高等医药院校教材

（供药学专业用）

# 高等数学

（下　册）

$\boxed{\text{黄志宏}}$　方积乾　　主编

人民卫生出版社

高等医药院校教材

（供药学专业用）

# 高 等 数 学

（下册）


黄志宏 方积乾 主编

高等数学编审小组

组长 黄志宏（沈阳药学院）方积乾 （北京医科大学）

王 珍 （上海医科大学）

姚金华 （北京医科大学）

刘定远 （华西医科大学）

李柏新 （中国药科大学）

宋学源 （沈阳药学院）



人 民 卫 生 出 版 社

**高 等 数 学**

（下册）

黄志宏　方积乾　主编

人民卫生出版社出版
（北京市崇文区天坛西里 10 号）
北京市卫顺排版厂印刷
新华书店北京发行所发行

787×1092毫米16开本　14$\frac{1}{2}$印张　336千字
1988年 5 月第 1 版　　1988年 5 月第 1 版第 1 次印刷
印数：00,001—3,600
ISBN 7-117-00568-8/R·569　定价：2.30元

# 序　言

近三十年，医药科学飞速发展，重要标志之一便是定量化程度的提高。以药物研究为例，用现代数学和物理学探讨药物构效关系，用电子计算机寻求合成路线，用数学模型揭示药物作用的原理，用系统理论描述药物在体内转运、分布和代谢的动态过程，用计算和模拟来指导临床用药和设计新型制剂，以及将电子计算机与高级分析设备联用，借助快速富里叶分析等数学工具进行波谱解析……这一切都要求新一代的医药学工作者具有良好的数理素质。

在高等医药教育中，高等数学是必修课，这已确定无疑。然而，单靠一门必修课不足以提高数理素质。国内一些医药院校已经陆续开设各式各样的小型选修课，吸引学生根据自身的特点和发展方向选学他们感兴趣的若干基础数学、生物数学和计算机方面的课程，不断接受数学的熏陶，掌握较多的数学工具，汲取数学的思维方法，这些可望转化为新一代医药学工作者创造性学习和研究的一种潜能。我们这本《高等数学》（下册）就是按选修课的规格来写的，内容包括三篇，相当于三门小课。第一篇是积分变换，这方面的知识在药物动力学、波谱解析等方面不可或缺，15～20学时可以完成；第二篇是线性代数，其中矩阵、特征值、特征向量和正交变换等如今已成为科技工作者必备的常识，35～40学时可以完成；第三篇是数值计算方法，其中数值微分和积分、方程的近似解、插值公式以及线性代数方面的计算都很实用，为医药学工作者能动地应用计算机解决本专业课题提供必要的手段，35～40学时亦可完成。

我们这个编写组是由中华人民共和国卫生部和国家医药管理局聘请组成的，来自五个医药院校。原组长黄志宏教授于1985年底主持《高等数学》(上册)合稿会议后不久因患肝癌突然逝世，这是我们编写组的莫大损失。在卫生部和国家医药管理局的关怀和人民卫生出版社的鞭策下，我们全组同志同舟共济，配合默契，《高等数学》（上册），《数理统计方法》和《高等数学》（下册）先后完稿，陆续付印，以不辜负全国医药院校同行的期待。但是，由于下册部份是首次编写，定有不少错误与漏洞，希望使用本教材的广大师生批评指正，帮助我们在不断修改中力求完善。

北京医科大学生物数学与生物统计学教研室的同事们曾为本书的出版付出劳动，章建红同志绘制了大部份插图，在此一并致谢。

# 目 录

# 第一篇　积 分 变 换

## 第一章　富里叶级数

在物理学中我们遇到过最简单的波是谐波(正弦波)，可用三角函数 $A\sin(\omega t+\varphi)$ 来表示．在电子学和工程技术中，我们会遇到其它的周期波，如矩形波，锯齿形波等．在医药学中，我们还会遇到更复杂的周期性波形，如心电图、脑电图等．它们可统一地用周期为$T$的函数 $f_T(t)$ 来表示．可否将这类周期函数看成是谐波的叠加呢？这就是本章要讨论的问题．

