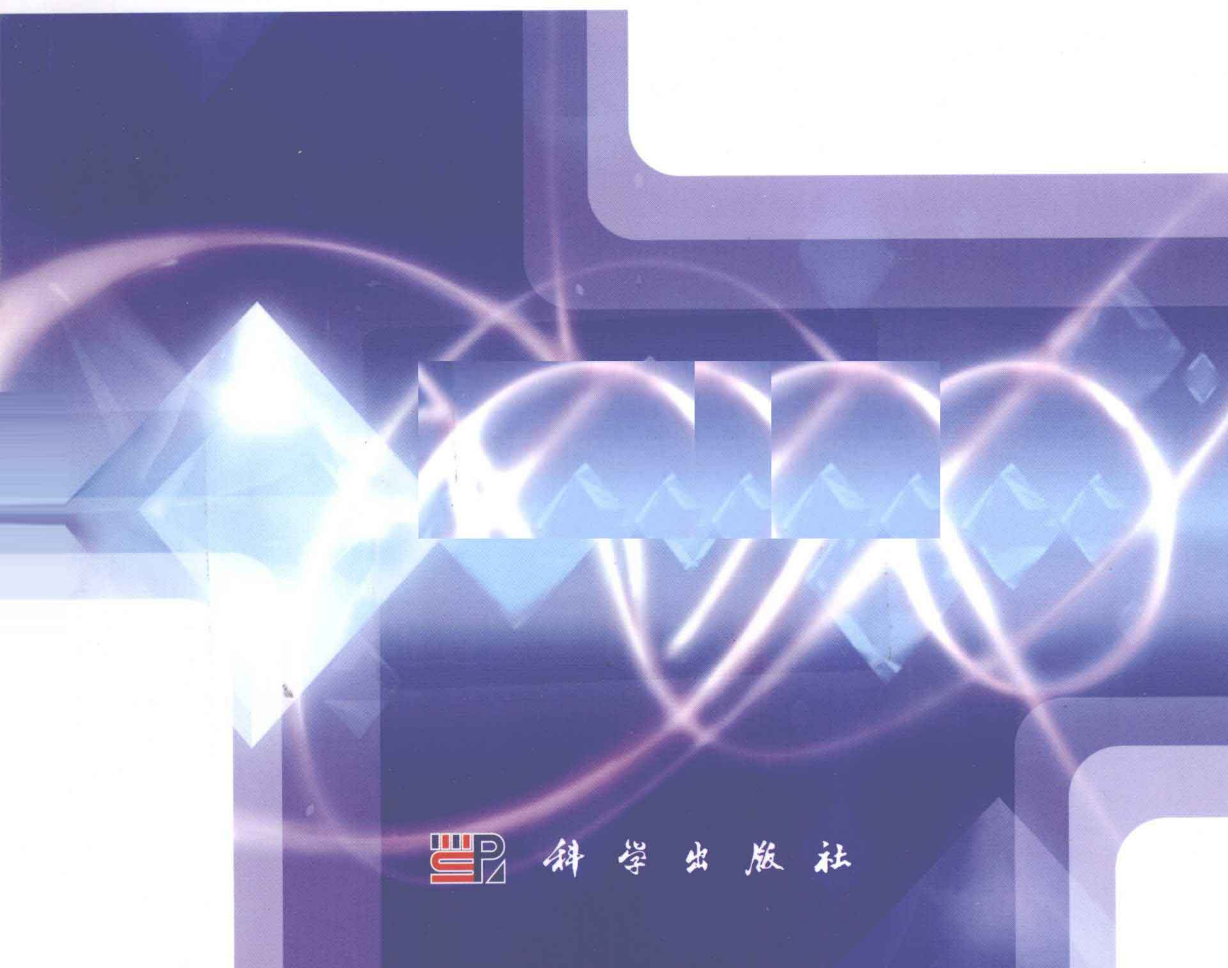
2-D奇异系统理论

邹　云　王为群　徐胜元　著



科学出版社

2-D 奇异系统理论

邹　云　王为群　徐胜元　著

科学出版社
北　京

内 容 简 介

本书结合作者多年的研究工作，系统地总结了 2-D 奇异系统的基本理论、研究方法和近年来所取得的主要研究成果，引导读者进入该领域的研究前沿。本书包括 2-D 奇异系统的状态响应公式和跳越模分析、稳定性概念与基本理论、能稳性理论和特征多项式配置、局部能达性与局部能观性的基本概念和理论、观测器与补偿器设计、H_∞ 控制与滤波，以及最优控制与 Kalman 滤波等内容。

