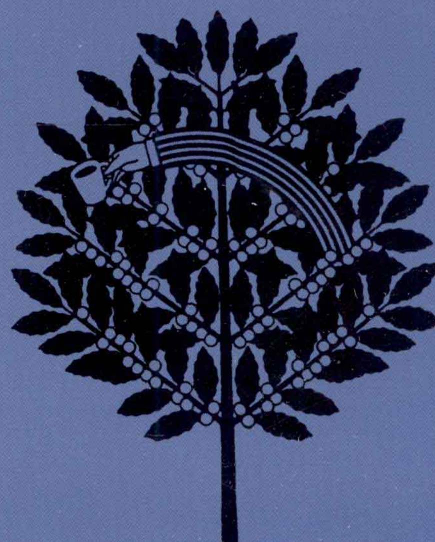
杜玉林 著

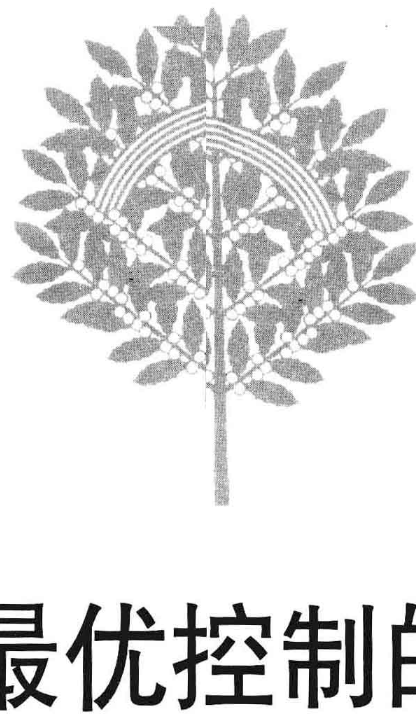
华东政法大学金融学重点学科建设成果



基于最优控制的金融衍生品定价模型研究

复旦大学出版社

杜玉林 著



基于最优控制的金融衍生品定价模型研究

復旦大學出版社

图书在版编目(CIP)数据

基于最优控制的金融衍生品定价模型研究/杜玉林著. —上海:复旦大学出版社,2011.12
(华东政法大学金融学重点学科建设成果)
ISBN 978-7-309-08659-1

Ⅰ. 基… Ⅱ. 杜… Ⅲ. 最佳控制-金融衍生产品-定价模型-研究 Ⅳ. F830.9

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 266923 号

基于最优控制的金融衍生品定价模型研究
杜玉林 著
责任编辑/张永彬 岑品杰

复旦大学出版社有限公司出版发行
上海市国权路 579 号 邮编:200433
网址:fupnet@fudanpress.com http://www.fudanpress.com
门市零售:86-21-65642857 团体订购:86-21-65118853
外埠邮购:86-21-65109143
常熟市华顺印刷有限公司

开本 787×960 1/16 印张 10 字数 118 千
2011 年 12 月第 1 版第 1 次印刷

ISBN 978-7-309-08659-1/F · 1791
定价: 25.00 元

目 录

第一章　引　言

第一节　研究的背景和意义

一、选题的由来

对固定收益证券的定价和对冲主要有两种经典的方法：一种是收益率曲线方法，另外一种是随机利率模型的方法。前者假设固定收益证券的利率函数是常值函数或是已知的，通过贴现理论求出固定收益证券的价格，这种方法适用于一些比较简单的或者线性产品，不适合于比较复杂的金融衍生品定价；后者则设利率变化可以归结为某些随机因素的变化，得到一些著名的利率模型，适合于非线性的合约或者具有选择性条款的合约，这种方法得到的定价模型中含有很多参数，这些参数难以测量与预知，而且利率变化能否归结为布朗运动也是一个值得探讨的问题。Epstein 和 Wilmott 提供了另外一种角度考虑利率模型以及固定收益证券定价的问题，他们对利率变量作尽可能少的假设，设利率变化以及利率的变化率分别在一个区间中，通过考察价格的微分，利用 Taylor 展开和无套利原理推导出了 Epstein-Wilmott 模型，该模型在固定收益证券定价中有一定的作用，能够计算出固定收益证券最好最坏情形下的价格，但该模型中含有一个非线性的偏微分方程。