在不太苛刻的条件下，周期为$T$的函数 $f_T(t)$ 可以展开为富里叶（*Fourier*）级数

$$
\begin{aligned}
f_T(t) &= \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega t+b_n\sin n\omega t) \\
&= A_0+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin(n\omega t+\varphi_n) \qquad (1)
\end{aligned}
$$

在电子技术和频谱分析中，$t$ 表示时间，$A_0=a_0/2$ 称为直流分量，$A_n\sin(n\omega t+\varphi_n)$ 称为$n$次谐波 $n\omega$ 和 $\varphi_n=\mathrm{arctg}\,(a_n/b_n)$ 称为$n$次谐波的角频率和初位相，$A_n=\sqrt{a_n^2+b_n^2}$ 为相应的振幅．当 $n=1$ 时，$A_1\sin(\omega t+\varphi_1)$ 称为基波，$\omega$ 称为基频，将一个周期函数展开成富氏级数相当于将该函数的图形分解成无穷多个（可数）简单波形，除一个直流波形外，其它都是谐波．

### 第一节　三角函数系的正交性

类似于将函数展开成幂级数，我们将讨论如何将函数展开成富里叶级数以及展开之后的收敛问题．

在讨论上述问题以前，我们先介绍函数系的正交性．设由无穷多个不同函数构成的函数系　$f_1(x)$，$f_2(x)$，…，$f_n(x)$，…
在区间（$a$，$b$）上均有定义，如果其中任意两个不同函数的乘积在区间（$a$，$b$）上可积且积分等于零，而每个函数的平方在区间（$a$，$b$）上也可积且积分不等于零，则称这个函数系具有正交性，或称这个函数系为正交函数系．

现考虑三角函数系

$$1,\ \cos x,\ \sin x,\ \cos 2x,\ \sin 2x,\ \cdots,\ \cos nx,\ \sin nx,\cdots \qquad (2)$$

因为它们在 $[-\pi,\pi]$ 上均有定义，任意两个不同函数的乘积在 $[-\pi,\pi]$ 上的积分等于零，而每个函数的平方在 $[-\pi,\pi]$ 上的积分不等于零，所以它们具有正交性．读者不妨自行验证以下各式

3. $\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx dx = \int_{-\pi}^{\pi}\sin kx dx = 0$ (3)

4. $\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\sin lx dx = 0$ (4)

5. $\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\sin lx dx = 0$ (5)

6. $\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\cos lx dx = 0$ (6)

7. $\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 kx dx = \pi$ (7)

8. $\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 kx dx = \pi$ (8)

9. $\int_{-\pi}^{\pi}1^2 dx = 2\pi$ (9)

## 第二节　周期为$2\pi$ 的函数展开成富里叶级数

设函数 $f(x)$ 是周期为 $2\pi$ 的函数，我们先假设它能展开成下面的三角级数

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n \sin nx) \tag{10}$$

并假定它在 $[-\pi, \pi]$ 上能逐项积分，将(10)式两端积分，由(3)(9)可得

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2}dx + \sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi}(a_n\cos_n x + b_n\sin_n x)dx = a_0\pi,$$

即

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx. \tag{11}$$

再将(10)式两端乘以 $\cos kx$ 并逐次积分，由(3)(4)(6)(7)得

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kx dx = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2}\cos kx dx + \sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi}(a_n\cos nx\ \cos kx + b_n\sin nx\ \cos kx)$$

$$dx = \int_{-\pi}^{\pi}a_k\cos^2 kx dx = a_k\pi$$

即

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kx dx \tag{12}$$

类似地，将(10)式两端乘以 $\sin kx$，并逐项积分，由(3)(4)(5)(8)得

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin kx dx = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2}\sin kx dx +$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi}(a_n\cos nx\sin kx + b_n\sin\ nx\ \sin kx)dx$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi}bx\sin^2 kx dx = b_k\pi$$

即

$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin kx dx \tag{13}$$

在公式⑿中，若 $k=0$，便转化为公式⑾．公式⑿和⒀称为欧拉——富里叶公式．上面的结果虽然是在假定函数 $f(x)$ 能展开成三角级数的情形下得出的，但只要 $f(x)$ 在〔$-\pi$，$\pi$〕上可积，按公式⑿和⒀便可计算 $a_k$ 和 $b_k$，从而可作出三角级数