本书可作为高等院校自动控制、应用数学以及信号处理等专业的研究生教学参考书，也可供从事控制理论、信息处理、模式识别及其应用的科技工作者、工程技术人员、高等院校教师和研究生等参考。

图书在版编目(CIP)数据

2-D 奇异系统理论/邹云，王为群，徐胜元著. —北京：科学出版社，2012
ISBN 978-7-03-033637-8

Ⅰ.①2… Ⅱ.①邹… ②王… ③徐… Ⅲ.①控制系统 Ⅳ.①TP13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 030691 号

责任编辑：张海娜 / 责任校对：郑金红
责任印制：赵 博 / 封面设计：耕者设计工作室

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
源海印刷有限责任公司印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2012 年 3 月第 一 版 开本：B5(720×1000)
2012 年 3 月第一次印刷 印张：13 1/4
字数：255 000

定价：50.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　　言

2-D 系统理论在分析卫星气象云图、处理地震多发区的检测数据，以及增强和分析 X 射线图片、森林火灾及农作物灾情预报区域照片等多维数字图像和多维数字滤波器等诸多领域中发挥着重要的作用。当 2-D 离散系统描述的动力学系统还受静态方程约束时，就需要奇异系统(singular systems)模型来描述。在电力网络、航空系统及化学过程等工程系统，以及社会系统、经济系统和生物系统等中都会出现奇异系统。与通常的正常系统(normal systems)[也称正则系统(regular systems)]情形相比，奇异系统具有许多迥然相异的特征，显示出比正常系统更丰富的内涵，其所描述的系统范围比正常系统广，因此也称广义系统(generalized systems)。

2-D 奇异系统的开创和奠基工作是由 2-D 系统领域波兰著名学者 Kaczorek 完成的。他发表了一系列有影响的研究论文，使 2-D 奇异系统的研究受到广泛的重视。Kaczorek 给出了 2-D 奇异系统的一般状态响应公式，解决了最小能量控制和线性二次型最优调节器问题，讨论了能观性和可重构性、局部能控和因果重构及观测器等问题，并在系统的相容输入序列和可解性、等价性和简化等方面获得了重要进展。Karamanciogle 和 Lewis 提出了 2-D 奇异系统的几何方法。Gregor 针对 2-D 奇异 Fornasini-Marchesini 模型，解决了解的存在性和唯一性问题，并提出了稳定性的充分条件。其后，Beauchamp、Lewis 和 Mertzios 总结了 2-D 奇异系统研究的早期进展。

在 Kaczorek 等的工作中，假定了 2-D 奇异系统的边界条件是相容的，这限制了其理论的适用范围，需要更深入的工作研究边界条件不相容的情形。当边界条件不相容时，系统会出现跳跃行为。邹云和 Campbell 引入了跳跃模来刻画由随机扰动或不相容边界条件引起的跳跃行为，建立起 2-D 奇异系统的稳定性理论。在此基础上，我国学者进一步建立了 2-D 奇异系统的鲁棒控制理论，还在正则观测器设计、实现问题、最优控制和 Kalman 滤波等方面都做出了非常基础的学术贡献，形成了独具特色的理论研究体系。

自 1988 年 Kaczorek 将 2-D 系统的一般模型推广到奇异情形以来，经国内外学者的共同努力，较为完善的 2-D 奇异系统理论体系已经建立和发展起来。本书结合作者在 2-D 奇异系统方面多年的研究工作，对 2-D 奇异系统理论的研究成果做了比较全面的总结和介绍。本书各章均含有作者的研究成果。

全书具体内容安排如下：

第 1 章介绍了 2-D 奇异系统的几种常用模型、存在唯一解的条件以及状态响应公式，引入了跳跃模概念，并简要地介绍了实现问题。

第 2 章介绍了 2-D 奇异系统的稳定性概念与基本理论：包括内部稳定性、结构稳定性和 BIBO 稳定性，以及基于广义 Lyapunov 方程和线性矩阵不等式(LMI)方法的稳定性理论等内容。