Black-Scholes 公式是期权定价中的基础,能够得到欧式看涨看跌期权的解析解,金融衍生品定价的基石。但 Black-Scholes 公式是建立在一定假设基础上的,比如假设无风险利率、波动率为常数,不考虑交易成本,与现实市场不相符合。在这些情形下考虑未定权益的定价问题,得到的定价模型中往往包含有非线性的偏微分方程。例如,Hoggard *et al*. (1992)在 Leland(1985)的基础上考虑了有交易成本的期权定价问题,利用 Taylor 展开和无套利原理得到了带有交易成本的期权定价模型;Avellaneda(1996)对于固定波动率假设进行了改进,假设原生资产波动率在一个区间中变动,得到的不确定波动率模型也是非线性偏微分方程;Meyer(2006)在 Avellaneda(1996)的基础上得到了更加复杂的非线性偏微分方程。

虽然这些非线性模型比较难以讨论,但由于这些模型考虑的问题与现实市场更加接近,将成为资产定价模型中的一个热点,具有一定的理论和现实意义。对于非线性偏微分方程的讨论没有普遍有效的方法,因此作者将从这些非线性偏微分方程所讨论的金融问题入手,寻找对应的最优控制问题,分别建立最优控制框架,利用最优控制理论推动这些非线性偏微分方程的研究和应用。

二、选题的理论和现实意义

从理论意义来讲,关于线性偏微分方程的解法有比较成熟的理论,讨论起来相对比较简单,但是对于非线性偏微分方程没有普遍有效的解法,本书利用最优控制理论来讨论非线性偏微分方程,从而提供了一个讨论非线性偏微分方程的方法和角度,利用最优控制框架分析了这些非线性模型解的适定性,并提供了求解的方法,因此具有较强的理论意义。

从现实意义来讲,这些非线性模型的最大意义在于其假设具有现

实性，更加接近现实，因此得到的结论较有参考意义。这些模型得到的结果一般都是一个价格区间，这种价格区间经过最优静态对冲缩小到适当程度后将为固定收益证券投资和期权投资提供一些比较有意义的结论和数据，例如收益率包络曲线，以及提供市场上识别套利机会和风险控制的方法等，因此研究这些非线性偏微分方程模型有较强的现实意义。

第二节 金融衍生品定价中的若干非线性偏微分方程

Black-Scholes 公式之所以能够被实务界和理论界广为接受，除了具有丰富的金融含义以外，还因为模型的线性性和简洁性，可以归结为热传导方程，数学中有比较成熟的理论，很容易得到欧式看涨和看跌期权价格的解析解。但是，该模型的假设与现实情形存在一定的差异，例如不考虑交易成本、固定波动率假设等，因此有必要对这些假设进行改进。在这些改进的过程中，得到的金融衍生品定价模型往往会含有非线性的偏微分方程；除此之外，在固定收益证券定价问题中也会遇到一些非线性的偏微分方程。由于这些方程的假设具有一定的意义，容易满足市场条件，从而这些模型得到的结果具有一定的参考价值，因此有必要研究这些非线性的偏微分方程。

（一）Black-Scholes 框架下的二阶非线性偏微分方程

利用无套利原理和风险中性原理，得到的 Black-Scholes 公式为：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial V}{\partial t}+\dfrac{1}{2}\sigma^2 S^2\dfrac{\partial^2 V}{\partial S^2}+rS\dfrac{\partial V}{\partial S}-rV=0\\ V(S,\ T)=h(S,\ T)\end{cases}$$

