高等学校"十二五"规划教材·计算机软件工程系列

Discrete Mathematics

离散数学

◎主　编　王义和

配有电子课件

重视基础性和理论性/体现先进性和应用性/强调直观性和启发性

培养抽象思维和逻辑推理能力/提高分析问题和解决问题能力

哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

高等学校“十二五”规划教材·计算机软件工程系列

离散数学

王义和　主　编
张淑丽　姜守旭　副主编

哈爾濱工業大學出版社

内容简介

本书内容包括四部分:集合论、图论、近世代数和数理逻辑,共13章。第一部分集合论,包括集合及其运算、映射、关系、无穷集合及其基数;第二部分图论,包括图的基本概念、树、平面图和图的着色、有向图;第三部分近世代数,包括群、环与域、格与布尔代数;第四部分数理逻辑,包括命题逻辑和谓词逻辑。每节后都配有习题。

本书可作为普通高等学校软件工程、计算机等相关专业的教材,也可供从事计算机工作的有关人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

离散数学/王义和主编. —哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2012.3

高等学校"十二五"规划教材·计算机软件工程系列

ISBN 978-7-5603-3486-8

Ⅰ.①离… Ⅱ.①王… Ⅲ.①离散数学—高等学校—教材 Ⅳ.①O158

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 012499 号

策划编辑 王桂芝 赵文斌
责任编辑 王桂芝
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社　　址 哈尔滨市南岗区复华四道街10号 邮编 150006
传　　真 0451-86414749
网　　址 http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷 黑龙江省地质测绘印制中心印刷厂
开　　本 787mm×1092mm 1/16 印张 12.25 字数 300千字
版　　次 2012年3月第1版 2012年3月第1次印刷
书　　号 ISBN 978-7-5603-3486-8
定　　价 28.00元

高等学校“十二五”规划教材

计 算 机 软 件 工 程 系 列

◎序

Foreword

随着计算机软件工程的发展和社会对计算机软件工程人才需求的增长，软件工程专业的培养目标更加明确，特色更加突出。目前，国内多数高校软件工程专业的培养目标是以需求为导向，注重培养学生掌握软件工程基本理论、专业知识和基本技能，具备运用先进的工程化方法、技术和工具从事软件系统分析、设计、开发、维护和管理等工作能力，以及具备参与工程项目的实践能力、团队协作能力、技术创新能力和市场开拓能力，具有发展成软件行业高层次工程技术和企业管理人才的潜力，使学生成为适应社会市场经济和信息产业发展需要的“工程实用型”人才。

本系列教材针对软件工程专业“突出学生的软件开发能力和软件工程素质，培养从事软件项目开发和管理的高级工程技术人才”的培养目标，集 9 家软件学院（软件工程专业）的优秀作者和强势课程，本着“立足基础，注重实践应用；科学统筹，突出创新特色”的原则，精心策划编写。具体特色如下：

1. 紧密结合企业需求，多校优秀作者联合编写

本系列教材在充分进行企业需求、学生需要、教师授课方便等多方市场调研的基础上，采取校企适度联合编写的做法，根据目前企业的普遍需要，结合在校学生的实际学习情况，校企作者共同研讨、确定课程的安排和相关教材内容，力求使学生在校学习过程中就能熟悉和掌握科学研究及工程实践中需要的理论知识和实践技能，以便适应就业及创业的需要，满足国家对软件工程人才的需要。

2. 多门课程系统规划，注重培养学生工程素质

本系列教材精心策划，从计算机基础课程→软件工程基础与主干课程→设计与实践课程，系统规划，统一编写。既考虑到每门课程的相对独立性、基础知识的完整性，又兼顾到相关课程之间的横向联系，避免知识点的简单重复，力求形成科学、完整的知识体系。

本系列教材中的《离散数学》、《数据库系统原理》、《算法设计与分析》等基础教材在引入概念和理论时，尽量使其贴近社会现实及软件工程等学科的技术和应用，力图将基本知识与软件工程学科的实际问题结合起来，在具备直观性的同时强调启发性，让学生理解所学的知