第 3 章介绍了 2-D 奇异系统的能稳性理论：包括动态反馈能稳问题和输出反馈鲁棒能稳问题。此外，还介绍了特征多项式与剩余多项式配置问题。

第 4 章介绍了 2-D 奇异系统的能控性、能观性和能检测性基本概念和理论，以及对偶系统的概念与性质。

第 5 章介绍了 2-D 奇异系统的观测器与补偿器设计：包括奇异观测器与补偿器、降阶正常观测器与补偿器以及精确观测器等设计理论与方法。

第 6 章介绍了 2-D 奇异系统的 H_∞ 控制与滤波：包括不确定系统的输出反馈鲁棒 H_∞ 控制问题和基于观测器的 H_∞ 滤波问题。

第 7 章介绍了 2-D 奇异系统的最优控制与 Kalman 滤波：包括最优控制极大值原理、动态规划原理和 LQR 控制。此外，还介绍了最优滤波和滤波理论。

目前，有关 2-D 奇异系统理论的研究虽然已经形成了较为系统的理论体系，但相对于 1-D 奇异系统情形，2-D 奇异系统理论的研究仍显得较为粗糙。其主要原因是 2-D 奇异系统模型结构非常复杂，难以找到像 1-D 奇异系统理论中非常有效的(如 Kronecker 分解)结构分解，因而一直缺乏较为系统的特色研究方法。除了系统结构分解问题外，还有许多基本理论问题(如最小实现和稳定性的代数充要判据等)均远未获得稍为深入的探索。

针对存在的问题，本书在各章结束时均附有注释和参考文献供读者参考。这些注释均由邹云执笔撰写。其中，除了一部分内容是为便于读者阅读和理解而对该章内容的研究历史与现状进行的简要综述和小结外，更多的内容表达了本书作者对某些问题的个人看法。这些看法可能并不十分准确，甚至很不成熟。然而，作为一种尝试，其主要目的是活跃读者学术思想，以营造共同学习思考、去伪存真的良好氛围。

在完成本书的过程中，作者先后得到了多项国家自然科学基金项目(60574015、60674014、61074006)的资助、国家杰出青年基金项目(60625303)的资助、江苏省创新学者攀登项目(BK2008047)的资助以及“青蓝工程”的资助，在此深表感谢。本书得以完成和出版，还要特别感谢作者的同事徐慧玲副教授、盛梅副教授和蔡晨晓副教授等在 2-D 奇异系统方面的学术贡献以及对本书的协助校对工作。感谢作者的研究生叶树霞、姚娟、厉筱峰、李丽珍、张富贵、毛小琪、李伟红等同学的帮助和支持。

由于作者水平有限，书中疏漏之处在所难免，敬请读者批评指正。

目　　录

第 1 章　2-D 奇异系统状态响应公式与跳跃模态

1988 年,波兰学者 Kaczorek[1]将 2-D 线性离散系统的一般模型推广到奇异情形,开始对 2-D 奇异线性离散系统(简称 2-D 奇异系统)的研究,并于 1990 年利用 2-D z-变换导出了 2-D 奇异系统一般模型在相容边界条件下的状态响应公式[2],其中的证明过程隐含了 2-D 奇异系统是容许的。这是 2-D 奇异系统研究的里程碑工作。本章先给出描述 2-D 奇异系统的几种常用模型;然后给出系统存在唯一解的条件以及状态响应公式;接着引入 2-D 奇异系统的跳跃模和标准型;最后给出一类 2-D 奇异系统的实现方法。

1.1　2-D 奇异系统模型

本节首先介绍了 2-D 奇异系统的三种常用模型:2-D 奇异系统的一般模型(2-D SGM)、2-D 奇异系统的 Roesser 模型(2-D SRM)和 2-D 奇异系统的第二类 Fornasini-Marchesini 模型(2-D SFMM II),这些模型都是 2-D 正常系统[3]相应模型的直接推广。然后介绍了 2-D 奇异系统的扩展 Roesser 模型(2-D ESRM),该模型的引入将在 1.5 节中详细介绍。

1. 2-D SGM[1]

状态空间方程为

$$\begin{aligned} Ex(i+1,j+1) = {} & A_0x(i,j) + A_1x(i+1,j) + A_2x(i,j+1) \\ & + B_0u(i,j) + B_1u(i+1,j) + B_2u(i,j+1) \end{aligned} \tag{1.1.1a}$$

$$y(i,j) = Cx(i,j) + Du(i,j) \tag{1.1.1b}$$

边界条件为

$$x(i,0) = x_{i0}, \quad x(0,j) = x_{0j}, \quad i,j = 0,1,2,\cdots \tag{1.1.2}$$

其中,$x(i,j)\in \mathbf{R}^n$ 为局部状态向量;$u(i,j)\in \mathbf{R}^m$,$y(i,j)\in \mathbf{R}^p$ 分别为输入向量和输出向量;$E,A_k,B_k,C,D(k=0,1,2)$为适当维数的常数矩阵。E 一般为奇异矩阵,也可以非奇异。当 E 非奇异时系统(1.1.1)退化为正常系统,即 Kurek 提出的正常 2-D 系统一般模型(2-D GM)[3]。

