大學叢書

統計學

下册

陳超塵編著

臺灣商務印書館發行

大學叢書

統　計　學

下册

陳超塵編著

臺灣商務印書館發行

〇七五一一

中華民國七十三年十二月二十六版

大學叢書 統計學 下冊

精裝本基本定價五元二角正
平裝本基本定價四元二角正

編著者 陳超塵

發行人 朱建民

印刷及發行所 臺灣商務印書館股份有限公司
臺北市重慶南路一段三十七號

登記證：局版臺業字第〇八三六號

統　計　學

下　册

目　　次

第十四章　機率與常態分配

第十五章　樣本統計量分配

第十六章 統計推定

第十七章 統計假設之檢定

第十八章　逐次分析法

第十九章　變異數與互變數分析

第二十章　品質管制

第二十一章　無母數統計方法

第二十二章　抽樣調查方法

附　表

第十四章　機率與常態分配
(Probability and Normal Distribution)

一、機　　率

前在第一章說明統計學術發展史時，即已提及近代統計學（即抽樣統計學）係建立於機率論之基礎上，故在討論各種抽樣統計方法之前，應先說明機率之意義與性質。

14–1　**機率之定義**——出現事象 A 之機率爲出現事象 A 之次數與出現各種事象(Event)總次數之比。其定義式如下：

$$P(A)=\frac{r}{n} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{（公式 1）}$$

式中 $P(A)$ 代表出現事象 A 之機率。

例如擲骰子一粒，其出現奇數點之機率爲何？一粒骰子有六面，有六種不同的點數，故出現各種事象之總次數爲 6，亦即 $n=6$。在六種不同的點數中，有三種點數，即 1、3 及 5 爲奇數點，故出現奇數點即事象 A 之次數爲 3，亦即 $r=3$。故擲一粒骰子其出現奇數點之機率爲：

$$P(A)=\frac{r}{n}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

14–2　**機率之基本性質**——有下列四種：

(1)　倘一事象 A 必定出現，其機率爲 1，即

$$P(A)=\frac{r}{n}=\frac{n}{n}=1$$

例一袋內有黑球五個，任抽一球其爲黑色之機率爲何？五個球中每一球皆可能被抽，故有五種抽法，亦即總次數 $n=5$。五球皆爲黑色，均屬於事象 A，故 $r=5$。因此任抽一球爲黑色之機率爲：

$$P(A)=\frac{r}{n}=\frac{5}{5}=1$$

(2) 倘一事象 A 必不能出現，其機率爲 0，即

$$P(A)=\frac{r}{n}=\frac{0}{n}=0$$

例如在前袋中，任抽一球爲白色之機率爲何？因袋中無白球，各球均不屬於事象 A，故 $r=0$，因此任抽一球爲白色之機率爲：

$$P(A)=\frac{r}{n}=\frac{0}{5}=0$$

(3) 故知機率之所在範圍爲：

$0\leqq P\leqq 1$

(4) 發生 A 之機率與發生非 A 之機率之和爲 1。發生非 A 之機率爲：

$$P(\overline{A})=\frac{n-r}{n}$$

式中 $\overline{A}$ 代表事象非 A。

故 $P(A)+P(\overline{A})=\frac{r}{n}+\frac{n-r}{n}=\frac{n}{n}=1$

普通稱發生 A 之機率爲成功的機率，以 p 表示之。發生非 A 之機率爲失敗的機率，以 q 表示之。故上述關係式亦可寫成下列形式：

$p+q=1$ ……………………………………（公式 2）

例如擲骰子一粒，出現奇數點之機率與出現偶數點之機率之和爲 1。假定奇數點爲事象 A，偶數點爲非 A，則

$$P(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

$$P(\overline{A})=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

$$\therefore\quad P(A)+P(\overline{A})=\frac{3}{6}+\frac{3}{6}=1$$

14-3　**先天機率與經驗機率** (Priori probability and empirical probability)——先天機率即根據事物本性推理而得之機率。譬如一枚銅元有正反兩面，其出現正面之機率，不待實驗即可推知其爲 $\frac{1}{2}$。所謂經驗機率即根據實際現象歸納衆多次數而得之機率。例如某縣某年內共出生嬰兒 6437 人，其中男嬰爲 3275 人，故該縣男嬰出生之機率爲：