识。《软件工程导论》、《软件体系结构》、《软件质量保证与测试技术》、《软件项目管理》等软件工程主干课程以《软件工程导论》为线索，各课程间相辅相成，互相照应，系统地介绍了软件工程的整个学习过程。《数据结构应用设计》、《编译原理设计与实践》、《操作系统设计与实践》、《数据库系统设计与实践》等实践类教材以实验为主题，坚持理论内容以必需和够用为度，实验内容以新颖、实用为原则编写。通过一系列实验，培养学生的探究问题、分析问题的能力，激发学生的学习兴趣，充分调动学生的非智力因素，提高学生的实践能力。

相信本系列教材的出版，对于培养软件工程人才、推动我国计算机软件工程事业的发展将起到积极作用。

2011 年 7 月

◎前言

Preface

离散数学是普通高等学校计算机专业和软件工程专业等相关专业的一门基础课程。离散数学课程的内容是以研究离散量的结构和相互间的关系为主要目标，其研究对象一般是有限或可数个元素，因此它充分描述了计算机科学离散性的特点。离散数学与数据结构、操作系统、编译理论、算法分析、逻辑设计、系统结构等课程紧密联系，因此，在国内外的教材中，取材各异，侧重不同。为了适应大众化高等教育阶段应用型软件人才的培养，我们根据近年来的教学实践，编写了这本普通高等学校计算机和软件工程等相关专业适用的离散数学教材。

本书内容既强调了基础性和理论性，又体现了先进性和应用性，在满足计算机和软件工程等相关专业对数学知识需求的基础上，培养学生的抽象思维和逻辑推理能力。因此，本书在引入概念和理论时会将其背景交代清楚，尽量使其贴近社会现实及计算机和软件工程等学科的技术和应用，力图将基本知识与计算机和软件工程学科的实际问题结合起来，在具备直观性的同时强调启发性，既能让学生易于理解所学的知识，又能让其具备创新意识和开拓精神。

本书充分尊重学生学习过程的认知规律，循序渐进，深入浅出，强调实用，本着精简、高效的原则，紧紧围绕计算机和软件工程等相关专业的需求，提高课程内容的知识集成度，选择在后继课程中直接用到的那些数学概念和方法等有关内容，以及一些对培养学生逻辑思维和抽象能力特别有益的内容，旨在使学生学会特定的一些数学事实并知道怎样应用，学会数学思维和解决应用问题的方法。本书文字精练、简明，但不失严谨。

本书的主要内容包括集合论、图论、近世代数和数理逻辑 4 个部分，共 13 章。集合论部分包括集合及其运算、映射、关系、无穷集合及其基数；图论部分包括图的基本概念、树、平面图与图的着色、有向图；近世代数部分包括群、环与域、格与布尔代数；数理逻辑部分包括命题逻辑和谓词逻辑。每节后都配有难度不同的习题以供读者练习之用。本书突出特点是：以集合论为基础，具有高度的抽象性和推理的严密性。

本书第 1～11 章主要内容基于《离散数学引论》(王义和编著)，根据对学生的培养要求，进行了删减和重新组织，第 12～13 章为新补充内容。本书由哈尔滨工业大学王义和教授任主编，哈尔滨理工大学张淑丽、哈尔滨工业大学姜守旭任副主编，全书由张淑丽统稿，王义和最后审定。具体编写分工如下：第 1～4 章由王义和编写，第 5～8 章由姜守旭编写，第 9～13 章由张淑丽编写。

由于作者水平有限，书中难免存在一些疏漏和不当之处，敬请读者批评指正。

编　者

2012 年 1 月

◎目录

Contents

第一部分　集合论

第二部分 图 论

第三部分 近世代数

第四部分　数理逻辑

第一部分　集合论

集合论的起源可以追溯到16世纪末期。开始时是为了追寻微积分的坚实的基础，人们仅进行了有关数集的研究。集合论是德国数学家康托(G. Cantor)于1874年创立的，他发表了一系列有关集合论的文章，对任意元素的集合进行了深入的探讨，提出了关于基数、序数和良序集等理论，奠定了集合论的深厚基础。

随着集合论的发展，以及关于它与数学、哲学密切联系所做的讨论，于1900年前后，出现了布拉利福蒂(Burali-Forti)悖论、康托悖论和罗素(B. Russell)悖论等各种悖论，使集合论的发展一度陷入僵滞的局面。

