslant$$

$$[4^4\sin\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}\sin\frac{\alpha_1+\alpha_3}{2}\sin\frac{\alpha_1+\alpha_4}{2}\sin\frac{\alpha_2+\alpha_3}{2}\sin\frac{\alpha_2+\alpha_4}{2}\sin\frac{\alpha_3+\alpha_4}{2}\cdot$$

$$\sin\frac{\beta_1+\beta_2}{2}\sin\frac{\beta_1+\beta_3}{2}\sin\frac{\beta_1+\beta_4}{2}\sin\frac{\beta_2+\beta_3}{2}\sin\frac{\beta_2+\beta_4}{2}\sin\frac{\beta_3+\beta_4}{2}]^{\frac{1}{2}}=$$

$$2[\sin(\alpha_1+\alpha_2)\sin(\alpha_1+\alpha_3)\sin(\alpha_2+\alpha_3)\sin(\beta_1+\beta_2)\sin(\beta_1+\beta_3)\sin(\beta_2+\beta_3)]^{\frac{1}{2}}$$

(注意到$\sum\limits_{i=1}^{4}\alpha_i=\sum\limits_{i=1}^{4}\beta_i=\pi$)

另外,有

$$\sum_{i=1}^{4}\sin 2\alpha_i=2\sin(\alpha_1+\alpha_2)\cos(\alpha_1-\alpha_2)+2\sin(\alpha_3+\alpha_4)\cos(\alpha_3-\alpha_4)=$$

$$2\sin(\alpha_1+\alpha_2)[\cos(\alpha_1-\alpha_2)+\cos(\alpha_3-\alpha_4)]=$$

$$4\sin(\alpha_1+\alpha_2)\sin(\alpha_1+\alpha_3)\sin(\alpha_2+\alpha_3)$$

同理可得

$$\sum_{i=1}^{4}\sin 2\beta_i=4\sin(\beta_1+\beta_2)\sin(\beta_1+\beta_3)\sin(\beta_2+\beta_3)$$

因此得到

$$\sum_{i=1}^{4}\sin\alpha_i\cos\beta_i\geqslant\frac{1}{2}[(\sum_{i=1}^{4}\sin 2\alpha_i)(\sum_{i=1}^{4}\sin 2\beta_i)]^{\frac{1}{2}}$$

式(1)获证.由以上证明可知,当且仅当

$$\sin\frac{\alpha_2+\alpha_3}{2}\sin\frac{\alpha_2+\alpha_4}{2}\sin\frac{\alpha_3+\alpha_4}{2}\cdot\sin\frac{\beta_1+\beta_2}{2}\sin\frac{\beta_1+\beta_3}{2}\sin\frac{\beta_1+\beta_4}{2}=$$

$$\sin\frac{\alpha_1+\alpha_3}{2}\sin\frac{\alpha_1+\alpha_4}{2}\sin\frac{\alpha_3+\alpha_4}{2}\cdot\sin\frac{\beta_2+\beta_1}{2}\sin\frac{\beta_2+\beta_3}{2}\sin\frac{\beta_2+\beta_4}{2}=$$

$$\sin\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}\sin\frac{\alpha_1+\alpha_4}{2}\sin\frac{\alpha_2+\alpha_4}{2}\cdot\sin\frac{\beta_3+\beta_1}{2}\sin\frac{\beta_3+\beta_2}{2}\sin\frac{\beta_3+\beta_4}{2}=$$

$$\sin\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}\sin\frac{\alpha_1+\alpha_3}{2}\sin\frac{\alpha_2+\alpha_3}{2}\cdot\sin\frac{\beta_4+\beta_1}{2}\sin\frac{\beta_4+\beta_2}{2}\sin\frac{\beta_4+\beta_3}{2}$$

即

$$\tan\frac{\alpha_1+\alpha_3}{2}\tan\frac{\alpha_1+\alpha_4}{2}=\tan\frac{\beta_1+\beta_3}{2}\tan\frac{\beta_1+\beta_4}{2}$$

$$\tan\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}\tan\frac{\alpha_1+\alpha_3}{2}=\tan\frac{\beta_1+\beta_2}{2}\tan\frac{\beta_1+\beta_3}{2}$$

$$\tan\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}\tan\frac{\alpha_1+\alpha_4}{2}=\tan\frac{\beta_1+\beta_2}{2}\tan\frac{\beta_1+\beta_4}{2}$$

同时成立时,式(1)取等号.这时易得

$$\tan\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}=\tan\frac{\beta_1+\beta_2}{2}$$

$$\tan\frac{\alpha_1+\alpha_3}{2}=\tan\frac{\beta_1+\beta_3}{2}$$

$$\tan\frac{\alpha_1+\alpha_4}{2}=\tan\frac{\beta_1+\beta_4}{2}$$

注意到 $\alpha_i,\beta_i\in[0,\pi)(i=1,2,3,4)$，$\sum_{i=1}^{4}\alpha_i=\sum_{i=1}^{4}\beta_i=\pi$，便得到 $\alpha_i=\beta_i(i=1,2,3,4)$，故当且仅当 $\alpha_i=\beta_i(i=1,2,3,4)$ 时，式(1) 取等号. 定理获证.

与定理 1 的证法完全类似，可得以下定理 2、定理 3.

定理 2 设 $\alpha_i,\beta_i\in[0,\pi)(i=1,2,3,4)$，且 $\sum_{i=1}^{4}\alpha_i=\sum_{i=1}^{4}\beta_i=\pi$，则

$$\sum_{i=1}^{4}\sin\alpha_i\sin\beta_i\geqslant\frac{1}{2}\left[\left(\sum_{i=1}^{4}\sin 2\alpha_i\right)\left(\sum_{i=1}^{4}\sin 2\beta_i\right)\right]^{\frac{1}{2}}\tag{2}$$

当且仅当 $\alpha_i+\beta_i=\frac{\pi}{2}(i=1,2,3,4)$ 时，式(2) 取等号.