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),$$

$a_k$、$b_k$ 称为函数 $f(x)$ 的富里叶系数，上面的级数称为函数 $f(x)$ 的富里叶级数．但这样作出的富里叶级数不一定收敛，即使收敛也不一定收敛于 $f(x)$，因此一般记为

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx). \tag{14}$$

若一个函数的富里叶级数收敛于 $f(x)$，即⒁式两端相等，则称这函数能够被展开成富里叶级数．

下面我们要讨论在什么条件下函数 $f(x)$ 能被展开成富里叶级数．解决这个问题需要用到较多的数学理论知识，我们不加证明地给出一个收敛定理．

**定理1** 〔狄利克来（*Dirichlet*）定理〕

设周期为 $2\pi$ 的函数 $f(x)$ 在区间〔$-\pi$，$\pi$〕上连续或只有有限个第一类间断点，且在这个区间内只有有限个极大值与极小值（即只有有限次振动）则函数 $f(x)$ 的富里叶级数在整个数轴上收敛，且有

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)=\begin{cases}f(x), & \text{若 } x \text{ 为 } f(x) \text{ 的连续点,}\\ \dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2} & \text{若 } x \text{ 为 } f(x) \text{ 的第一类间断点.}\end{cases}$$

综上所述，当周期为 $2\pi$ 的函数 $f(x)$ 满足定理中的条件时，可按⑿和⒀两式计算它的富里叶系数 $a_k$ 和 $b_k$，从而作出富里叶级数⒁．此级数在 $f(x)$ 的连续点收敛于 $f(x)$，在 $f(x)$ 的第一类间断点收敛于它的左右极限之和的一半．若函数 $f(x)$ 只在〔$-\pi$，$\pi$）或（$-\pi$，$\pi$〕上给出，则可利用周期性延拓，形成一个在实轴上均有定义的周期为 $2\pi$ 的函数．为此，下面讨论的函数只在〔$-\pi$，$\pi$）或（$-\pi$，$\pi$〕上给出定义。

〔**例1**〕 将函数（图 1·1·1）

$$f(x)=\begin{cases}E_1, & -\pi\leqslant x<0,\\ E_2, & 0\leqslant x<\pi.\end{cases}\quad (E_1 \text{ 和 } E_2 \text{ 为两个不等的常数})$$

展开成富里叶级数．

**解** 计算富里叶系数：

$$\begin{aligned}a_0&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}E_1dx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}E_2dx\\&=E_1+E_2\end{aligned}$$

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kx\,dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}E_1\cos kx\,dx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}E_2\cos kx\,dx$$

$$=0$$

$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin kx\,dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}E_1\sin kx\,dx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}E_2\sin kx\,dx$$

$$=\frac{E_1}{\pi}\left[\frac{-1}{k}\cos kx\right]_{-\pi}^{0}+\frac{E_2}{\pi}\left[\frac{-1}{k}\cos kx\right]_{0}^{\pi}$$

$$=\frac{E_1}{\pi k}\left[-1+(-1)^k\right]+\frac{E_2}{\pi k}\left[-(-1)^k+1\right]$$

$$=\frac{(-1)^k-1}{\pi k}(E_1-E_2)$$

$$=\begin{cases}0, & \text{当 } k \text{ 为偶数,}\\ \dfrac{2(E_2-E_1)}{\pi k}, & \text{当 } k \text{ 为奇数,}\end{cases}$$

从而,

$$f(x)\sim\frac{E_1+E_2}{2}+\frac{2(E_2-E_1)}{\pi}\left(\sin x+\frac{\sin 3x}{3}+\cdots+\frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}+\cdots\right.$$

$$=\frac{E_1+E_2}{2}+\frac{2(E_2-E_1)}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}$$

$$=\begin{cases}E_1, & -\pi<x<0,\\ E_2, & 0<x<\pi,\\ \dfrac{E_1+E_2}{2}, & x=0,\quad x=\pm\pi.\end{cases}$$