从数学意义上来讲，这是一个线性的二阶抛物型方程，通过一些

变化可以归结为热传导方程，能够求出欧式看涨和看跌期权价格的解析解。但这个方程是建立在下列几个假设基础之上的（金德环，2007）：

（1）原生资产的价格是服从对数正态分布的，也就是漂移项波动率是常数；

（2）允许卖空标的证券，市场不存在套利机会；

（3）在衍生品有效期内，标的证券没有现金收益支付；

（4）没有交易成本和税收，所有证券都是完全可分的；

（5）证券交易是连续的，价格变动也是连续的；

（6）在衍生品有效期内，无风险收益函数是常数。

但是这些假设并不一定能够成立，比如假设无风险利率和波动率为常数、不考虑交易成本等，因此有必要对这些假设进行一定的改进。Hoggard *et al.*（1992）在 Leland（1985）的基础上考虑了有交易成本的期权定价问题，Avellaneda（1995，1996）、Meyer（2006）对常数波动率和常数无风险利率也进行了改进，这些改进得到的未定权益定价模型都含有非线性的偏微分方程。由于这些方程都是基于 Black-Scholes 公式得到的，再加上本书对它们的处理方法有一定的类似性，因此通称为 Black-Scholes 公式框架下的非线性偏微分方程，下面作简单的介绍。

（1）针对 Black-Scholes 公式中不考虑交易成本的情形，Leland（1985）作了一定的改进，因为期权在对冲的过程中，需要通过交易来调整原生资产的数量，因此要买卖原生资产，必须考虑交易成本。他认为不管每一个时间间隔是否是最优，都要进行 Delta 对冲，同时假设交易成本是交易金额的一个比例，得出的期权模型与 Black-Scholes 模型差不多，只要将 Black-Scholes 模型中设为常数的波动率进行修改，修改后多头看涨期权的波动率调整为：

$$\hat{\sigma}=\sigma\left(1-\sqrt{\frac{8}{\pi\delta t}}\,\frac{\kappa}{\sigma}\right)^{1/2}$$

对于空头看涨期权,修改后的波动率为:

$$\breve{\sigma}=\sigma\left(1+\sqrt{\frac{8}{\pi\delta t}}\,\frac{\kappa}{\sigma}\right)^{1/2}$$

其中 κ 为比例。Leland 模型虽然考虑了交易成本,但比较简单,对于欧式期权这种 Gamma 值不变的产品还比较适用,但对于 Gamma 值变化的未定权益则不适用。

Hoggard *et al*. (1992)在 Leland(1985)基础上,利用无套利原理和 Taylor 展开,得到的考虑交易成本的期权定价模型为:

$$\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma^2S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}-k\sigma S^2\sqrt{\frac{2}{\pi\delta t}}\left|\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right|+rS\frac{\partial V}{\partial S}=rV$$

其中 k 为交易费率。这是一个非线性偏微分方程,与 Black-Scholes 公式的形式类似,只是因为引入了交易成本后,在考虑问题的整个过程中,都要保证交易成本是正值,从而在方程中有绝对值符号,使得定价方程是非线性的。

在推导 Black-Scholes 公式时,利用 Delta 对冲掉所有的风险,因此 Black-Scholes 公式是在风险中性假设下得到的。引入了交易成本以后,Delta 对冲不能对冲掉所有的风险,而是剩余了一部分风险,假设与 Gamma 值成比例:

$$k\sigma S^2\sqrt{\frac{2}{\pi\delta t}}\left|\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right|$$

这个比例在下一次 Delta 对冲时要加以考虑,从而加入交易成本的 Delta 对冲就比较复杂了。

从方程的形式可以看出,Leland(1985)的结果是 Hoggard *et al*.