定理 3 设 $\alpha_i,\beta_i\in[0,\pi)(i=1,2,3,4)$，且 $\sum_{i=1}^{4}\alpha_i=\sum_{i=1}^{4}\beta_i=\pi$，则

$$\sum_{i=1}^{4}\cos\alpha_i\cos\beta_i\geqslant\frac{1}{2}\left[\left(\sum_{i=1}^{4}\sin 2\alpha_i\right)\left(\sum_{i=1}^{4}\sin 2\beta_i\right)\right]^{\frac{1}{2}}\tag{3}$$

当且仅当 $\alpha_i+\beta_i=\frac{\pi}{2}(i=1,2,3,4)$ 时，式(3) 取等号.

不等式(1)，(2)，(3) 是三个很有用的不等式，由它可以得到以下诸命题.

命题 1 平面凸四边形 $A_1A_2A_3A_4$，边长分别为 a_1,a_2,a_3,a_4，面积为 Δ，$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4\in[0,\pi)$，且 $\sum_{i=1}^{4}\beta_i=\pi$，则

$$\sum_{i=1}^{4}a_i\cos\beta_i\geqslant\sqrt{2\Delta\cdot\sum_{i=1}^{4}\sin 2\beta_i}\tag{4}$$

当且仅当四边形 $A_1A_2A_3A_4$ 内接于圆，且 $\frac{a_1}{\sin\beta_1}=\frac{a_2}{\sin\beta_2}=\frac{a_3}{\sin\beta_3}=\frac{a_4}{\sin\beta_4}$ 时，式(4) 取等号.

由于在边长给定的平面四边形中，以其内接于圆时的面积为最大，因此，我们只要证明凸四边形 $A_1A_2A_3A_4$ 内接于圆时，式(4) 成立即可，然后再根据定理 1 便可得证.

命题 2 平面凸四边形 $A_1A_2A_3A_4$，边长分别为 a_1,a_2,a_3,a_4，面积为 Δ_A，圆内接四边形 $B_1B_2B_3B_4$，边长分别为 b_1,b_2,b_3,b_4，面积为 Δ_B，圆内接四边形 $B_1B_2B_3B_4$ 的圆心到边 b_1,b_2,b_3,b_4 的距离分别为 h_1,h_2,h_3,h_4，并规定，当边所对的圆心角大于 π 时，圆心到这条边的距离为负数，则

$$\sum_{i=1}^{4}a_ih_i\geqslant 2\sqrt{\Delta_A\Delta_B}\tag{5}$$

当且仅当四边形 $A_1A_2A_3A_4$ 内接于圆，且 $\frac{a_1}{\sin\beta_1}=\frac{a_2}{\sin\beta_2}=\frac{a_3}{\sin\beta_3}=\frac{a_4}{\sin\beta_4}$（这里 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 分别为圆内接四边形 $B_1B_2B_3B_4$ 的边 b_1,b_2,b_3,b_4 上的圆周角）时，式(5) 取等号.

若四边形 $B_1B_2B_3B_4$ 的内接圆半径为 R_B，易知有 $h_i=R_B\cos\beta_i(i=1,2,3,4)$，于是，由命题 1 即得.

命题 3 平面凸四边形 $A_1A_2A_3A_4$ 和 $B_1B_2B_3B_4$，边长分别为 a_1,a_2,a_3,a_4 和 b_1,b_2,b_3,b_4，面积分别为 Δ_A 和 Δ_B，则

$$\sum_{i=1}^{4}a_ib_i\geqslant 4\sqrt{\Delta_A\cdot\Delta_B}\tag{6}$$

当且仅当四边形 $A_1A_2A_3A_4$ 和 $B_1B_2B_3B_4$ 都为圆内接四边形（不一定要内接于同一个圆），且 $\frac{a_1}{\cos\beta_1}=\frac{a_2}{\cos\beta_2}=$

$\frac{a_3}{\cos\beta_3}=\frac{a_4}{\cos\beta_4}$（这里$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$分别为圆内接四边形$B_1B_2B_3B_4$的边$b_1,b_2,b_3,b_4$上的圆周角）时，式(6)取等号.

由于在边长给定的平面四边形中，以其内接于圆时的面积为最大，因此，我们只要证明凸四边形$A_1A_2A_3A_4$和$B_1B_2B_3B_4$内接于圆时式(5)成立即可，然后再根据定理2便可得证.

命题4 平面凸四边形$A_1A_2A_3A_4$和$B_1B_2B_3B_4$都为圆内接四边形（不一定要内接于同一个圆），边长分别为a_1,a_2,a_3,a_4和b_1,b_2,b_3,b_4，面积分别为Δ_A和Δ_B，两圆心到四边a_i和$b_i(i=1,2,3,4)$的距离分别为d_1，d_2,d_3,d_4和h_1,h_2,h_3,h_4，并规定，当边所对的圆心角大于π时，圆心到这条边的距离为负，则

$$\sum_{i=1}^{4}d_ih_i\geqslant 2\sqrt{\Delta_A\cdot\Delta_B} \tag{7}$$

当且仅当凸四边形$A_1A_2A_3A_4$和$B_1B_2B_3B_4$都为圆内接四边形（不一定要内接于同一个圆），且$\frac{\sin\alpha_1}{\cos\beta_1}=\frac{\sin\alpha_2}{\cos\beta_2}=\frac{\sin\alpha_3}{\cos\beta_3}=\frac{\sin\alpha_4}{\cos\beta_4}$（这里$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$和$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$分别为圆内接四边形$A_1A_2A_3A_4$和$B_1B_2B_3B_4$的边$a_1,a_2,a_3,a_4$和$b_1,b_2,b_3,b_4$上的圆周角）时，式(7)取等号.