2. 2-D SRM[4]

状态空间方程为

$$\begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} \\ E_{21} & E_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x^h(i+1,j) \\ x^v(i,j+1) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x^h(i,j) \\ x^v(i,j) \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}u(i,j) \tag{1.1.3a}$$

$$y(i,j)=\begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x^h(i,j) \\ x^v(i,j) \end{bmatrix} \tag{1.1.3b}$$

边界条件为

$$x^h(0,j)=x_j^h,\quad x^v(i,0)=x_i^v,\quad i,j=0,1,2,\cdots \tag{1.1.4}$$

其中，$x^h(i,j)\in\mathbf{R}^{n_1}$，$x^v(i,j)\in\mathbf{R}^{n_2}$分别为水平与垂直局部状态向量($n_1+n_2=n$)；$u(i,j)\in\mathbf{R}^m$，$y(i,j)\in\mathbf{R}^p$ 分别为系统输入向量和输出向量；$E=\begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} \\ E_{21} & E_{22} \end{bmatrix}$一般为奇异矩阵，也可以非奇异。这里，$E_{ij}$，$A_{ij}(i,j=1,2)$，$B_j$，$C_j(j=1,2)$为适当维数的常数矩阵。当 E 非奇异时系统(1.1.3)退化为正常系统，即著名的正常 2-D Roesser 模型(2-D RM)[3]。

令

$$\begin{aligned} &x'=\begin{bmatrix} x^h(i+1,j) \\ x^v(i,j+1) \end{bmatrix},\quad E=\begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} \\ E_{21} & E_{22} \end{bmatrix},\quad x=\begin{bmatrix} x^h(i,j) \\ x^v(i,j) \end{bmatrix} \\ &u=u(i,j),\quad y=y(i,j) \\ &A=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

则系统(1.1.3)通常也可简记为

$$Ex'=Ax+Bu \tag{1.1.3a$'$}$$

$$y=Cx \tag{1.1.3b$'$}$$

3. 2-D SFMM II[5]

状态空间方程为

$$\begin{aligned} Ex(i+1,j+1)=&A_1x(i+1,j)+A_2x(i,j+1) \\ &+B_1u(i+1,j)+B_2u(i,j+1) \end{aligned} \tag{1.1.5a}$$

$$y(i,j)=Cx(i,j)+Du(i,j) \tag{1.1.5b}$$

边界条件为

$$x(i,0)=x_{i0},\quad x(0,j)=x_{0j},\quad i,j=0,1,2,\cdots \tag{1.1.6}$$

其中，$x(i,j)\in\mathbf{R}^n$ 为局部状态向量；$u(i,j)\in\mathbf{R}^m$，$y(i,j)\in\mathbf{R}^p$ 分别为输入向量和输出向量；$A_k(k=1,2)$，$B_k(k=1,2)$，C，D 为适当维数的常数矩阵，E 一般为奇异矩阵，也可以非奇异。当 E 非奇异时系统(1.1.5)退化为正常系统，即 Fornasini-Marchesini

提出的 2-D 正常系统的第二类 Fornasini-Marchesini 模型(2-D FMM II)[3]。

和 2-D 正常系统一样,这些 2-D 奇异线性离散系统模型之间也有一定的关系:2-D SRM 模型为 2-D SFMM II 模型的特殊情形,而 2-D SRM 模型和 2-D SFMM II 模型均为 2-D SGM 模型的特例。在所讨论的 2-D 奇异系统的这些模型中,2-D SRM 模型起着重要的作用,由于其特殊的边界条件使其是唯一不能被 2-D SGM 模型所直接包含,同时在形式上与 1-D 奇异系统的状态空间模型最为接近。因此,在 2-D 奇异系统的研究中,2-D SRM 模型起着连接 1-D 系统理论的桥梁作用。

4. 2-D ESRM[6]