$$P=\frac{3275}{6437}=0.51$$

此種機率即爲經驗的機率。反之如根據生物學之知識推斷，出生男嬰之機率應與女嬰相等，即各爲 $\frac{1}{2}$，則此種機率爲先天的機率。

當觀察次數十分衆多時，經驗的機率已非常接近於先天的機率，而觀察次數愈多，則愈接近於先天的機率，此一原理在統計學上稱之爲大數法則。根據此原理在先天機率無法推知的情況下，可以依衆多次數歸納而得之經驗機率，以代替先天機率而從事種種研究分析，此種情形在社會現象研究上尤所常見。

14-4　**事象之種類**——可分爲下列兩大類：

(1)　互斥事象與非互斥事象——倘一事象出現後他事象即不能出現時，則此類事象稱之爲互斥事象 (Mutually exclusive events)。例如擲骰子一粒，出現一點後其他各點即不能出現，故知骰子各面的出現爲互斥事象。倘一事象出現後他事象亦能同時出現時，則此類事象

稱之爲非互斥事象。例如在一副橋牌中，出現黑桃是一種事象，出現老 K 是另一種事象，該兩事象可以同時出現，即一張牌是黑桃老 K，故黑桃與老 K 爲非互斥事象。

(2) 獨立事象與從屬事象——倘一種事象出現後不影響他一事象出現之機率時，則該兩事象稱之爲獨立事象(Independent events)。例如一袋內有白球兩個、黑球三個，抽取一球爲白色之機率爲 $P=\frac{2}{5}$，此爲第一事象。今將抽出之白球仍投返袋內，再抽一球仍爲白色之機率亦仍爲 $P=\frac{2}{5}$，此爲第二事象。第一事象出現後，因其將抽出之球仍投返袋內，故並不影響第二事象出現之機率，因此該兩事象爲獨立事象。倘一事象出現後影響他一事象出現之機率時，則該兩事象稱之爲從屬事象(Dependent events)。上例中倘第一次抽出之白球不投返袋內，則第二次抽取一球爲白色之機率改爲 $P=\frac{1}{4}$，而非 $\frac{2}{5}$，故知第一事象之出現影響第二事象出現之機率，因此該兩事象爲從屬事象。

此間有一點値得注意者，即互斥事象與非互斥事象均發生於簡單事件中，而獨立事象與從屬事象均發生於複雜事件中。所謂簡單事件即一個個體試行一次之事件，例如一粒骰子擲一次即爲簡單事件。所謂複雜事件即一個個體試行數次或數個個體試行一次之事件，例如一粒骰子連擲兩次或兩粒骰子擲一次均爲複雜事件。計算簡單事件與複雜事件發生之機率所用之定理不同，此將在下兩節中說明之。

14-5 **機率之加法定理**——用以計算簡單事件發生之機率，其公式因事象互斥與否而略有差異，茲分別說明如下：

(1) 互斥事象——倘兩事象 A 與 B 爲互斥事象，則在同一次試行中發生 A 或 B 之機率爲該兩事象分別發生機率之和，即

$$P(A+B)=P(A)+P(B) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(公式 3)}$$

式中 $P(A+B)$ 代表出現事象 A 或事象 B 之機率。例如擲一粒骰子，出現一點或兩點之機率爲何？假定出現一點爲事象 A，出現兩點爲事象 B，骰子出現一點後，即不能出現兩點，故知該兩事象爲互斥事象，因此擲一粒骰子出現一點或兩點之機率爲出現一點之機率與出現兩點之機率之和，即

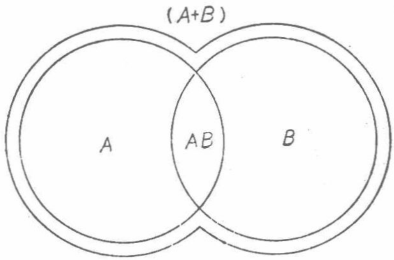
$$P(A+B)=P(A)+P(B)=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$$