由于在边长给定的平面四边形中，以其内接于圆时的面积为最大，因此，我们只要证明凸四边形$A_1A_2A_3A_4$和$B_1B_2B_3B_4$内接于圆时，式(6)成立即可. 另外，若四边形$A_1A_2A_3A_4$和$B_1B_2B_3B_4$的内接圆半径分别为R_A和R_B，易知有$d_i=R_A\cos\alpha_i,h_i=R_B\cos\beta_i(i=1,2,3,4)$，然后再根据定理3便可得证.

若在命题1中取$a_4=0$且$\beta_4=0$，即得

命题5 $\triangle A_1A_2A_3$，边长分别为a_1,a_2,a_3，面积为Δ，$\beta_1,\beta_2,\beta_3\in[0,\pi)$，且$\sum_{i=1}^{3}\beta_i=\pi$，则

$$\sum_{i=1}^{3}a_i\cos\beta_i\geqslant\sqrt{2\Delta\cdot\sum_{i=1}^{3}\sin 2\beta_i} \tag{8}$$

当且仅当$\frac{a_1}{\sin\beta_1}=\frac{a_2}{\sin\beta_2}=\frac{a_3}{\sin\beta_3}$时，式(8)取等号.

在式(8)中，应用余弦定理和三角形面积公式即得

命题6 $\triangle A_1A_2A_3$和$\triangle B_1B_2B_3$，边长分别为a_1,a_2,a_3和b_1,b_2,b_3，面积分别为Δ_A和Δ_B，则

$$\sum(-b_1^2+b_2^2+b_3^2)b_1a_1\geqslant 16\sqrt{\Delta_A\Delta_B^3} \tag{9}$$

当且仅当$\triangle A_1A_2A_3\backsim\triangle B_1B_2B_3$时，式(9)取等号.

命题7 设$\triangle A_1A_2A_3$三边长为a_1,a_2,a_3，面积为Δ，又$x_1,x_2,x_3\in\mathbf{R}^+$，则

$$x_1a_1+x_2a_2+x_3a_3\geqslant\sqrt{\frac{8\sqrt{\prod(t^2-x_1^2)}\,\Delta}{t^4}} \tag{10}$$

当且仅当$\frac{a_1}{\sqrt{t^2-x_1^2}}=\frac{a_2}{\sqrt{t^2-x_2^2}}=\frac{a_3}{\sqrt{t^2-x_3^2}}$时，式(10)取等号. 其中$t$是方程

$$t^3-(\sum x_1^2)t-2x_1x_2x_3=0$$

的唯一正根.

证明 在式(8)两边同时乘以正数t，并令$t\cos\beta_1=x_1,t\cos\beta_2=x_2,t\cos\beta_3=x_3$，则由$\sum_{i=1}^{3}\beta_i=\pi$，有等式（请读者自己证明）

$$\sum_{i=1}^{3}\sin 2\beta_i=4\sin\beta_1\sin\beta_2\sin\beta_3=4\sqrt{\prod_{i=1}^{3}(1-\cos\beta_i)}=\frac{4\sqrt{\prod_{i=1}^{3}(t^2-x_i^2)}}{t^3}$$

代入式(8)，即得式(10). 另外，当$\sum_{i=1}^{3}\beta_i=\pi$时，有等式(请读者自己证明)

$$\cos^2\beta_1+\cos^2\beta_2+\cos^2\beta_3+2\cos\beta_1\cos\beta_2\cos\beta_3=1$$

于是，有

$$\sum\left(\frac{x_1}{t}\right)^2+2\,\frac{x_1x_2x_3}{t^3}=1$$

即
$$t^3-\left(\sum x_1^2\right)t-2x_1x_2x_3=0$$

易知此方程有唯一正根.

在式(10)中取$x_1=\sqrt{\frac{\lambda_2+\lambda_3}{\lambda_1}}$，$x_2=\sqrt{\frac{\lambda_3+\lambda_1}{\lambda_2}}$，$x_3=\sqrt{\frac{\lambda_1+\lambda_2}{\lambda_3}}$，$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\in\mathbf{R}^+$，则可求得

$$t=\sqrt{\frac{(\lambda_2+\lambda_3)(\lambda_3+\lambda_1)(\lambda_1+\lambda_2)}{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}}$$

于是有

命题 8 设$\triangle A_1A_2A_3$三边长为a_1,a_2,a_3，面积为Δ，又$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\in\mathbf{R}^+$，则

$$\sqrt{\frac{\lambda_2+\lambda_3}{\lambda_1}}a_1+\sqrt{\frac{\lambda_3+\lambda_1}{\lambda_2}}a_2+\sqrt{\frac{\lambda_1+\lambda_2}{\lambda_3}}a_3\geqslant\sqrt[4]{\frac{64(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)^3\Delta^2}{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}}\tag{11}$$

当且仅当$\frac{a_1}{\sqrt{\lambda_1(\lambda_2+\lambda_3)}}=\frac{a_2}{\sqrt{\lambda_2(\lambda_3+\lambda_1)}}=\frac{a_3}{\sqrt{\lambda_3(\lambda_1+\lambda_2)}}$时，式(11)取等号.