1904～1908年，策墨罗(E. Zermelo)提出了第一个集合论的公理系统，他的公理使数学哲学中产生的一些矛盾基本得到统一。在此基础上，逐步形成了公理化集合论和抽象集合论，使该学科成为在数学中发展最为迅速的一个分支。集合论在数学中占有一个独特的地位，它的基本概念已渗透到数学的所有领域。

而今，集合论是现代数学的基础，在计算机科学中具有十分广泛的应用，计算机科学领域中的大多数基本概念和理论，几乎都用集合论的有关术语来描述和论证。

集合论是研究集合的数学理论，在朴素集合论中，集合是被当作一堆物件构成的整体之类的原始概念。在公理化集合论中，集合和集合中的元素并不直接被定义，而是先规范可以描述其性质的一些公理。由此，集合和集合中的元素是有如欧氏几何中的点和线，而不被直接定义。

本部分讲述朴素集合论，主要内容包括集合及其运算、映射、关系、无穷集合的基数。其中，集合及其运算是基础，映射和关系是重点，无穷集合的基数是难点。

第 1 章

集合及其运算

本章首先讨论集合论的基本概念，包括集合及其元素、元素与集合之间的属于关系，以及集合的表示方法。然后，定义子集、幂集以及集合相等，接着定义并、交、差、对称差、补集、笛卡儿积等集合间的运算，并阐述各运算的性质及相互联系。最后，介绍有穷集合的基数与基本计数法则。

1.1 集合的概念

“集合”是集合论中最原始的概念，以至于无法用更原始的概念来定义它。因此，我们只能给出这个概念的非形式描述，用于说明这个概念的含义。

通常将一些互不相同的、确定的对象的全体称为集合，简称集。这些对象作为集合的成员，称为集合的元素。常用大写字母表示集合，用小写字母表示元素。

集合的元素，既可以是具体的事物，也可以是抽象的概念。例如，某教室里的所有学生构成的整体是一个集合，所有整数构成的整体也是一个集合。集合的元素是可区分的，因此任一元素，对于一个给定的集合，或者这个元素是该集合的一个元素，或者这个元素不是该集合的一个元素，二者必居其一，且仅居其一。于是，一个元素 a 对于一个集合 A，若 a 是 A 中的一个元素，则称 a 属于 A，记为 $a \in A$；否则，若 a 不是 A 中的一个元素，则称 a 不属于 A，记为 $a \notin A$ 或 $a \overline{\in} A$。集合、元素、属于关系就是集合论中的三个原始概念。

例 1.1 设 $\mathbf{I}$ 为整数集，则 $-5 \in \mathbf{I}, 2^8 \in \mathbf{I}, 8.6 \notin \mathbf{I}, \sqrt{2} \notin \mathbf{I}$。

我们常用两种方法表示集合。第一种方法是将集合的元素逐一枚举出来，元素之间用逗号“,”加以间隔，并用一对括号“{ }”括起来，这称为枚举法表示，或列举法表示。

例 1.2 由三个自然数 1,2,3 构成的集合表示为 $\{1,2,3\}$。

在集合的概念中要求构成集合的元素必须是互不相同的，而与它们在集合中的出现次序无关，因此，集合中的每个元素只能出现一次，至于各元素的出现次序是无关紧要的。于是 $\{1,2,3\}$ 和 $\{2,3,1\}$ 表示同一集合。

一般来说，集合的元素个数较少时，枚举法表示最为有效。对元素个数较多的集合，原则上这种方法是可行的，但实际上很难将其元素全部列举出来。不过借助于有关知识，只需列举出集合的几个元素就可知道集合的所有元素。

例 1.3 小写英文字母之集可表示为 $\{a,b,c,\cdots,x,y,z\}$。

其中"…"不是集合的元素，它用来代表那些未列出的但已为我们所知的小写英文字母。使用这种方法，还可描述无穷多个元素构成的集合。例如，全体正整数之集为$\{1,2,3,\cdots\}$。