(1992)的特殊情形。对于单个看涨或者看跌期权,其 Gamma 值都为正,通过变形可以得到其 Black-Scholes 模型对应的波动率,这与 Leland(1985)得到的结果类似。但是,这个模型还可以用来处理 Gamma 值不是单符号的期权组合的定价问题。在 Hoggard *et al.* (1992)中也考虑了不同交易成本类型下的模型。

在国内,许少敏等(2002)证明了当边界条件是凸函数时,上述非线性方程可以化为一般的线性模型。

(2) 针对 Black-Scholes 模型中假设一些参数如波动率、无风险利率、股利率等是常数, 特别是固定波动率常数的假设,很多学者作了改进。例如,随机波动率模型将波动率看作一个状态变量,服从某个随机过程,得到了许多著名的随机波动率过程并得到很好的结果。有时候为了方便,取原生资产一定期限的历史价格来推测波动率,股价波动率一般会低于期权的波动率。还有一种是用广义自回归条件异方差(GARCH)模型来对波动率进行预测和模拟,GARCH 模型的种类较多,常用的是 GARCH(1,1)模型。这些模型得到的结果往往是一个值,因此可以看作是对波动率的一种点估计。基于此, Avellaneda *et al.* (1995,1996)对波动率的选取作了一些假设,认为虽然不能预测出其将来原生资产波动率的值,但是可以根据历史波动率的情况或者实际情况来设定波动率在一个区间中变动,在此假设下考虑未定权益的定价问题。由于这种情形得到期权的一个价格区间,因此可以认为是对期权价格的一种区间估计。当然,由于不是从传统意义的角度求价格区间上限和下限,因此这里的期权价格区间估计没有给出置信水平,只是一种形式上的区间估计。Avellaneda *et al.* (1995)在假设原生资产价格的波动率在区间[σ^-,σ^+]中波动时,期权以及其投资组合价格的最小值 V^-, 或者说是最坏情形下的价格应满足如下含有非线性偏微分方程的终值问题:

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial V^-}{\partial t}+\dfrac{1}{2}\sigma(\Gamma)^2S^2\,\dfrac{\partial^2V^-}{\partial S^2}+rS\,\dfrac{\partial V^-}{\partial S}-rV^-=0\\
\Gamma=\dfrac{\partial^2V^-}{\partial S^2},\ \sigma(\Gamma)=\begin{cases}\sigma^+ & \Gamma<0\\ \sigma^- & \Gamma>0\end{cases}\\
V^-(S,\ T)=h(T)
\end{cases}
$$

同理可以得到最好情形下即期权以及期权组合价格的最大值 V^+ 的终值问题：

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial V^+}{\partial t}+\dfrac{1}{2}\sigma(\Gamma)^2S^2\,\dfrac{\partial^2V^+}{\partial S^2}+rS\,\dfrac{\partial V^{+-}}{\partial S}-rV^+=0\\
\Gamma=\dfrac{\partial^2V^+}{\partial S^2},\ \sigma(\Gamma)=\begin{cases}\sigma^+ & \Gamma>0\\ \sigma^- & \Gamma<0\end{cases}\\
V^+(S,\ T)=h(T)
\end{cases}
$$

利用偏微分方程理论中的极大极小值原理可以得到：如果真实波动率在[σ^-, σ^+]中，那么目标合约的价格应该在[V^-, V^+]内。假设市场上合约的价格落在上下限组成区间的外面，则可以认为有套利的存在。这种价格区间有一定的优点，但是如果这样算出来的合约价格差很大，将削弱模型的意义。Avellaneda *et al*.（1996）介绍了最优静态对冲的方法，根据模型的非线性性，利用与目标期权合约现金流相似的合约作为对冲工具，可以使得价格区间的长度缩小到一定的范围，而且随着对冲工具合约数目的增加，对冲的效果将逐步优化。但是由于定价方程的非线性，目标合约的价格有赖于对冲工具合约的选取，所以要慎重选取对冲工具合约。