以下命题9与命题8等价：

命题 9 $\triangle A_1A_2A_3$和$\triangle B_1B_2B_3$，边长分别为a_1,a_2,a_3和b_1,b_2,b_3，面积分别为Δ_A和Δ_B，则

$$\sqrt{\frac{b_1}{-b_1+b_2+b_3}}a_1+\sqrt{\frac{b_2}{b_1-b_2+b_3}}a_2+\sqrt{\frac{b_3}{b_1+b_2-b_3}}a_3\geqslant(b_1+b_2+b_3)\sqrt{\frac{\Delta_A}{\Delta_B}}\tag{12}$$

当且仅当$\frac{a_1}{\sqrt{b_1(-b_1+b_2+b_3)}}=\frac{a_2}{\sqrt{b_2(b_1-b_2+b_3)}}=\frac{a_3}{\sqrt{b_3(b_1+b_2-b_3)}}$时，式(12)取等号.

在式(11)中，取$\triangle A_1A_2A_3$为正三角形，可得

命题 10 设$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\in\mathbf{R}^+$，则

$$\sqrt{\frac{\lambda_2+\lambda_3}{\lambda_1}}+\sqrt{\frac{\lambda_3+\lambda_1}{\lambda_2}}+\sqrt{\frac{\lambda_1+\lambda_2}{\lambda_3}}\geqslant\sqrt[4]{\frac{12(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)^3}{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}}\tag{13}$$

当且仅当$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3$时，式(13)取等号.

在式(12)中，取$\triangle A_1A_2A_3$为正三角形，可得

命题 11 设$\triangle B_1B_2B_3$三边长为b_1,b_2,b_3，面积为Δ，则

$$\sqrt{\frac{b_1}{-b_1+b_2+b_3}}+\sqrt{\frac{b_2}{b_1-b_2+b_3}}+\sqrt{\frac{b_1}{b_1+b_2-b_3}}\geqslant\frac{\sqrt{3}(b_1+b_2+b_3)}{2\sqrt{\Delta}}\tag{14}$$

当且仅当$\triangle B_1B_2B_3$为正三角形时，式(14)取等号.

由命题8容易得到以下代数不等式，即有

命题 12 设$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,u_1,u_2,u_3\in\mathbf{R}^+$，则

$$\begin{gathered}\sqrt{\frac{\lambda_2+\lambda_3}{\lambda_1}}(u_2+u_3)+\sqrt{\frac{\lambda_3+\lambda_1}{\lambda_2}}(u_3+u_1)+\sqrt{\frac{\lambda_1+\lambda_2}{\lambda_3}}(u_1+u_2)\geqslant\\\sqrt[4]{\frac{4(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)^3\cdot u_1u_2u_3(u_1+u_2+u_3)}{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}}\end{gathered}\tag{15}$$

当且仅当$\frac{u_2+u_3}{\sqrt{\lambda_1(\lambda_2+\lambda_3)}}=\frac{u_3+u_1}{\sqrt{\lambda_2(\lambda_3+\lambda_1)}}=\frac{u_1+u_2}{\sqrt{\lambda_3(\lambda_1+\lambda_2)}}$时，式(15)取等号.

本文中的三个定理还有许多其他应用，这里就不再赘述了.

最后笔者提出如下

猜想 设 $\alpha_i,\beta_i \in [0,\pi)(i=1,2,\cdots,n)$，且 $\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i=\sum\limits_{i=1}^{n}\beta_i=\pi$，则

$$\sum_{i=1}^{n}\sin\alpha_i\cos\beta_i \geqslant \frac{1}{2}\left[\left(\sum_{i=1}^{n}\sin 2\alpha_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\sin 2\beta_i\right)\right]^{\frac{1}{2}} \tag{16}$$

当且仅当 $\alpha_i=\beta_i(i=1,2,\cdots,n)$ 时，式(16)取等号.

注 本文最先拟的题目为“一个新的三角不等式及应用”，摘要刊于《中国初等数学研究文集》(杨之.河南教育出版社，1992)，后又全文刊于《福建省初等数学研究文集》(杨学枝，林章衍.福建教育出版社，1993)，以后也编入《奥赛金牌之路(高中数学)》(吴康.广西师范大学出版社，2002).本文于2008年11月作了较大修改.

关于第二类切比雪夫多项式的若干研究

吴　康[1],李静洁[2]

(1.华南师范大学数学科学学院,广东　广州　510631;
2.汕头市聿怀中学,广东　汕头　515041)

摘　要:研究了第二类切比雪夫多项式在不同自变量下的恒等式;求解第二类切比雪夫型基本方程,得到重根分布规律.

关键词:切比雪夫多项式　基本方程　重根

以俄国著名数学家切比雪夫(Tschebyscheff,又译契贝谢夫等,1821—1894)名字命名的特殊函数第一类和第二类切比雪夫多项式 $T_n(x)$ 和 $U_n(x)$,源于多倍角正余弦函数展开式,研究成果丰富[1],[2].第二类切比雪夫多项式在不同自变量下的恒等式,基本方程尚未见研究.

一、预备知识

定义 1[1],[2]　对 $n \in \mathbf{Z}_0, x \in \mathbf{R}$,且 $|x| \leqslant 1$,第一类切比雪夫多项式 $T_n(x)$ 定义为

$$T_n(x) = \cos(n\arccos x) \tag{1}$$

该定义也拓广为:$T_n(x) = \sum\limits_{k \geqslant 0} (-1)^k \begin{pmatrix} n \\ 2k \end{pmatrix} x^{n-2k}(1-x^2)^k$,其中 $n,m \in \mathbf{Z}_0, x \in \mathbf{C}$.

