XINZHUANTI JIAOCHENG

新专题教程

居春兰 刘克环 主编

初中数学 4

空间与图形（下）

华东师范大学出版社

新专题教程

XINZHUANTI JIAOCHENG

初中数学 4

空间与图形（下）

主 编　居春兰　刘克环

参 编　陈寿禄　潘兰芳　张广峰

钱旭东　王彩虹　李国宾

华东师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

新专题教程. 初中数学 4　空间与图形. 下/居春兰，刘克环主编. —上海：华东师范大学出版社，2004. 3
ISBN 978-7-5617-3744-6

Ⅰ. 新...　Ⅱ. ①居...②刘...　Ⅲ. 几何课—初中—教学参考资料　Ⅳ. G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 021902 号

新专题教程
初中数学 4 · 空间与图形(下)

主　　编　居春兰　刘克环
策划组稿　教辅分社
项目编辑　徐红瑾
文字编辑　潘　钢
封面设计　黄惠敏
版式设计　蒋　克

出版发行　华东师范大学出版社
社　　址　上海市中山北路 3663 号　邮编 200062
电话总机　021-62450163 转各部门　行政传真 021-62572105
客服电话　021-62865537(兼传真)
门市(邮购)电话　021-62869887
门市地址　上海市中山北路 3663 号华东师范大学校内先锋路口
网　　址　www.ecnupress.com.cn

印 刷 者　华东师范大学印刷厂
开　　本　787×960　16 开
印　　张　13
字　　数　246 千字
版　　次　2009 年 4 月第四版
印　　次　2009 年 8 月第二次
书　　号　ISBN 978-7-5617-3744-6/G·2051
定　　价　16.00 元

出 版 人　朱杰人

亲爱的读者，展现在您面前的这套《新专题教程》系列图书是按新课程标准所列的内容，在“新教学理念、新教学方法”的指导下，按专题编写，涵盖初、高中语文、数学、英语、物理和化学5个学科，共计50个分册。

本丛书自初版起就坚持“完整、系统、深入、细致”的编写特色，甫一面世，就受到广大学生的欢迎。但我们不敢懈怠，我们必须与时俱进。根据现行中学教材的变化情况及中、高考的变化趋势，我们进行了多方调研，在此基础上，组织作者对本丛书进行了全面的修订。新修订的这套丛书，不仅知识点配套，而且题型新颖，更利于学生对学科知识的理解和掌握。

丛书有以下特点。

作者权威　编写队伍由师范大学学科专家及长期在教学第一线的全国著名中学特、高级教师组成。他们有先进的教育理念和丰富的教学经验，是中、高考研究方面的专家，他们的指导更具权威性。

材料典型　丛书精选了近几年的中、高考试题，还收集了许多有代表性的例题，编写者对这些典型材料进行了详细的解读，还设置了有针对性的训练。总之，编写者力求从国家课程标准的知识内容中提炼出相应的能力要求，并对重点知识进行深入、细致的讲解，对难点用实例的方法进行释疑，使用这套丛书，能切实提高学生的学习效果。

版本通用　丛书以教育部颁布的新课程标准为编写依据，不受教材版本限制，按各学科知识内容编排，独立成册，不仅与教学要求相对应，更体现了学科知识的完整性、系统性和科学性，具有很强的通用性。

编排科学　丛书在编排时照顾到了学生的差异性，读者可以根据自己学习中的薄弱环节，有重点地选择，有针对性地学习，以达到事半功倍的效果。丛书坡度设计合理，帮助学生在知识学习的基础上，充分了解和掌握运用知识解决问题的方法，提升学习能力。

愿《新专题教程》成为您的好伙伴，学习的好帮手，为您的学习带来诸多的便利，给您一个智慧的人生。

华东师范大学出版社
教辅分社

新课程标准是国家课程的基本纲领性文件，是国家对基础教育课程的基本规范和质量要求.