由于 $f(x)$ 可以延拓成周期为 $2\pi$ 的函数，上述结果给出了$[-\pi,\pi]$上的收敛结果。

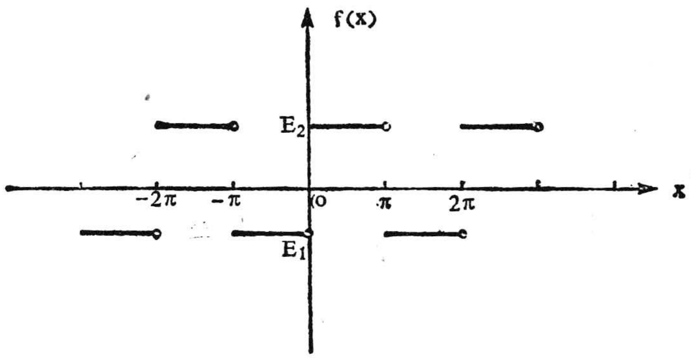


图 1·1·1

〔例2〕 将函数（图 1·1·2）

$$f(x)=\begin{cases}bx, & -\pi\leqslant x<0,\\ ax, & 0\leqslant x<\pi,\end{cases}$$

展开成富里叶级数.

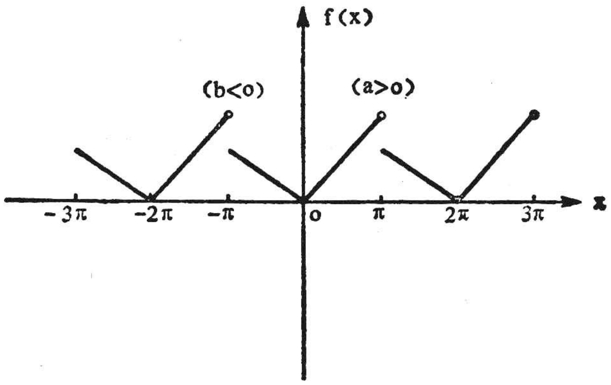


图 1·1·2

**解** 计算富里叶系数

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}bx\ dx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}ax\ dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{2}bx^2\right]_{-\pi}^{0}+\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{2}ax^2\right]_{0}^{\pi}$$

$$=\frac{\pi}{2}(a-b),$$

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kx\ dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}bx\ \cos kx\ dx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}ax\ \cos kx\ dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}(a-b)\ x\ \cos kx\ dx$$

$$=\frac{(a-b)}{\pi}\int_{0}^{\pi}x\ \cos kx\ dx$$

$$=\frac{(a-b)}{\pi k}\left[x\ \sin kx\right]_{0}^{\pi}-\frac{(a-b)}{\pi k}\int_{0}^{\pi}\sin kx\ dx$$

$$=\frac{(a-b)}{\pi k^2}\left[\cos kx\right]_{0}^{\pi}$$

$$=\frac{(a-b)}{\pi k^2}\left[(-1)^k-1\right]$$

$$=\frac{(b-a)[1-(-1)^k]}{\pi k^2}.$$

类似地可计算

$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin kx\ dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} bx\sin kx dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} ax\sin kx dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}(a+b)x\sin kx dx$$

$$= \frac{(-1)^{k-1}(a+b)}{k},$$

从而，

$$f(x) \sim \frac{\pi(a-b)}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{(b-a)[1-(-1)^n]}{\pi n^2}\cos nx + \frac{(-1)^{n-1}(a+b)}{n}\sin nx\right\}$$

$$= \begin{cases} bx, & -\pi < x < 0, \\ ax, & 0 \leq x < \pi, \\ \frac{\pi(a-b)}{2}, & x = \pm\pi. \end{cases}$$

## 第三节　奇函数和偶函数的富里叶级数

在上册中我们已讲到，在定义域内满足 $f(-x) = -f(x)$ 的函数称为奇函数，满足 $f(-x) = f(x)$ 的函数称为偶函数；两个奇函数的乘积为偶函数，两个偶函数的乘积为偶函数，一个奇函数和一个偶函数的乘积为奇函数；奇函数在区间 $(-l, l)$ 上的积分为零，偶函数在区间 $(-l, l)$ 上的积分为该函数在区间 $(0, l)$ 上的积分的二倍。