第一类切比雪夫多项式有许多美妙的性质[1],[2],例如:

(1)$T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta), \theta \in \mathbf{R}, n \in \mathbf{Z}_0$.　(2)

(2)$T_n((y+y^{-1})/2) = (y^n + y^{-n})/2$,其中 $y \in \mathbf{C}, y \neq 0, n \in \mathbf{Z}_0$.　(3)

定义 2[2]　对 $n \in \mathbf{Z}_0, x \in \mathbf{R}$,且 $|x| < 1$,第二类切比雪夫多项式 $U_n(x)$ 定义为

$$U_n(x) = [\sin((n+1)\arccos x)]/\sin(\arccos x) \tag{4}$$

该定义也拓广为

$$U_n(x) = \sum_{k \geqslant 0} (-1)^k \begin{pmatrix} n+1 \\ 2k+1 \end{pmatrix} x^{n-2k}(1-x^2)^k \quad n \in \mathbf{Z}_0, x \in \mathbf{C}$$

第二类切比雪夫多项式有许多美妙的性质[2],例如:

(1)$U_n(\cos\theta) = [\sin(n+1)\theta]/\sin\theta, \theta \in \mathbf{R}$ 且 $\theta \neq k\pi, n \in \mathbf{Z}_0, k \in \mathbf{Z}$.　(5)

(2)$\{U_n(x)\}$ 满足二阶递推关系 $U_{n+2}(x) = 2xU_{n+1}(x) - U_n(x), x \in \mathbf{C}, n \in \mathbf{Z}_0$.　(6)

(3) 函数列 $\{U_n(x)\}$ 与 $\{T_n(x)\}$ 的关系满足:$U_{n+2}(x) = xU_{n+1}(x) + T_{n+2}(x)$.　(7)

二、第二类切比雪夫多项式的性质

本文约定 $\varphi(y) = (y+y^{-1})/2, \varphi_n(y) = (y^n + y^{-n})/2, \psi_n(y) = (y^n - y^{-n})/(y - y^{-1}), Z(d_1,d_2) = \{d_1, d_1+1, \cdots, d_2\}, n, d_1, d_2 \in \mathbf{Z}_0$ 且 $d_1 < d_2, y \in \mathbf{C}, y \neq 0$.

定理 1　对 $n \in \mathbf{Z}_0, y \in \mathbf{C}$,恒成立:

(1)$U_n(\varphi(y)) = \psi_{n+1}(y), y \neq 0, \pm 1$.　(8)

(2)$U_{n+2}(\varphi(y)) = U_n(\varphi(y)) + 2\varphi_{n+2}(y), y \neq 0$.　(9)

(3)$U_{n+1}(\varphi(y^2)) + U_n(\varphi(y^2)) = \psi_{2n+3}(y), y \neq 0, \pm 1$.　(10)

证明 (1) 当 $n=0,1$ 时上式显然. 假设式(8) 对 $n\leqslant k+1,k\in \mathbf{Z}_0$ 都成立,由式(6) 得 $U_{k+2}(\varphi(y))=2\varphi(y)\psi_{k+2}(y)-\psi_{k+1}(y)=[(y+y^{-1})(y^{k+2}-y^{-k-2})/(y-y^{-1})]-[(y^{k+1}-y^{-k-1})/(y-y^{-1})]=\psi_{k+3}(y)$,即当 $n=k+2$ 时式(8) 成立,故式(8) 对一切 $n\in \mathbf{Z}_0$ 成立.

(2) 由式(3),(6) 及(7),知

$$2U_{n+2}(\varphi(y))=2\varphi(y)U_{n+1}(\varphi(y))+2T_{n+2}(\varphi(y))=U_n(\varphi(y))+U_{n+2}(\varphi(y))+2\varphi_{n+2}(y)$$

故得式(9).

(3) 由式(9),有 $U_{i+2}(\varphi(y^2))=U_i(\varphi(y^2))+2\varphi_{i+2}(y^2),i\in Z(0,n-1)$,把上述 n 式相加,有

$$U_{n+1}(\varphi(y^2))+U_n(\varphi(y^2))=2\varphi_2(y^2)+2\varphi_3(y^2)+\cdots+2\varphi_{n+1}(y^2)+U_0(\varphi(y^2))+U_1(\varphi(y^2))=$$

$$(y^{2n+4}-y^{-2n-2})/(y^2-1)=\psi_{2n+3}(y)$$

定理 2 对 $n\in \mathbf{Z}_0$,恒成立:

(1)$U_n(\text{ch }\theta)=[\text{sh }(n+1)\theta]/\text{sh }\theta,\theta\in \mathbf{R}$ 且 $\theta\neq 0$. (11)

(2)$U_{n+2}(\text{ch }\theta)=U_n(\text{ch }\theta)+2\varphi_n(\mathrm{e}^{\theta}),\theta\in \mathbf{R}$. (12)

(3)$U_{n+1}(\text{ch }(2\theta))+U_n(\text{ch }(2\theta))=\psi_{2n+3}(\mathrm{e}^{\theta}),\theta\in \mathbf{R}$ 且 $\theta\neq 0$. (13)

证明 由式(8) ~ (9),取 $\mathrm{e}^{\theta}=y,\text{ch }\theta=(\mathrm{e}^{\theta}+\mathrm{e}^{-\theta})/2=\varphi(\mathrm{e}^{\theta}),\theta\in \mathbf{R}$ 可得.