本丛书正是以新课标要求的教学内容和教学要求，并结合当前的中考要求为编写依据，以人民教育出版社出版的、经全国中小学教材审定委员会通过的、义务教育课程标准实验教科书《数学》(七(上)～九(下)计六本书)为蓝本，并参照由华东、北京师范大学出版社出版的、经全国中小学教材审定委员会2001年初审通过的、义务教育课程标准实验教科书《数学》(七(上)～九(下)计六本书)相关内容，以中考为终结目标，并以"内容提练、方法提练"为基本特色的一套丛书.

众所周知，初中数学分为代数、几何两大块. 本书是几何部分，即《空间与图形》，分上、下两册出版. 我们殷切地希望同学们，尤其是数学爱好者能成为本丛书的读者，并借此学会阅读、学会思维、学会学习、学会创新. 本书既可作为全面提高学生(公民)综合素质与应用能力的指导用书，也可用于指导毕业班学生的初中数学总复习和升学考试.

参加丛书初中几何部分编写工作的有：居春兰、刘克环、陈寿禄、潘兰芳、张广峰、钱旭东、王彩虹、李国宾，全书由刘克环统稿，居春兰审定.

居春兰　刘克环

CONTENTS

目　录

初中数学4·空间与图形（下）

CONTENTS
目　录

初中数学4·空间与图形(下)

专题 10

图形的相似

§10.1　图形的相似

【知识梳理】

1. 相似形

在几何学中，我们把具有相同形状的图形称为相似形. 在相似形的概念中，重要的是形状相同，而大小则不一定相同.

点击：

形状相同，大小也相同的图形，我们称为全等形，你能说出全等形和相似形之间的关系吗？

2. 比例基本性质和比例线段

如果 $a:b=c:d$，那么 $ad=bc$. 反过来，如果有 $ad=bc(bd\neq 0)$，那么 $a:b=c:d$. 特殊地，如果 $a:b=b:c$，那么 $b^2=ac$，其逆命题也成立.

对于四条线段 a、b、c、d，若有 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，那么这四条线段叫做成比例线段.

3. 黄金分割

将一条线段 AB 分割成大小两条线段 AP 和 PB，若小段与大段的长度之比等于大段的长度与全长之比，即 $\frac{PB}{AP}=\frac{AP}{AB}$，则这种分割称为黄金分割，$P$ 点叫线段 AB 的黄金分割点.

黄金分割在生活中有着广泛的运用，比如：报幕员在舞台的黄金分割点上报幕，台下的观众看上去感觉最好；金字塔的高度与底面的边长的比接近于黄金分割；就在人的身体上也有黄金分割，人的肘关节基本上是在整个手臂的黄金分割点处. 请同学们仔细观察、体会我们周围的世界，你会发现更多的黄金分割.

图　10-1

4. 相似多边形的特征

如果两个多边形相似，则它们的对应边成比例，对应角相等.

点击:

只有边对应成比例的两个多边形相似吗？只有角对应相等的两个多边形相似吗？说明理由.

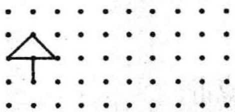


图 10-2

反之，如果两个多边形所有边对应成比例，且所有角对应相等，则我们就说这两个多边形相似.

【分类举例】

1. 用相似图形的概念解题

例1 下列说法错误的是(　　).

(A) 两个正方形一定是相似图形

(B) 国旗上的大、小五角星一定是相似图形

(C) 用同一张底片印出来的两张不同尺寸的照片一定是相似的

(D) 所有的矩形一定是相似的

解 选(D).

例2 如图 10-2，图中画的是一把小伞，请在小伞旁边画一把大伞，且和小伞的形状相同.

解

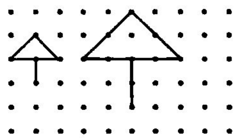


图 10-3

2. 成比例线段

例3 填空：

(1) 已知 $a:b:c=2:3:5$，且 $a+b+c=30$，则 abc 的值为________.