(2) 非互斥事象——倘兩事象 A 與 B 爲非互斥事象，則在同一次試行中發生 A 或 B 之機率爲該兩事象分別發生機率之和，減去該兩事象同時發生之機率，即

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(\text{公式 } 4)$$

式中 $P(AB)$ 代表 A、B 兩事象同時發生之機率。

圖 14-1　機率之和或積的圖解說明



由上圖知，$P(A)$ 相當於 A 圓之面積，$P(B)$ 相當於 B 圓之面積，$P(AB)$ 相當於 AB 重合部份之面積，$P(A+B)$ 相當於 A 及 B 所覆蓋之總面積。故知 $P(A+B)$ 之面積爲 $P(A)$ 及 $P(B)$ 兩面積之和，減去一個 $P(AB)$ 之面積，因 $P(AB)$ 在 $P(A)$ 及 $P(B)$ 中重複計算兩次，故應減去一個。

例如在一副橋牌中任抽一張爲黑桃或老 K 之機率爲何？假定出現黑桃爲事象 A，出現老 K 爲事象 B，則任抽一張爲黑桃或老 K 之機

率爲出現黑桃之機率與出現老 K 之機率之和，減去黑桃與老 K 同時出現之機率，即

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$
$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{13}-\frac{1}{52}=\frac{16}{52}$$

14-6　**機率之乘法定理**——用以計算複雜事件發生之機率，其公式因事象獨立與否而略有差異，茲分別說明如下：

(1)　獨立事象——倘兩事象 A 與 B 爲獨立事象，則在兩次試行中，A 與 B 同時發生之機率爲發生 A 之機率與發 B 之機率之相乘積，即

$$P(AB)=P(A)P(B) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(\text{公式 5})$$

例如擲銅元兩枚，同時出現正面之機率爲何？假定第一枚銅元出現正面爲事象 A，第二枚銅元出現正面爲事象 B，第一枚銅元出現正面不影響第二枚銅元出現正面，故知該兩事象爲獨立事象。因此擲兩枚銅元，同時出現正面之機率爲第一枚銅元出現正面之機率乘上第二枚銅元出現正面之機率之積，即

$$P(AB)=P(A)P(B)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

(2)　從屬事象——倘兩事象 A 與 B 爲從屬事象，則在兩次試行中，A 與 B 同時發生之機率爲發生 A 之機率與發生 A 後再發生 B 之機率之相乘積，或爲發生 B 之機率與發生 B 後再發生 A 之機率之相乘積，即

$$P(AB)=P(A)P(B\mid A)$$
$$=P(B)P(A\mid B) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(\text{公式 6})$$

式中 $P(B\mid A)$ 代表發生事象 A 後再發生事象 B 之機率，$P(A\mid B)$

代表發生事象 B 後再發生事象 A 之機率。

例如一袋內有白球兩個、黑球三個，抽取兩球同爲白色之機率爲何？兩球同時抽取，事實上即等於抽取第一球後，不予投返，再抽第二球。假定第一球爲白色時爲事象 A，第二球爲白色時爲事象 B，第一球抽出後不再投返，影響第二球出現之機率，故知該兩事象爲從屬事象。第一球爲白色之機率爲 $P(A)=\frac{2}{5}$，抽取一個白球後，不予投返，故袋內僅餘一個白球及三個黑球，因此抽取第二球仍爲白色之機率改爲 $P(B|A)=\frac{1}{4}$，故抽取兩球同爲白色之機率爲：

$$P(AB)=P(A)P(B|A)=\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{10}$$

14–7　**解決機率問題之步驟**——綜合以上所述，吾人可歸納出下列兩個解決機率問題之步驟：

第一步：先檢查該機率問題係屬於簡單事件抑屬於複雜事件，如爲簡單事件用加法定理，如爲複雜事件用乘法定理。

第二步：決定用加法定理或乘法定理後，在加法定理方面，再檢查該一簡單事件係屬於互斥事象抑屬於非互斥事象，如爲互斥事象用公式 3，如爲非互斥事象用公式 4。在乘法定理方面，再檢查該一複雜事件係屬於獨立事象抑屬於從屬事象，如爲獨立事象用公式 5，如爲從屬事象用公式 6。