定理 3 对 $n\in \mathbf{Z}_0$,恒成立:

(1)$U_n(\sin\alpha)=[\cos((n+1)\alpha-(n\pi/2))]/\cos\alpha,\alpha\in \mathbf{R},\alpha\neq k\pi+(\pi/2),k\in \mathbf{Z}$. (14)

(2)$T_n(\sin\alpha)=\cos(n(\alpha-(\pi/2))),\alpha\in \mathbf{R}$. (15)

证明 (1) 由式(5),作变换 $\alpha=(\pi/2)-\theta$,若 $2\mid n,U_n(\sin\alpha)=(-1)^{n/2}[\cos(n+1)\alpha]/\cos\alpha$,若 $2\nmid n,U_n(\sin\alpha)=(-1)^{(n-1)/2}[\sin(n+1)\alpha]/\cos\alpha$,此即式(14). 同理得式(15).

定理 4 对 $n\in \mathbf{Z}_0,\theta\in \mathbf{R}$,且 $\theta\neq k\pi,k\in \mathbf{Z}$,恒成立:

(1)$U_n(1/\sin\theta)=\psi_{n+1}(\tan(\theta/2))$. (16)

(2)$T_n(1/\sin\theta)=\varphi_n(\tan(\theta/2))$. (17)

证明 由 $1/\sin\theta=\varphi(\tan(\theta/2))$ 及式(8) 得(16). 式(17) 同理可得.

定理 5 对 $n\in \mathbf{Z}_0,\alpha\in \mathbf{R}$,且 $\alpha\neq k\pi+(\pi/2),k\in \mathbf{Z}$,恒成立:

(1)$U_n(1/\cos\alpha)=\psi_{n+1}(\tan((\pi/4)-(\alpha/2)))$. (18)

(2)$T_n(1/\cos\alpha)=\varphi_n(\tan((\pi/4)-(\alpha/2)))$. (19)

证明 由式(16),作变换 $\alpha=(\pi/2)-\theta$ 即得式(18). 式(19) 同理可得.

三、第二类切比雪夫型基本方程

1. 第二类切比雪夫型基本方程

定义 3 设 $m,n\in \mathbf{Z}_0,n>m$,在 $\mathbf{C}$ 内解方程

$$U_n(x)=U_m(x) \tag{20}$$

称为第二类切比雪夫型基本方程.

定理 6 方程(20) 全体复根是 $\cos\theta_k,\theta_k=2k\pi/(n-m)$ 或$(2k+1)\pi/(n+m+2),k\in \mathbf{Z},0<\theta_k<\pi$. 详述为:当 $n-m=2r+1$ 时,全体复根为单根 $\cos(2p\pi/(2r+1))(p\in Z(1,r))$ 及 $\cos((2q+1)\pi/(2m+2r+3))(q\in Z(0,m+r))$. 当 $n-m=2r$ 时,全体复根为 $\cos(p\pi/r)(p\in Z(1,r-1))$ 及 $\cos((2q+1)\pi/(2(m+r+1)))(q\in Z(0,m+r))$(若 r 是奇数,则在 $\mathbf{C}$ 内基本方程的根都是单根;若 r 是偶数,s 为 r 的偶约数,当 $n\equiv m\equiv((s/2)-1)\bmod s$ 时基本方程有二重根$(2k-1)\pi/s,k\in Z(1,s/2)$).

证明 令 $x=\cos\theta$,由式(20) 及(5) 有$(n+1)\theta=(m+1)\theta+2k\pi$ 或$(n+1)\theta=(2k+1)\pi-(m+1)\theta$ 且 $\sin\theta\neq 0$,得 $\theta=2k\pi/(n-m)$ 或$(2k+1)\pi/(n+m+2),k\in \mathbf{Z},0<\theta<\pi$. 当 $n-m=2r+1$ 时,若 $\theta=2p\pi/(n-m)$,得 $0<p<r+(1/2)$,故 $\theta=2p\pi/(2r+1)(p\in Z(1,r))$. 若 $\theta=(2q+1)\pi/(n+m+2)$,得 $-1/2<q<m+r+1$,故 $\theta=(2q+1)\pi/(2m+2r+3)(q\in Z(0,m+r))$. 当 $n-m=2r$ 时,若 $\theta=$

$2p\pi/(n-m)$，得 $0<p<r$，故 $\theta=p\pi/r(p\in Z(1,r-1))$. 若 $\theta=(2q+1)\pi/(n+m+2)$，得 $-1/2<q<r+m+(1/2)$，故 $\theta=(2q+1)\pi/[2(m+r+1)](q\in Z(0,m+r))$.

推论 1 设 $n\in\mathbf{N}^+$，第二类切比雪夫型基本方程 $U_n(x)=U_{n-1}(x)$ 的全体复根是单根 $\cos\theta_k$，$\theta_k=(2k+1)\pi/(2n+1)$，$k\in Z(0,n-1)$.

推论 2 设 $n\in\mathbf{N}^+$，$n\geqslant 2$，第二类切比雪夫型基本方程 $U_n(x)=U_{n-2}(x)$ 的全体复根是单根 $\cos\theta_k$，$\theta_k=(2k+1)\pi/(2n)$，$k\in Z(0,n-1)$.

推论 3 设 $n\in\mathbf{N}^+$，第二类切比雪夫型基本方程 $U_n(x)=1$ 的全体复根是单根 $\cos\theta_k$，$\theta_k=2k\pi/n(k\in Z(1,[(n-1)/2]))$ 或 $\theta_k=(2k+1)\pi/(n+2)(k\in Z(0,[n/2]))$.