状态空间方程为

$$A_1x(i+1,j)+A_2x(i,j+1)+A_0x(i,j)=Bu(i,j) \tag{1.1.7a}$$

$$y(i,j)=Cx(i,j)+Du(i,j) \tag{1.1.7b}$$

边界条件为

$$x(i,0)=x_{i0},\quad x(0,j)=x_{0j},\quad i,j=0,1,2,\cdots \tag{1.1.8}$$

其中,$x(i,j)\in\mathbf{R}^n$ 为局部状态向量;$u(i,j)\in\mathbf{R}^m$,$y(i,j)\in\mathbf{R}^p$ 分别为输入向量和输出向量;$A_k(k=0,1,2)$,B,C,D 为适当维数的常数矩阵。

显然,2-D SRM、2-D SFMM II 以及 2-D ESRM 等均为 2-D SGM 的特殊形式。针对 2-D SGM 的概念、性质和定理对于其他几种模型都适用。

1.2　2-D 奇异系统存在唯一解的充要条件

本节针对 2-D SGM 模型,引入正则束条件、特征多项式、系统容许性以及稳定检验多项式等基本概念的定义。在此基础上,给出容许的 2-D 奇异系统在相容边界条件下存在唯一解的充要条件。

对于 2-D SGM 系统(1.1.1)及其边界条件(1.1.2),有如下基本概念:

(1) 2-D 正则束条件:若存在有限复平面上的复数 z 和 w 使系统(1.1.1)的系数矩阵 $E,A_k(k=0,1,2)$满足条件

$$\det(Ezw-A_1z-A_2w-A_0)\neq 0 \tag{1.2.1}$$

则称系统(1.1.1)的系数矩阵满足 2-D 正则束条件。它是 2-D 奇异系统(1.1.1)有解的必要条件。

(2) 特征多项式与系统的容许性:2-D 多项式

$$d(z,w)=\det(Ezw-A_1z-A_2w-A_0)=\sum_{k=0}^{n_1}\sum_{l=0}^{n_2}a_{k,l}z^kw^l \tag{1.2.2}$$

称为 2-D SGM 系统(1.1.1)的特征多项式。

若 2-D SGM 系统(1.1.1)满足条件(1.2.1),且式(1.2.2)中 $a_{n_1,n_2} \neq 0$,则称 $d(z,w)$ 为容许的。此时,相应地称 2-D SGM 系统(1.1.1)是容许的。

显然,容许系统一定满足正则束条件(1.2.1)。

对 1-D 奇异系统来说,正则束条件和系统容许性是等价的,因为 1-D 系统至多只有极点而没有本性奇点。然而对 2-D 奇异系统来说,系统容许性比正则束条件要强得多:容许的系统至多只有极点,系统不容许意味着系统存在本性奇点。这是 1-D 和 2-D 奇异系统理论的一个重要区别。可以证明:容许的奇异系统其状态响应公式才是唯一的,而不容许奇异系统的状态响应公式一般不唯一。在某种意义下,不容许系统是不适定的(ill-posed)。本书仅关注容许系统。

(3) 稳定检验多项式:称 2-D 多项式 $p(z,w)=\det(E-A_1w-A_2z-A_0zw)$ 为系统(1.1.1)的稳定检验多项式。

为了给出 2-D 奇异系统是容许的充要条件,需要引入下面几个引理:

引理 1.2.1[7] 设 $p(z,w)$ 为 2-D 多项式,且 $p(z,0)$ 和 $p(0,w)$ 是 1-D 非零多项式,亦即 $p(z,0)\neq 0$ 且 $p(0,w)\neq 0$,则下列命题等价:

(i) $p(0,0)=0$;

(ii) 任给 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,使得对所有的 $0<|\beta|<\delta$,在 $0<|\alpha|<\varepsilon$ 内存在 $\alpha=\alpha(\beta)$,使 $p(\alpha,\beta)=0$;

(iii) 任给 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,使得对所有的 $0<|\alpha|<\delta$,在 $0<|\beta|<\varepsilon$ 内存在 $\beta=\beta(\alpha)$,使 $p(\alpha,\beta)=0$。

证明 显然 $p(z,w)$ 可以表示为

$$p(z,w) = zq(z,w) + p(0,w) \tag{1.2.3}$$

其中,$q(z,w)$ 是一个合适的 2-D 多项式。现在考虑 $d_w(z)=p(z,w)$ 作为系数含参数 w 的变量为 z 的非零 1-D 多项式,则 $d_w(z)$ 的所有系数是 w 的连续函数。

(i)⇒(ii)。若 $p(0,0)=0$,即 $z=0$ 是 1-D 多项式 $d_0(z)=p(z,0)$ 的根,则由 1-D 多项式零点关于系数的连续性得:对任给 $\varepsilon>0$,存在充分小的 $\delta_1>0$,使得对所有的 $0<|\beta|<\delta_1$,存在 $\alpha=\alpha(\beta)$ 满足 $0<|\alpha|<\varepsilon$ 且 $p(\alpha,\beta)=0$。