使用枚举法表示集合比较直观，集合中有哪些元素一目了然，但是这种方法的表达能力是有限的。有些集合很难或不能用这种方法表示，例如区间$[0,1]$上所有实数构成的集合就不能用这种方法表示。为此引入集合的另一种表示法，用集合中元素的共同性质来刻画集合，这称为性质描述法。设 x 为某类对象的一般表示，$P(x)$ 为关于 x 的一个命题，则用

$$\{x \mid P(x)\} \text{ 或 } \{x : P(x)\}$$

表示具有性质 P 的那些元素构成的集合。

例 1.4 偶数集合可表示为 $E=\{x \mid x \in \mathbf{I} \text{ 且 } 2 \mid x\}$，其中 $2 \mid x$ 表示 2 能整除 x，$\mathbf{I}$ 为整数集。

例 1.5 区间$[0,1]$上所有连续函数之集表示为 $F=\{f(x) \mid f(x)\text{是}[0,1]\text{上的连续函数}\}$。

使用性质描述法表示集合比较方便，通过这种方法我们能够知道更多信息。

集合中的元素个数可以是有限的，也可以是无穷的。由有限个元素构成的集合称为有限集合，或有穷集合，由无穷多个元素构成的集合称为无穷集合。集合 A 的元素个数记为 $|A|$。

有穷集合的一个特例是仅含有一个元素的集合，称为单元素集。例如，方程 $x^2-2x+1=0$ 的所有实根构成的集合$\{x \mid x^2-2x+1=0, x \in \mathbf{R}\}$就是单元素集$\{1\}$，其中 $\mathbf{R}$ 为实数集。

不含任何元素的集合称为空集，记为 $\varnothing$，于是，$\varnothing=\{\}$。例如，方程 $x^2+1=0$ 的所有实根构成的集合$\{x \mid x^2+1=0, x \in \mathbf{R}\}$就是空集。我们假定空集是存在的。

包含所考虑的目标内的所有元素的集合称为全集，常记为 U。对于全集要注意两点：一是"全"不是绝对的，而是相对的；二是全集常省略其表示。

习　　题

1. 用枚举法表示下列集合。

(1) 小于 20 的质数之集；

(2) 构成单词 evening 的英文字母的集合；

(3) $x^2+x-6=0$ 的实根之集；

(4) x^6-1 的整系数因式之集。

2. 用性质描述法表示下列集合。

(1) $\{1,2,3,\cdots,79\}$；

(2) 能被 5 整除的整数之集；

(3) 直角坐标系中，单位圆内(不包括单位圆上)的点集；

(4) 实数域中所有一元一次方程之集。

1.2　集合之间的关系

我们已经给出了“集合”、“元素”、元素与集合间“属于”关系这三个原始概念，本节利用这三个概念定义集合与集合的包含关系、集合相等、幂集和集族的概念。

定义 1.1　设 A 和 B 是两个集合，如果 A 的每一个元素都是 B 的元素，则称 A 是 B 的子集，或 A 包含于 B，或 B 包含 A，记为 $A\subseteq B$，或 $B\supseteq A$。于是

$$A\subseteq B\Leftrightarrow \forall x\in A\text{ 有 }x\in B$$

对于给定的两个集合 A 和 B，可能 $A\subseteq B$ 或 $B\subseteq A$，也可能两者均不成立。若 A 不是 B 的子集，则记为 $A\not\subseteq B$。于是 $A\not\subseteq B\Leftrightarrow\exists x\in A$ 使得 $x\notin B$。

例 1.6　$A=\{1,2,3\}$，$B=\{1,2\}$，$C=\{1,4\}$，则 $B\subseteq A$，$C\not\subseteq A$，$A\not\subseteq C$。

设 A,B,C 是集合，显然有

(1) $A\subseteq A$。

(2) 若 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq C$，则 $A\subseteq C$。

定义 1.2　设 A 和 B 是两个集合，如果 $A\subseteq B$，但 B 中至少有一个元素不属于 A，则称 A 是 B 的真子集，或 A 真包含于 B，或 B 真包含 A，记为 $A\subset B$，或 $B\supset A$。于是

$$A\subset B\Leftrightarrow\forall x\in A\text{ 有 }x\in B\text{ 但 }\exists x\in B\text{ 使得 }x\notin A。$$