例 1 $U_4(x)-U_2(x)$ 是 $U_6(x)-U_0(x)$，$U_5(x)-U_1(x)$ 的最大公因式；$U_4(x)-U_3(x)$ 是 $U_7(x)-U_0(x)$，$U_6(x)-U_1(x)$，$U_5(x)-U_2(x)$ 的最大公因式；$U_5(x)-U_4(x)$ 是 $U_9(x)-U_0(x)$，$U_8(x)-U_1(x)$，$U_7(x)-U_2(x)$，$U_6(x)-U_3(x)$ 的最大公因式.

2. 第二类切比雪夫型基本方程的重根

定义 4 设 $m,n\in\mathbf{Z}_0$，$n>m$，$x=\cos\theta$，$\theta\in\mathbf{R}$，当 $n-m=2r+1$ 时，称在 $\mathbf{C}$ 内方程(20) 的根 $\cos(2p\pi/(2r+1))(p\in Z(1,r))$ 为奇偶系列，$\cos((2q+1)\pi/(2m+2r+3))(q\in Z(0,m+r))$ 为双奇系列；当 $n-m=2r$ 时在 $\mathbf{C}$ 内方程(20) 的根 $\cos(p\pi/r)(p\in Z(1,r-1))$ 为双偶系列，$\cos((2q+1)\pi/(2(m+r+1)))(q\in Z(0,m+r))$ 为偶奇系列.

定理 7 $m,n\in\mathbf{Z}_0$，$n>m$，$x=\cos\theta$，当 $n-m=2r+1$ 时，奇偶系列与双奇系列相同值是二重根，其余为单根. 当 $n-m=2r$ 时，双偶系列与偶奇系列相同值是二重根，其余为单根.

证明 若 $n-m=2r+1$，因余弦函数在 $(0,\pi)$ 上单调，显然奇偶系列中 r 个根互异，双奇系列中 $m+r+1$ 个根互异. 因 $U_n(x)-U_m(x)$ 在 $\mathbf{C}$ 中是至多 n 次多项式，故至多有 n 个根[3]，显然这 n 个根即为奇偶系列和双奇系列中的 n 个根，故设

$$U_n(x)-U_m(x)=af_1(x)f_2(x)=a(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)$$

其中，$f_1(x)=(x-x'_1)(x-x'_2)\cdots(x-x'_r)$，$x'_1,x'_2,\cdots,x'_r$ 为奇偶系列的 r 个互异的根，$f_2(x)=(x-x''_0)(x-x''_1)\cdots(x-x''_{m+r})$，$x''_0,x''_1,\cdots,x''_{m+r}$ 双奇系列的 $m+r+1$ 个互异的根，故若方程(20) 有重根，只能为二重根 $x_i=x_j$，其中一根 $x_i\in\{x'_1,x'_2,\cdots,x'_r\}$，另一根 $x_j\in\{x''_0,x''_1,\cdots,x''_{m+r}\}$. 当 $n-m=2r$ 时同理可证.

定理 8 设 $m,n\in\mathbf{Z}_0$，$n>m$，$x=\cos\theta$，$\theta\in\mathbf{R}$，当 $n-m=2r+1$ 为奇数时，在 $\mathbf{C}$ 内方程(20) 的根都是单根.

证明 当 $n-m=2r+1$ 时，若方程(20) 有重根，则由定理 6 及定理 7 知

$$2p\pi/(2r+1)=(2q+1)\pi/(2m+2r+3)\quad p\in Z(1,r),q\in Z(0,m+r)$$

则 $p=(2q+1)(2r+1)/[2(2m+2r+3)]$，因 $2\nmid(2q+1)(2r+1)$，故 $p\notin\mathbf{N}^+$，矛盾，故 $n-m=2r+1$ 时方程(20) 的根都是单根.

定理 9 设 $m,n\in\mathbf{Z}_0$，$n>m$，$x=\cos\theta$，$\theta\in\mathbf{R}$，当 $n-m=2r$ 为偶数时，若 r 是奇数，则在 $\mathbf{C}$ 内方程(20) 的根都是单根.

证明 当 $n-m=2r$，若方程(20) 有重根，则由定理 6 及 7 知 $p\pi/r=(2q+1)\pi/[2(m+r+1)](p\in Z(1,r-1),q\in Z(0,m+r))$，则 $p=r(2q+1)/[2(m+r+1)]$，因 r 是奇数，$2\nmid r(2q+1)$，故 $p\notin\mathbf{N}^+$，矛盾，故 $n-m=2r$ 时，若 r 是奇数，方程(20) 的根都是单根.

定理 10 $m,n\in\mathbf{Z}_0$，$n>m$，$x=\cos\theta$，$\theta\in\mathbf{R}$，当 $n-m=2r$ 为偶数，若 r 是偶数，s 为 r 的偶约数，当 $n\equiv m\equiv((s-2)/2)\bmod s$，方程(20) 有二重根 $(2k-1)\pi/s$，$k\in Z(1,s/2)$.

证明 $n-m=2r$ 时，因 r,s 是偶数，不妨设 $s=2s_0$，$r=2r_0=2s_0v(v\in\mathbf{N}^+)$，若方程(20) 有二重根，则由定理 6,7 知 $p\pi/r=(2q+1)\pi/[2(m+r+1)](p\in Z(1,r-1),q\in Z(0,m+r))$，$p(m+r+1)=r_0(2q+$

1)，取 $n \equiv m \equiv ((s-1)/2) \bmod s$，设 $m = ts + (s/2) - 1, m, t \in \mathbf{Z}_0$，故 $p((2t+1)s + 4r_0) = 2r_0(2q+1)$，$ps_0(2t+2v+1) = r_0(2q+1)$，令 $2q+1 = (2k-1)(2t+2v+1), k \in \mathbf{N}^+$，即 $q = (2t+2v+1)k - v - t - 1 \in \mathbf{N}^+$，则 $p = r_0(2k-1)/s_0 = v(2k-1) \in \mathbf{N}^+$. 故存在 p, q 使方程(20)有二重根 $p\pi/r = (2k-1)\pi/s, k \in Z(1, s/2)$.