(2) 如果线段 $a=4$ cm，a 与 b 的比例中项是 8 cm，则线段 b 的长度为________ cm.

(3) 如果 $\frac{x+y}{x-y}=\frac{7}{2}$，则 $\frac{x}{y}=$________.

(4) 在一张比例尺为 1 : 100 000 的地图上，王老师家到学校的图距为 8 cm，则王老师家到学校的实际距离为________ m.

分析与解 (1) 设 $a=2k$，$b=3k$，$c=5k$，则有 $10k=30$，$k=3$，所以 $a=6$，$b=9$，$c=15$，故 $abc=810$.

(2) 由比例基本性质知 $8^2=a\cdot b$，所以 $b=16$ cm.

(3) 由比例基本性质知 $2(x+y)=7(x-y)$，化简得：

$$\frac{x}{y}=\frac{9}{5}.$$

(4) 8 000.

3. 利用相似图形的特征解题

例 4 如图 10－4 所示的相似五边形中，求未知边 x，y 以及角度 α 的大小.

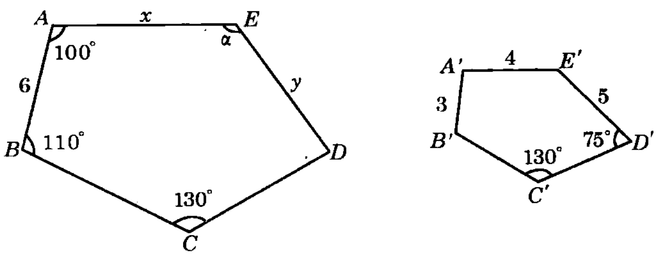


图 10－4

解 由于两个五边形相似，它们的对应边成比例、对应角相等，所以

$$\frac{6}{3}=\frac{x}{4}=\frac{y}{5},$$

解得 $x=8$，$y=10$，

$$\alpha=540^\circ-(100^\circ+110^\circ+130^\circ+75^\circ)=125^\circ.$$

例 5 已知一矩形长 20 cm，宽 15 cm；另一与它相似的矩形的一边长为 10 cm，求另一边长.

分析与解 由两矩形相似可得相关的比例式，但是要小心是题中并没给出对应的关系，故分情况讨论：设另一边长为 x cm，则得

$$\frac{20}{10}=\frac{15}{x} \quad 或 \quad \frac{15}{10}=\frac{20}{x},$$

解得 $x=7.5$ 或 $x=\frac{40}{3}$.

基础训练

1. 下列各组图形是相似图形的是________.（填序号）

(1) 幻灯片上的图案和它投射到屏幕上的图像. (2)一个图形和它在平面镜中的像. (3)所有的等腰直角三角形. (4)边长不等的两个菱形. (5)两个全等的三角形.

2. 已知线段 a、b、c 满足 $a:b=b:c$，且 $a=6$ cm，$c=9$ cm，则 $b=$ ________ cm.

3. A、B 两地相距 5 km，画在图上的距离是 2 cm，现从图上量得学校到公园的距离是 5 cm，则学校到公园的实际距离是________.

4. 已知物高与影长成正比例，已知竹竿高 1.8 m，测得影长为 1.2 m，现测出某塔影长为 24 m，则塔高为________ m.

5. 用一个 10 倍的放大镜去观察一个三角形，对此，四位同学有如下的说法：

甲说：每个内角都扩大到原来的 10 倍.

乙说：每条边都伸长到原来的 10 倍.

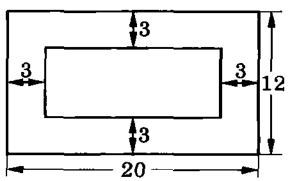
丙说：三角形的面积扩大到原来的 10 倍.

丁说：三角形每边上的高都伸长到原来的 10 倍.

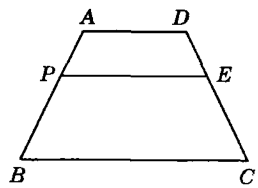
上述说法中，正确的有(　　).