例 1.7　设 $\mathbf{N}=\{0,1,2,\cdots\}$ 为自然数集，$\mathbf{I}$ 为整数集，$\mathbf{Q}$ 为有理数集，$\mathbf{R}$ 为实数集，$\mathbf{C}$ 为复数集，$\mathbf{I}_+$ 为正整数集，则 $\mathbf{I}_+\subset\mathbf{N}\subset\mathbf{I}\subset\mathbf{Q}\subset\mathbf{R}\subset\mathbf{C}$。

定义 1.3　设 A 和 B 是两个集合，如果 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$，则称 A 与 B 相等，记为 $A=B$。

两个集合相等意味着两个集合由完全相同的元素组成，但是并不意味着它们是用同样的方法表示的。若 A 与 B 是两个不相等的集合，就记为 $A\neq B$。显然有

$$A=B\Leftrightarrow A\subseteq B\text{ 且 }B\subseteq A$$

$$A\subset B\Leftrightarrow A\subseteq B\text{ 且 }A\neq B$$

例 1.8　设 $A=\{1,2\}$，$B=\{x\mid x^2-3x+2=0\}$，则 $A=B$。

集合相等的定义本身提供了证明两个集合相等的最基本的方法，就是证明两个集合互为子集，即证明每一个集合的任一元素均是另一集合的元素，这种证明应是依靠逻辑推理，而不是依靠直观。

定理 1.1　空集是任一集合的子集，且空集是唯一的。

证　首先用反证法证明空集是任一集合的子集。

假设存在一个集合 A，使得 $\varnothing\subseteq A$ 为假，即 $\varnothing\not\subseteq A$，则至少存在一个元素 $x\in\varnothing$ 但 $x\notin A$，这与空集的定义矛盾，所以 $\varnothing\subseteq A$，空集是任意集合的子集。

最后证明空集是唯一的。设 $\varnothing_1,\varnothing_2$ 都是空集，则 $\varnothing_1\subseteq\varnothing_2$，$\varnothing_2\subseteq\varnothing_1$，由集合相等的定义得 $\varnothing_1=\varnothing_2$，所以空集是唯一的。　**证毕**

由于集合是一些事物的总体，因此对于集合的元素没有什么限制，它既可以是具体的事物，也可以是抽象的概念。于是集合中的元素也可能是集合，例如，$A=\{1,2,\{1,3\},$

$\{4,5\}\}$，$B=\{\{a\},\{b\},\{a,b,c,d\}\}$。

定义 1.4 以集合为元素的集合称为集族。

例如，在学校中，每个班级的学生构成一个集合，而全校的所有班级就构成了一个集族。

定义 1.5 集合 A 的全部子集构成的集族称为 A 的幂集，记为 2^A 或 $\mathscr{P}(A)$。于是

$$2^A=\{X \mid X\subseteq A\}。$$

例 1.9 设 $A=\{1,2,3\}$，则 $2^A=\{\varnothing,\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}\}$，$2^{\varnothing}=\{\varnothing\}$。

注意区分 $\varnothing$ 和 $\{\varnothing\}$，$\varnothing$ 是空集，而 $\{\varnothing\}$ 是一个集族，这个集族只有一个元素，就是空集，因此 $\varnothing\neq\{\varnothing\}$，但是 $\varnothing\in\{\varnothing\}$ 且 $\varnothing\subseteq\{\varnothing\}$。

设 A 是一个集合，$X\subseteq A$。若 $|X|=k$，则说 X 是 A 的一个 k-子集。若 $|A|=n$，则 A 共有 C_n^k 个 k-子集。

若有穷集合 A 有 n 个元素，则 A 有 2^n 个子集，那么 2^A 中就有 2^n 个元素，这也是将幂集记为 2^A 的原因。

习　　题

1. 对任意集合 A 和 B，判断下列各命题的真假。

(1) $\varnothing\in A$；　(2) $\varnothing\subseteq A$；　(3) $A\in\{A\}$；　(4) $A\in A$；

(5) $A\subseteq\{A\}$；　(6) $A\subseteq A$；　(7) $\varnothing\in 2^A$；　(8) $\varnothing\subseteq 2^A$；

(9) $A\in 2^A$；　(10) $A\subseteq 2^A$；　(11) $\varnothing=\{\varnothing\}$；　(12) $A=\{A\}$。