例 2 $m, n \in \mathbf{Z}_0$，当 $n - m = 24$ 时：若 $n \equiv m \equiv 0 \pmod 2$，方程(20)有二重根 0；若 $n \equiv m \equiv 1 \pmod 4$，方程(20)有二重根 $\pm\sqrt{2}/2$；若 $n \equiv m \equiv 2 \pmod 6$，方程(20)有二重根 $0, \pm\sqrt{3}/2$；若 $n \equiv m \equiv 5 \pmod{12}$，方程(20)有二重根 $\cos(k\pi/12), k = 1,3,5,7,9,11$.

参考文献

[1] 吴康，龙开奋. 关于切比雪夫多项式的一些研究[J]. 中学数学研究，2006(3)：27-30.
[2] 刘式适，刘式达. 特殊函数[M]. 北京：气象出版社，2002.
[3] 张禾瑞，郝鈵新. 高等代数[M]. 北京：高等教育出版社，1999.

作者简介

李静洁，女，汉族，1988 年出生，广东汕头人，理学学士.

吴康，男，汉族，1957 年出生，广东高州人，理学硕士，华南师范大学副教授，主要研究方向：组合数学，初等数论，竞赛数学.

一个混和平均的 Schur 凸性

孙文彩

（深圳市平冈中学，广东　深圳　518116）

摘　要：讨论了一个混和平均在 $\mathbf{R}_{++}^2$ 上的 Schur 凸性，进而建立了一些新的不等式.

关键词：混和平均　Schur 凸性　不等式

一、引　言

$\forall a,b\in\mathbf{R}^+(a\neq b)$，分别记 A,G,H,M,I,L 分别为算术平均，几何平均，调和平均，平方平均，指数平均与对数平均

$$A=A(a,b):=\frac{a+b}{2} \tag{1}$$

$$G=G(a,b):=\sqrt{ab} \tag{2}$$

$$H=H(a,b):=\frac{2ab}{a+b} \tag{3}$$

$$M=M(a,b):=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \tag{4}$$

$$I=I(a,b)=\left(\frac{a^r+b^r}{2}\right)^{\frac{1}{r}}$$

$$L=L(a,b):=\frac{a-b}{\ln a-\ln b} \tag{5}$$

本文讨论了一个混和平均 $\dfrac{L^p+M^p}{G}$ 在 $\mathbf{R}_{++}^2$ 上的 Schur 凸性，进而建立了一个新的不等式链.

二、定义和引理

为证明我们的主要结论，需要如下定义和引理.

定义 1[4]　设 $\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_n)$，$\boldsymbol{y}=(y_1,\cdots,y_n)\in\mathbf{R}^n$.

(1) 若 $\sum\limits_{i=1}^{k}x_{[i]}\leqslant\sum\limits_{i=1}^{k}y_{[i]}$，$k=1,2,\cdots,n-1$，且 $\sum\limits_{i=1}^{n}x_i=\sum\limits_{i=1}^{n}y_i$，则称 $\boldsymbol{x}$ 被 $\boldsymbol{y}$ 所控制，记作 $\boldsymbol{x}\prec\boldsymbol{y}$，其中 $x_{[1]}\geqslant x_{[2]}\geqslant\cdots\geqslant x_{[n]}$ 和 $y_{[1]}\geqslant y_{[2]}\geqslant\cdots\geqslant y_{[n]}$ 分别是 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 的递减重排.

(2) 设 $\Omega\subset\mathbf{R}^n$，若对于任何 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbf{R}^n$，总有 $(\alpha x_1+\beta y_1,\cdots,\alpha x_n+\beta y_n)\in\Omega$，则称 Ω 是凸集，其中 $\alpha,\beta\in[0,1]$ 且 $\alpha+\beta=1$.

(3) 设 $\Omega\subset\mathbf{R}^n$，$\varphi:\Omega\to\mathbf{R}$，若在 Ω 上 $\boldsymbol{x}\prec\boldsymbol{y}\Rightarrow\varphi(x)\leqslant\varphi(y)$，则称 φ 为 Ω 上的 Schur 凸函数；若 $-\varphi$ 是 Ω 上 Schur 凸函数，则称 φ 为 Ω 上 Schur 凹函数.

定义 2[5]　设 $\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_n)$，$\boldsymbol{y}=(y_1,\cdots,y_n)\in\mathbf{R}_{++}^n=\{(x_1,\cdots,x_n)\mid x_i>0,i=1,\cdots,n\}$.

(1) 设 $\Omega\subset\mathbf{R}_{++}^n$，若对于任何 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\Omega$，总有 $(x_1^\alpha y_1^\beta,\cdots,x_n^\alpha y_n^\beta)\in\Omega$，则称 Ω 是几何凸集，其中 $\alpha,\beta\in[0,1]$ 且 $\alpha+\beta=1$.

(2) 设 $\Omega\subset\mathbf{R}_{++}^n$，$f:\Omega\to\mathbf{R}_+$，对于任意 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\Omega$，若 $\ln\boldsymbol{x}\prec\ln\boldsymbol{y}$ 有 $\varphi(\boldsymbol{x})\leqslant\varphi(\boldsymbol{y})$，则称 φ 为 Ω 上的 Schur 几何凸函数；若 $-\varphi$ 是 Ω 上 Schur 几何凸函数，则称 φ 为 Ω 上 Schur 几何凹函数.