若 $f(x)$ 为区间 $(-\pi, \pi)$ 上的奇函数，由于 $\cos kx$ 为偶函数，$\sin kx$ 为奇函数，所以 $f(x)\cos kx$ 为奇函数，$f(x)\sin kx$ 为偶函数，因此，$f(x)$ 的富里叶系数为：

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = 0,$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx dx = 0,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx dx$$
$$= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin kx dx,$$

从而

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx.$$

这说明 $f(x)$ 的富里叶级数中只含正弦项，不含常数项和余弦项，这种富里叶级数也称为正弦级数。

若 $f(x)$ 为 $(-\pi, \pi)$上的偶函数，则 $f(x)\cos kx$ 为偶函数，$f(x)\sin kx$ 为奇函数，它的富里叶系数为

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)dx,$$

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kxdx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos kxdx,$$

$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin kxdx=0,$$

从而

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx.$$

这说明 $f(x)$ 的富里叶级数中含常数项和余弦项，不含正弦项，这种富里叶级数也称为余弦级数.

由上面的讨论可知，当 $f(x)$ 为 $(-\pi,\pi)$ 上的奇函数或偶函数时，它的富里叶系数的计算就简单些，它的富里叶级数为正弦级数或余弦级数.

〔例 1〕 将函数 $f(x)=A\sin\frac{x}{2}(-\pi<x\leqslant\pi)$（图 1·1·3)展开成富里叶级数.

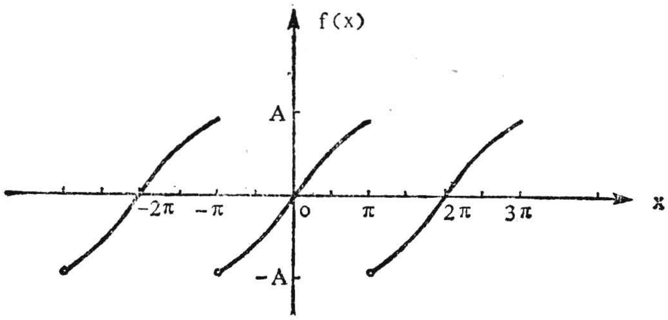


图 1·1·3

**解** 由于 $f(x)=A\sin\frac{x}{2}$ 为奇函数，

$$a_0=a_k=0(k=1,2\cdots),$$

$$b_k=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin kxdx$$
$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}A\sin\frac{x}{2}\sin kxdx.$$

因为

$$\int_0^{\pi}\sin\frac{x}{2}\sin kxdx=\frac{-1}{k}\int_0^{\pi}\sin\frac{x}{2}d\cos kx$$
$$=\frac{-1}{k}\left[\sin\frac{x}{2}\cos kx\right]_0^{\pi}+\frac{1}{2k}\int_0^{\pi}\cos kx\cos\frac{x}{2}dx,$$

$$= \frac{(-1)^{k+1}}{k} + \frac{1}{2k^2}\int_0^{\pi}\cos\frac{x}{2}d\sin kx$$
$$= \frac{(-1)^{k+1}}{k} + \frac{1}{4k^2}\int_0^{\pi}\sin kx\sin\frac{x}{2}dx$$
$$= \frac{(-1)^{k+1}}{k} + \frac{1}{4k^2}\int_0^{\pi}\sin\frac{x}{2}\sin kxdx,$$

移项后得

$$\left(1-\frac{1}{4k^2}\right)\int_0^{\pi}\sin\frac{x}{2}\sin kxdx = \frac{(-1)^{k+1}}{k},$$

即

$$\int_0^{\pi}\sin\frac{x}{2}\sin kxdx = \frac{4k(-1)^{k+1}}{4k^2-1},$$

因此，

$$b_k = \frac{8kA(-1)^{k+1}}{\pi(4k^2-1)}.$$

从而

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty}\frac{8nA(-1)^{n+1}}{\pi(4n^2-1)}\sin nx$$
$$= \begin{cases} A\sin\frac{x}{2}, & -\pi < x < \pi, \\ 0, & x = \pm\pi. \end{cases}$$

〔例 2〕 将函数 $f(x)=x^2$ $(-\pi \leqslant x < \pi$ (图 1·1·4) 展开成富里叶级数.