(A) 1 个　　(B) 2 个　　(C) 3 个　　(D) 4 个

6. 如图所示的两个矩形是否相似?



第 6 题



第 7 题

7. 如图，在梯形 $ABCD$ 中，$AD \parallel BC$，P 是 AB 上一点，$PE \parallel BC$ 交 CD 于点 E，若 $AD=2$，$BC=4.5$，问：当 P 在何处时，PE 分梯形 $ABCD$ 所成的两个梯形相似?

能力提高

8. 线段 $AB=15$ cm，点 C 在线段 AB 的延长线上，且 $AB:AC=3:5$，则 AC 等于(　　).

(A) 25 cm　　(B) 10 cm　　(C) 15 cm　　(D) 5 cm

9. 已知 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，

(1) 试说明 ① $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$；② $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$.

(2) 运用(1)中结论求下面各式值：

已知 $\frac{x}{y}=\frac{2}{5}$，求 $\frac{x-y}{y}$，$\frac{x+y}{y}$，$\frac{x-y}{x+y}$ 的值.

§10.2 相似三角形和图形的位似

【知识梳理】

1. 相似三角形

用符号表示两个三角形相似时，我们一般把三角形的对应顶点写在对应的位置上，这样便于我们找到相似三角形的对应边和对应角.

显然，两个三角形相似，则它们的对应边成比例，且对应角相等.

两个相似三角形对应边的比值 k，称为相似三角形的相似比. 特别地，当相似比 $k=1$ 时，两个三角形不仅相似而且全等，所以全等是相似的一个特例.

2. 相似三角形的识别

(1) 相似三角形的识别方法主要有：

若一个三角形的两角分别与另一个三角形的两角对应相等，则这两三角形相似.

若一个三角形的两条边与另一个三角形的两条边对应成比例，并且夹角相等，则这两三角形相似.

若一个三角形的三条边和另一个三角形的三条边对应成比例，则这两个三角形相似.

(2) 几个重要的基本图形：

"A"型，如图 10-5 在$\triangle ABC$中，$DE \parallel BC$，则有

$$\triangle ADE \backsim \triangle ABC.$$

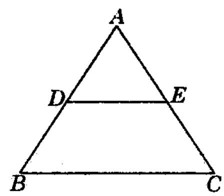


图 10-5

"X"型，如图 10-6，若 $AB \parallel CD$，则有

$$\triangle ABO \backsim \triangle DCO.$$

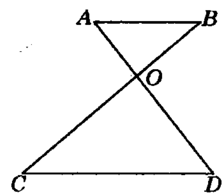


图 10-6

第三个基本图形如图 10-7，在$\triangle ABC$中，若 $\angle BAC=90°$，$AD \perp BC$，则有 $\triangle ABD \backsim \triangle CAD \backsim \triangle CBA$.

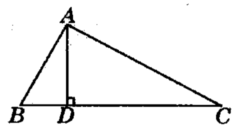


图 10-7

在我们学习相似三角形这部分知识的时候，我们经常会遇到上述三种图形，一些稍复杂的图形则是由上述三种图形组合而成，只要我们能灵活运用这三种基本图形，就可以轻松地解决许多问题.

点击:

相似多边形是否也具有类似的性质?

3. 相似三角形的性质

两三角形相似,除了具有对应边成比例、对应角相等外,还有下列性质:

相似三角形对应高的比,对应中线的比、对应角平分线的比都等于相似比.

相似三角形对应周长的比等于相似比.

相似三角形面积的比等于相似比的平方.

4. 位似图形

如图 10-8,两个多边形不仅相似,而且对应顶点的连线相交于一点,像这样的相似叫做位似,点 O 叫做位似中心.

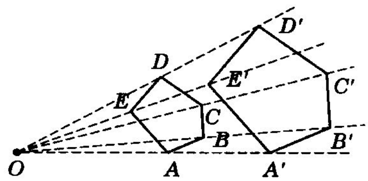


图 10-8

【分类举例】

1. 相似三角形的识别

例 1 如图 10-9,$\angle 1=\angle 2$,$\angle D=\angle A$,试说明 $\triangle ABC \backsim \triangle DBE$.