事實上多數機率問題常分爲兩個階段，其第一個階段多屬於複雜事件，應用乘法定理；其第二個階段多屬於簡單事件，應用加法定理，將第一個階段各機率之積相加起來，本章問題中之第三題即屬一例。解決此種機率問題之方法首將問題分成兩個階段，再按上述解決機率問題之步驟決定各階段所需應用之公式即可。

二、希望數與變異數

14-8 **希望數 (Expectation) 之意義**——設一變數各不同變量之出現爲互斥事象，且各變量發生機率之總和爲一，則該變數之希望數爲該變數各變量與其發生機率乘積之和。設X變數各變量爲：

$$X_1, X_2, \cdots\cdots, X_i, \cdots\cdots, X_n$$

各變量爲互斥事象，其發生之機率分別爲：

$$p_1, p_2, \cdots\cdots, p_i, \cdots\cdots, p_n$$

且 $p_1+p_2+\cdots\cdots+p_i+\cdots\cdots+p_n=1$

則X變數之希望數爲：

$$E(X)=p_1X_1+p_2X_2+\cdots\cdots+p_iX_i+\cdots\cdots+p_nX_n$$

$$=\sum_{i=1}^{n}p_iX_i=\sum pX \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{（公式 7）}$$

式中$E(X)$代表變數爲X之希望數。

例如某人擲骰子一粒，規定如出現一點即贏得一元，兩點贏兩元，餘依次類推，則此人擲骰子一次平均可望贏得幾元？骰子每面出現之機率爲$\frac{1}{6}$，故贏得一元之機率爲$\frac{1}{6}$，贏得兩元之機率亦爲$\frac{1}{6}$，餘依此類推，故此人擲骰子一次平均可望贏得：

$$E(X)=\sum pX=p_1X_1+p_2X_2+p_3X_3+p_4X_4+p_5X_5+p_6X_6$$

$$=\frac{1}{6}\times1+\frac{1}{6}\times2+\frac{1}{6}\times3+\frac{1}{6}\times4+\frac{1}{6}\times5+\frac{1}{6}\times6$$

$$=3.5\text{ 元}$$

此人擲骰子一次，其實際贏得之數可能超過 3.5 元，亦可能低於 3.5 元，但從機率觀點言之，此人平均可望贏得 3.5，故 3.5 元爲此人擲骰子一次可能贏款之希望數。

一變量出現之次數與其觀察總次數之比爲該變量出現之經驗機率。前述當觀察次數十分衆多時，則經驗機率即頗接近於先天機率，故當觀察次數相當巨大時，該變數之算術平均數即爲該變數之希望數，其證明如下：

設X變數各變量出現之次數分別爲：

$$f_1, f_2, \cdots\cdots, f_i, \cdots\cdots, f_n$$

其總次數　$N=f_1+f_2+\cdots\cdots+f_i+\cdots\cdots+f_n$

當　$N\to\infty$ 時

$$\mu=\frac{1}{N}(f_1X_1+f_2X_2+\cdots\cdots+f_iX_i+\cdots\cdots+f_nX_n)$$

$$=\frac{f_1}{N}X_1+\frac{f_2}{N}X_2+\cdots\cdots+\frac{f_i}{N}X_i+\cdots\cdots+\frac{f_n}{N}X_n$$

$$=p_1X_1+p_2X_2+\cdots\cdots+p_iX_i+\cdots\cdots+p_nX_n$$

$$=E(X)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(\text{公式 }8)$$

式中μ爲當觀察次數 $N\to\infty$ 時之算術平均數，當 $N\to\infty$ 時，實際次數分配即趨近於理論次數分配，故μ亦稱之爲理論上的算術平均數。

由此可知，希望數與算術平均數之意義甚爲相似，僅希望數含有機率之概念，成爲平均可望出現之數。

14-9　**希望數之性質**——主要者有下列四種：

(1)　$E(b)=b\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(\text{公式 }9)$

式中b爲常數，此式意爲任何常數之希望數仍爲該常數，其證明如下：

$$E(b)=p_1b+p_2b+\cdots\cdots+p_ib+\cdots\cdots+p_nb$$

$$=b(p_1+p_2+\cdots\cdots+p_i+\cdots\cdots+p_n)$$

$$=b$$