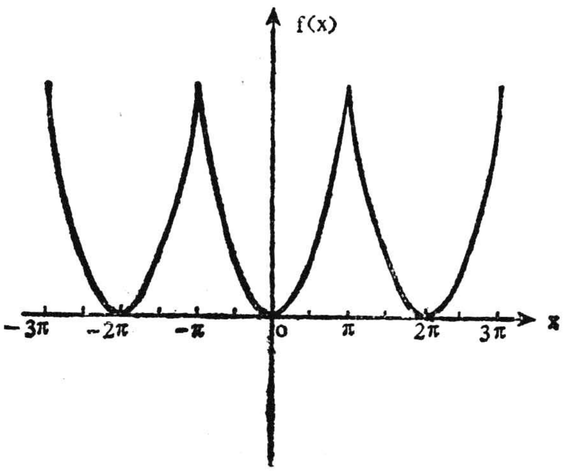


图 1·1·4

**解** 函数 $f(x)=x^2$ 为偶函数，因此 $b_k=0$ $(k=1,2,\cdots,)$，

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2dx$$

$$= \frac{2}{3\pi}\Big[x^3\Big]_0^\pi = \frac{2}{3}\pi^2,$$

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2\cos kx dx \\ &= \frac{2}{\pi k}\int_0^\pi x^2 d\sin kx \\ &= \frac{2}{\pi k}\Big[x^2\sin kx\Big]_0^\pi - \frac{4}{\pi k}\int_0^\pi x\sin kx dx \\ &= \frac{4}{\pi k^2}\int_0^\pi x d\cos kx \\ &= \frac{4(-1)^k}{k^2} - \frac{4}{\pi k^3}\Big[\sin kx\Big]_0^\pi \\ &= \frac{4(-1)^k}{k^2}, \end{aligned}$$

从而，

$$\begin{aligned} f(x) &\sim \frac{2}{3}\pi^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^n}{n^2}\cos nx \\ &= x^2. \qquad (-\pi \leqslant x \leqslant \pi) \end{aligned}$$

## 第四节　周期为 $2T$ 的函数的富里叶级数

前面我们讨论了周期为 $2\pi$ 的函数的富里叶级数，在实际问题中还会遇到周期为 $2T$ 的函数．若在区间〔$-T$, $T$〕上满足收敛条件，则 $f(x)$ 也可展开成富里叶级数．

**定理 2**　若周期为 $2T$ 的函数 $f(x)$ 在区间〔$-T$, $T$〕上满足定理 1 的条件，则它的富里叶级数为

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos\frac{n\pi}{T}x + b_n\sin\frac{n\pi}{T}x\right]$$

$$= \begin{cases} f(x), & \text{若 } x \text{ 为 } f(x) \text{ 的连续点,} \\ \dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2}, & \text{若 } x \text{ 为 } f(x) \text{ 的第一类间断点,} \end{cases}$$

其中，

$$a_k = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f(x)\cos\frac{k\pi}{T}x\ dx, \tag{15}$$

$$b_k = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f(x)\sin\frac{k\pi}{T}x\ dx, \tag{16}$$

$$k = 0, 1, 2\cdots.$$

**证**　作变换 $x = \frac{T}{\pi}z$，即 $z = \frac{\pi}{T}x$，则 $f(x) = f\left(\frac{T}{\pi}z\right) = F(z)$．$F(z)$ 是以 $2\pi$ 为周期的函数，因为 $F(2\pi+z) = f\left(\frac{T}{\pi}(2\pi+z)\right) = f\left(2T+\frac{Tz}{\pi}\right) = f\left(\frac{Tz}{\pi}\right) =$

$F(z)$. 由此可见，若 $f(x)$ 在 $[-T, T]$ 上满足定理 1 的条件，则 $F(z)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上满足定理 1 的条件，因此有

$$F(z) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nz + b_n \sin nz)$$

其中

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(z)dz \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-T}^{T} f(x)\frac{\pi}{T}dx \\ &= \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f(x)\,dx, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(z)\cos kz dz \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-T}^{T} f(x)\cos\frac{k\pi}{T}x\,\frac{\pi}{T}\,dx \\ &= \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f(x)\cos\frac{k\pi}{T}x dx. \end{aligned} \tag{17}$$