类似地，Avellaneda *et al*.（1995）也单独考虑了无风险利率在一个区间

$$
r^-\leqslant r\leqslant r^+
$$

变化时，期权及其投资组合合约最坏情形价格 V^- 应该满足如下终值问题：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial V^-}{\partial t}+\dfrac{1}{2}\sigma^2 S^2\dfrac{\partial^2 V^-}{\partial S^2}+r(\Pi)\Big(S\dfrac{\partial V^-}{\partial S}-V^-\Big)=0\\ \Pi=V^- - S\dfrac{\partial V^-}{\partial S},\ r(\Pi)=\begin{cases}r^+ & \Pi>0\\ r^- & \Pi<0\end{cases}\\ V^-(S,\ T)=h(T)\end{cases}$$

最好情形下价格 V^+ 满足的终值问题为：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial V^+}{\partial t}+\dfrac{1}{2}\sigma^2 S^2\dfrac{\partial^2 V^+}{\partial S^2}+r(\Pi)\Big(S\dfrac{\partial V^+}{\partial S}-V^+\Big)=0\\ \Pi=V^+ - S\dfrac{\partial V^+}{\partial S},\ r(\Pi)=\begin{cases}r^+ & \Pi<0\\ r^- & \Pi>0\end{cases}\\ V^+(S,\ T)=h(T)\end{cases}$$

Avellaneda(1996)也考虑了股利在一个区间中的定价方程，得到最坏情形 V^- 下的定价公式为：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial V^-}{\partial t}+\dfrac{1}{2}\sigma^2 S^2\dfrac{\partial^2 V^-}{\partial S^2}+r\Big(S\dfrac{\partial V^-}{\partial S}-V^-\Big)-D(\Delta)S\dfrac{\partial V^-}{\partial S}=0\\ D(C)=\begin{cases}D^+ & V>0\\ D^- & V<0\end{cases}\\ V^-(S,\ T)=h(T)\end{cases}$$

Avellaneda *et al.* (1996)、Lyons (1995)还讨论了美式期权与障碍期权的情况。这些结果是对 Black-Scholes 公式中的假设作了一些改进，使得更加贴近真实情况，有一定的现实意义，但是由于定价模型的非线性性，讨论起来比较麻烦同时也限制了模型的应用和推广。

(3) Meyer(2006)考虑了当波动率、无风险利率分别在一个区间中

变动时，期权以及期权组合的最大最小价格满足的终值问题。他从三个不同角度提出了等价的三个方程。下面是通过极大值原理得到的最坏情形即最小值 V^- 满足的终值问题：

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial V^-}{\partial t}+\dfrac{1}{2}\sigma_0(\Gamma)^2S^2\dfrac{\partial^2V^-}{\partial S^2}+r_0(\cdot)S\left(\dfrac{\partial V^-}{\partial S}-V^-\right)=0\\
\Gamma=\dfrac{\partial^2V^-}{\partial S^2},\sigma_0(\Gamma)=\begin{cases}\sigma^-(S,\ t) & \Gamma\geqslant 0\\ \sigma^+(S,\ t) & \Gamma<0\end{cases}\\
r_0(\cdot)=\begin{cases}r^-(S,\ t) & S\dfrac{\partial V^-}{\partial S}-V^-\geqslant 0\\ r^+(S,\ t) & S\dfrac{\partial V^-}{\partial S}-V^-<0\end{cases}\\
V^-(S,\ T)=h(T)
\end{cases}
$$

最好情形即最大价格 V^+ 满足的终值问题为：

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial V^-}{\partial t}+\dfrac{1}{2}\sigma_0(\Gamma)^2S^2\dfrac{\partial^2V^-}{\partial S^2}+r_0(\cdot)S\left(\dfrac{\partial V^-}{\partial S}-V^-\right)=0\\
\Gamma=\dfrac{\partial^2V^-}{\partial S^2},\sigma_0(\Gamma)=\begin{cases}\sigma^-(S,\ t) & \Gamma<0\\ \sigma^+(S,\ t) & \Gamma>0\end{cases}\\
r_0(\cdot)=\begin{cases}r^-(S,\ t) & S\dfrac{\partial V^-}{\partial S}-V^-<0\\ r^+(S,\ t) & S\dfrac{\partial V^-}{\partial S}-V^->0\end{cases}\\
V^-(S,\ T)=h(T)
\end{cases}
$$