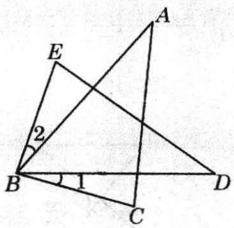


图 10-9

解 由 $\angle 1=\angle 2$,得 $\angle 1+\angle ABD=\angle 2+\angle ABD$,即

$$\angle EBD=\angle CBA.$$

又 $$\angle A=\angle D,$$

所以 $$\triangle ABC \backsim \triangle DBE.$$

例 2 如图 10-10,$AE^2=AD \cdot AB$,且 $\angle 1=\angle 2$,试说明 $\triangle EBC \backsim \triangle DEB$.

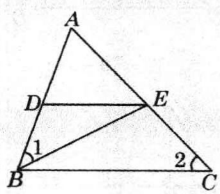


图 10-10

解 由 $AE^2=AD \cdot AB$,得 $\dfrac{AE}{AD}=\dfrac{AB}{AE}$.

又 $$\angle A=\angle A,$$

所以 $$\triangle AED \backsim \triangle ABE,$$

所以 $$\angle AED=\angle 1.$$

因为 $\angle 1 = \angle 2$,

所以 $\angle AED = \angle 2$.

得 $DE \parallel BC$.

所以 $\angle DEB = \angle EBC$.

又因为 $\angle 1 = \angle 2$,

所以 $\triangle EBC \backsim \triangle DEB$.

例 3 如图 10-11,方格纸中每一个小正方形的边长都为 a,试说明 $\triangle ABD \backsim \triangle BDC$.

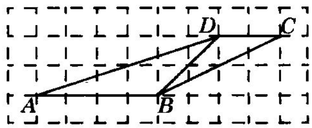


图 10-11

解 因为小正方形的边长都为 a,所以由勾股定理易得

$$AD = 2\sqrt{10}a,\ AB = 4a,\ BD = 2\sqrt{2}a,$$

$$CD = 2a,\ BC = 2\sqrt{5}a.$$

因为 $\dfrac{AD}{BC} = \sqrt{2}$, $\dfrac{BD}{CD} = \sqrt{2}$, $\dfrac{AB}{BD} = \sqrt{2}$,

所以 $$\frac{AD}{BC} = \frac{BD}{CD} = \frac{AB}{BD}.$$

因此 $\triangle ABD \backsim \triangle BDC$.

2. 利用相似三角形得出等积式和比例式

例 4 如图 10-12, Rt$\triangle ABC$ 中, $\angle A = 90°$, $\angle ABC = 2\angle C$,且 BD 平分 $\angle ABC$. 试说明 $AB \cdot BC = AC \cdot CD$.

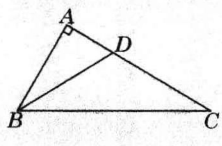


图 10-12

分析与解 由 $\angle ABD = \dfrac{1}{2}\angle ABC = \angle C$, 易得

$$\triangle ABD \backsim \triangle ACB.$$

则有 $$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{BC},$$

即 $AB \cdot BC = AC \cdot BD$.

又由 $$\angle DBC = \frac{1}{2}\angle ABC = \angle C,$$

得 $$BD = CD.$$

所以 $$AB \cdot BC = AC \cdot CD.$$

例5 如图10-13，D是AB上的点且有$AC^2 = AB \cdot AD$，试说明$\frac{CD}{BC} = \frac{AC}{AB}$.

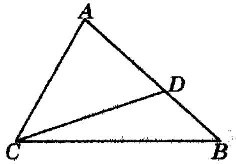


图 10-13

分析与解 由$AC^2 = AB \cdot AD$，得$\frac{AC}{AB} = \frac{AD}{AC}$，又

$$\angle A = \angle A,$$

所以 $$\triangle ACD \backsim \triangle ABC.$$

所以 $$\frac{CD}{BC} = \frac{AC}{AB}.$$

例6 如图10-14，$\triangle ABC$中，AM是$\angle BAC$的平分线，AM的垂直平分线DN交BC延长线于N，试说明$MN^2 = BN \cdot CN$.