2. 对任意集合 A,B,C，判断下列各命题的真假。

(1) 若 $A\in B$ 且 $B\subseteq C$，则 $A\in C$；

(2) 若 $A\in B$ 且 $B\subseteq C$，则 $A\subseteq C$；

(3) 若 $A\subseteq B$ 且 $B\in C$，则 $A\in C$；

(4) 若 $A\subseteq B$ 且 $B\in C$，则 $A\subseteq C$。

3. 判断满足下列条件的集合是否存在？证明你的结论。

(1) $A\in B$ 且 $A\subset B$；

(2) $A\in B$ 且 $A\in 2^B$；

(3) $\varnothing\in A$ 且 $\varnothing\subseteq A$；

(4) $A\in B$ 且 $B\in C$ 且 $A\in C$。

4. 判断下列哪些集合是相等的。

(1) $A=\{x \mid x^2-1=15$ 且 $x^3=1, x\in\mathbf{I}\}$；

(2) $B=\{x \mid x^2-6x+8=0, x\in\mathbf{I}\}$；

(3) $D=\{2x \mid x\in\mathbf{I}\}$；

(4) $F=\{x \mid x^2+1=0\}$；

(5) $G=\{2,4\}$；

(6) $H=\{0,2,-2,4,-4,6,-6,\cdots\}$。

5. 求下列各集合的幂集。

(1) $\varnothing$；　(2) $\{\varnothing\}$；　(3) $\{\varnothing,a\}$；　(4) $\{a,b,\{a,c\}\}$。

1.3　集合的运算

本节介绍集合的并、交、差等运算，并给出它们满足的运算规律。通过运算可以由已知集合得到新的集合，而且由于运算满足某些运算规律，从而能够简化公式，甚至能够简化科学结论的逻辑结构。

定义 1.6　设 A 与 B 是任意两个集合，由至少属于集合 A 与集合 B 之一的一切元素构成的集合称为 A 与 B 的并集，记为 $A\cup B$，即

$$A\cup B=\{x\mid x\in A \text{ 或 } x\in B\}$$

例 1.10　$A=\{a,b,c,d\}$，$B=\{a,c,e,f,g\}$，则 $A\cup B=\{a,b,c,d,e,f,g\}$。

例 1.11　设 A 是所有能被 k 整除的整数的集合，B 是所有能被 l 整除的整数的集合，$A\cup B$ 是所有能被 k 或 l 整除的整数的集合。

定理 1.2　设 A,B,C 为任意集合，则

(1) 交换律成立：$A\cup B=B\cup A$；

(2) 结合律成立：$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$；

(3) 幂等律成立：$A\cup A=A$；

(4) $\varnothing\cup A=A$；

(5) $A\cup B=B\Leftrightarrow A\subseteq B$。

证　根据定义 1.6 即可得到性质(1)，(3)，(4)，(5)。

下面证明性质(2)：

对于 $\forall x\in(A\cup B)\cup C$，根据定义 1.6 有 $x\in A\cup B$ 或 $x\in C$。

当 $x\in A\cup B$ 时，$x\in A$ 或 $x\in B$，可得 $x\in A$ 或 $x\in B\cup C$，从而 $x\in A\cup(B\cup C)$；当 $x\in C$ 时，$x\in B\cup C$，从而 $x\in A\cup(B\cup C)$。

于是 $(A\cup B)\cup C\subseteq A\cup(B\cup C)$。

反之，对于 $\forall x\in A\cup(B\cup C)$，根据定义 1.6 有 $x\in A$ 或 $x\in B\cup C$。

当 $x\in A$ 时，$x\in A\cup B$，从而 $x\in(A\cup B)\cup C$；当 $x\in B\cup C$ 时，$x\in B$ 或 $x\in C$，可得 $x\in A\cup B$ 或 $x\in C$，从而 $x\in(A\cup B)\cup C$。

于是 $A\cup(B\cup C)\subseteq(A\cup B)\cup C$。

由集合相等的定义得

$$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$$

证毕

由性质(2)可知，$A\cup B\cup C$ 是有意义的。

类似地，可以定义多个集合 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的并集为

$$A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n=\bigcup_{i=1}^{n}A_i=\{x\mid x\in A_i,1\leqslant i\leqslant n\}$$

集合的无穷序列 $A_1,A_2,A_3,\cdots$ 的并集记为