这是一个更加复杂的非线性偏微分方程。Meyer(2006)还讨论了美式期权与障碍期权的对冲问题，得到了一些有用的结果。

(4) 法国学者 Brunel(2001)考虑了信用价差(Credit Spread)在一定的区间内的情形，利用同样的方法和原理，得到了信用衍生品价格最

大值和最小值所满足的终值问题,并讨论了一些基本的信用衍生品的定价问题。

由于得到这些模型的过程中的思路差不多,而且模型除了非线性部分外,线性部分与 Black-Scholes 公式相似,因此我们将这些模型称为可纳入 Black-Scholes 公式框架体系中的二阶非线性偏微分方程,虽然这些终值问题中含有非线性的偏微分方程,但是这些模型的假设更加现实,因此具有一定的研究价值。

(二)固定收益证券定价中的一阶非线性偏微分方程——Epstein-Wilmott 模型

对固定收益证券的定价和对冲主要有两种方法:一种是基于收益率的方法,另一种则利用随机利率模型来探讨。前者假设利率是常数,只是对于一些比较简单或者线性的产品比较适用;后者设利率变化可以归结为某些随机因素的变化,它适合于非线性的合约或者具有选择性条款的合约。

然而上述的模型都有缺陷:第一种收益率曲线的方法不适合于复杂金融产品的定价;第二种随机模型则有很多参数,这些参数难以测量和预知,而且很容易变化,计算出来的结果容易收到参数的影响,具有很大的模型风险。

Epstein 和 Wilmott 从另外一个角度来考虑关于利率模型的问题,他们对利率变量作尽可能少的假设(Wilmott,2004):

$$r^{-}\leqslant r\leqslant r^{+}\ (\text{假设利率限定在一个范围中})$$

以及

$$c^{-}\leqslant \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\leqslant c^{+}\ (\text{假设利率的变化率也限定在一个范围中})$$

利用 Taylor 展开和无套利原理,得到固定收益证券价格的最小值

V^- 也就是最坏情形下的定价方程：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V^-}{\partial t}+c\left(\dfrac{\partial V^-}{\partial r}\right)\dfrac{\partial V^-}{\partial r}-rV^-=0 \\ \text{其中：} c\left(\dfrac{\partial V^-}{\partial r}\right)=\begin{cases} c^+ & \dfrac{\partial V^-}{\partial r}<0 \\ c^- & \dfrac{\partial V^-}{\partial r}>0 \end{cases} \\ V^-(r,\ T)=h(r(T)) \end{cases}$$

同样道理，最大价格 V^+ 满足的终值问题为：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V^+}{\partial t}+c\left(\dfrac{\partial V^+}{\partial r}\right)\dfrac{\partial V^+}{\partial r}-rV^+=0 \\ \text{其中：} c\left(\dfrac{\partial V^+}{\partial r}\right)=\begin{cases} c^+ & \dfrac{\partial V^+}{\partial r}>0 \\ c^- & \dfrac{\partial V^+}{\partial r}<0 \end{cases} \\ V^+(r,\ T)=h(r(T)) \end{cases}$$

上面两个终值问题就统称为固定收益证券定价中的 Epstein-Wilmott 模型。

Hua and Wilmott(1997)对这个模型作了一定的扩充，考虑了利率有跳跃的模型。讨论了两种情形：一种是假定跳跃发生在某些特殊的时间点，另外一种则允许跳跃发生在无穷多的时间点上，得到了相应的非线性偏微分方程模型。

虽然 Epstein-Wilmott 模型中含有一个非线性偏微分方程，但是由于模型的假设更接近市场，模型的结果将比较符合实际市场，因此有一定的研究价值。

以上就是金融衍生品定价中经常遇到的非线性偏微分方程。当