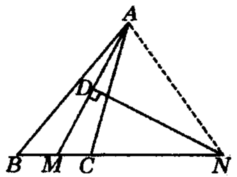


图 10-14

分析与解 由于MN、BN和CN在一条直线上，不可能组成三角形，所以考虑换边. 连结AN，由于DN垂直平分AM，所以有$AN = MN$且有$\angle AMN = \angle MAN$，因为

$$\angle AMN = \angle B + \angle BAM,\ \angle MAN = \angle CAN + \angle CAM,$$

而 $$\angle BAM = \angle CAM,$$

所以 $$\angle B = \angle CAN.$$

又有 $$\angle ANB = \angle CNA,$$

所以 $$\triangle NBA \backsim \triangle NAC.$$

因此 $$\frac{AN}{CN} = \frac{BN}{AN},$$

即 $$AN^2 = BN \cdot CN,$$

又 $$AN = MN,$$

所以 $$MN^2 = BN \cdot CN.$$

3. 利用相似三角形性质解题

例7 (1) 两相似三角形对应高之比为3∶4，周长之和为

28 cm,则两三角形周长分别为________.

(2) 两相似三角形的相似比为 3∶5,它们的面积和为 102 cm^2,则较大三角形的面积为________.

(3) 如图 10 - 15,梯形 $ABCD$ 中,$AD \parallel BC$,AC、BD 交于点 O,$S_{\triangle AOD} = 4$,$S_{\triangle BOC} = 9$,则 $\dfrac{AD}{BC} =$ ________,$S_{\triangle AOB} =$ ________.

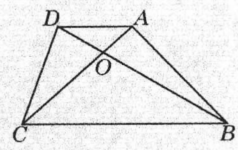


图 10 - 15

分析与解 (1) 相似三角形周长之比等于对应高之比,所以两三角形周长之比为 3∶4,故两三角形周长为 12 cm 与 16 cm.

(2) 相似比为 3∶5,所以面积比为 9∶25. 又因为两相似三角形面积和为 102 cm^2,所以较大三角形面积为 75 cm^2.

(3) 容易知道 $\triangle AOD \backsim \triangle COB$,所以它们的相似比为 $\sqrt{\dfrac{4}{9}} = \dfrac{2}{3}$,故 $\dfrac{AD}{BC} = \dfrac{2}{3}$.

因为 $$\frac{DO}{BO} = \frac{AD}{BC} = \frac{2}{3},$$

所以 $$S_{\triangle AOD} : S_{\triangle AOB} = 2 : 3.$$

又 $$S_{\triangle AOD} = 4,$$

所以 $$S_{\triangle AOB} = 6.$$

例 8 如图 10 - 16,$\triangle ABC$ 的内接矩形 $EFGH$ 的一边在 BC 上,高 $AD = 16$,$BC = 48$.

(1) 若 $EF : FG = 5 : 9$,求矩形 $EFGH$ 面积;

(2) 设 $EH = x$,矩形 $EFGH$ 面积为 y,写出 y 与 x 的函数关系式.

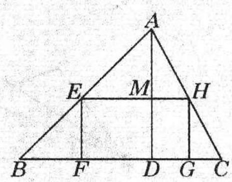


图 10 - 16

分析与解 (1) 因为 $EH \parallel BC$,所以

$$\triangle AEH \backsim \triangle ABC.$$

又 AM 是$\triangle AEH$ 的高,AD 是$\triangle ABC$ 的高,所以

$$\frac{AM}{AD} = \frac{EH}{BC}.$$

设 $EF = 5x$,$FG = 9x$,则

$$EH = 9x,\ AM = 16 - 5x,$$