类似地，

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(z)\sin kz dz \\ &= \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f(x)\sin\frac{k\pi}{T}x\,dx, \end{aligned} \tag{18}$$

从而，

$$\begin{aligned} f(x) = F(z) &\sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n \cos nz + b_n \sin nz] \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos\frac{n\pi}{T}x + b_n \sin\frac{n\pi}{T}x\right]. \end{aligned}$$

同样，当 $f(x)$ 为 $[-T, T]$ 上的奇函数时，有 $a_k = 0$（$k = 0, 1, 2, \cdots$），则 $f(x)$ 可展开成正弦级数

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi}{T}x,$$

其中，

$$b_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\sin\frac{k\pi}{T}x dx, \quad k = 1, 2, 3, \cdots.$$

当 $f(x)$ 为 $[-T, T]$ 上的偶函数时，有 $b_k = 0$（$k = 1, 2, 3, \cdots$），则 $f(x)$ 可展开成余弦级数

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi}{T}x,$$

其中，

$$a_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos\frac{k\pi}{T}xdx,\ k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots.$$

**〔例 1〕** 将半波整流函数（图 1·1·5）

$$f(t)=\begin{cases}0 & -\frac{T}{2}<t<0\\ E\sin\frac{2\pi}{T}t & 0\leqslant t\leqslant\frac{T}{2}\end{cases}$$

展开成富里叶级数.

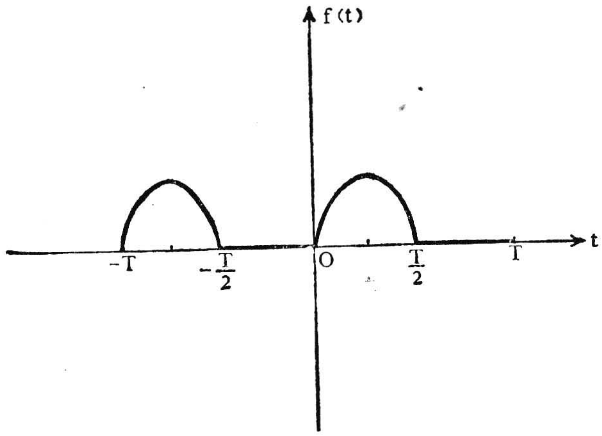


图 1·1·5

**解** $f(t)$ 是以 $T$ 为周期的函数；它的富里叶系数可按公式⒂和⒃计算，

$$a_0=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)dt=\frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}}E\sin\frac{2\pi}{T}tdt$$

$$=\frac{2E}{T}\left[\frac{-T}{2\pi}\cos\frac{2\pi}{T}t\right]_0^{\frac{T}{2}}=\frac{2E}{\pi}.$$

当 $k\neq1$ 时，

$$a_k=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)\cos\frac{2\pi k}{T}tdt$$

$$=\frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}}E\sin\frac{2\pi}{T}t\cos\frac{2k\pi}{T}dt$$

$$=\frac{E}{T}\int_0^{\frac{T}{2}}\left[\sin(k+1)\frac{2\pi}{T}t+\sin(1-k)\frac{2\pi}{T}t\right]dt$$

$$=\frac{E}{2\pi(k+1)}\left[-\cos(k+1)\frac{2\pi}{T}t\right]_0^{\frac{T}{2}}$$

$$+\frac{E}{2\pi(1-k)}\left[-\cos(1-k)\frac{2\pi}{T}t\right]_0^{\frac{T}{2}}$$

$$=\frac{E[(-1)^k+1]}{2\pi(k+1)}+\frac{E[(-1)^k+1]}{2\pi(1-k)}$$

$$=\begin{cases}0, & \text{若 } k \text{ 为不等于 1 的奇数,}\\ \frac{2E}{\pi(1-k^2)}, & \text{若 } k \text{ 为偶数;}\end{cases}$$