注意到 1-D 多项式 $p(0,w)$ 不恒等于 0,因此,存在 $\delta_2>0$,使得对所有的 $0<|\beta|<\delta_2$,$p(0,\beta)\neq 0$。令 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$,即得(ii)。

(ii)⇒(i)。证明只是 $p(z,w)$ 连续性的平凡结论。

从而命题(i)与(ii)等价,类似可得命题(i)与(iii)等价。证毕。

引理 1.2.2[7] 令 $p(z,w)$ 为 2-D 多项式,若 $p(z,w)$ 可以表示为

$$p(z,w) = z^{n_1} w^{n_2} \bar{p}(z,w) \tag{1.2.4}$$

其中,$n_1,n_2>0$ 为整数,而 2-D 多项式 $\bar{p}(z,w)$ 满足 $\bar{p}(z,0)\neq 0$ 且 $\bar{p}(0,w)\neq 0$。

则对给定 $r>0$,下列命题等价:

(i) $p(z,w)\neq 0(0<|z|\leqslant r,0<|w|\leqslant r)$;

(ii) $\bar{p}(z,w)\neq 0(|z|\leqslant r,|w|\leqslant r)$。

证明 注意到由式(1.2.4)可以直接得出(ii)⇒(i),下面只证(i)⇒(ii)。假定(i)成立,则由式(1.2.4)易知

$$\bar{p}(z,w)\neq 0,\quad 0<|z|\leqslant r,0<|w|\leqslant r \tag{1.2.5}$$

因此由引理1.2.1知 $\bar{p}(0,0)\neq 0$。由 $\bar{p}(z,w)$ 的连续性,可知存在 $r_0>0$,使得

$$\bar{p}(z,w)\neq 0,\quad |z|\leqslant r_0,|w|\leqslant r_0 \tag{1.2.6}$$

令 r_1 为使上式成立的 r_0 的上确界,则必有 $r_1\geqslant r$。事实上,如果 $r_1<r$,则式(1.2.5)和式(1.2.6)意味着存在 $r_1\leqslant|\alpha_0|<r,r_1\leqslant\beta_0<r$,使得

$$\bar{p}(\alpha_0,0)=0\quad 或\quad \bar{p}(0,\beta_0)=0 \tag{1.2.7}$$

不失一般性,假定 $\bar{p}(\alpha_0,0)=0$。注意到 $\bar{p}(z,0)$ 为非零多项式,故由1-D多项式的根与系数的连续性定理,对 $\varepsilon_0=\min\{r-|\alpha_0|,|\alpha_0|\}$,有 $r>\delta_0>0$,使得对任意的 $0<|\beta|<\delta_0$,存在 $\alpha=\alpha(\beta)$ 满足 $|\alpha-\alpha_0|<\varepsilon_0$ 且 $\bar{p}(\alpha,\beta)=0$。注意到 $0<|\beta|<r,0\leqslant-\varepsilon_0+|\alpha_0|<|\alpha|<|\alpha_0|+\varepsilon_0\leqslant r$,矛盾。证毕。

引理1.2.3[7] 令 $p(z,w)=\det(E-A_1w-A_2z-A_0zw)$ 为稳定检验多项式,如果 $p(z,w)$ 与 $\bar{p}(z,w)$ 满足式(1.2.4),则系统(1.1.1)容许的充要条件为 $\bar{p}(0,0)\neq 0$。

证明 由特征多项式 $d(z,w)$ 和稳定检验多项式 $p(z,w)$ 的定义可得

$$d(z,w)=z^{n-n_1}w^{n-n_2}\bar{p}(z^{-1},w^{-1})$$

这意味着 $d(z,w)$ 是容许的当且仅当 $\bar{p}(0,0)\neq 0$。证毕。

推论1.2.1[7] 如果当 $\det E=0$ 时,$E-sA_1$ 和 $E-sA_2$ 都是1-D正则束,即存在复数 s_k 使得 $\det(E-s_kA_k)\neq 0(k=1,2)$,则系统(1.1.1)是不容许的。

证明 令 $E-sA_1$ 和 $E-sA_2$ 都是正则束,则 $p(0,w)=\det(E-wA_1)$ 和 $p(z,0)=\det(E-zA_2)$ 都是1-D非零多项式。因此 $p(z,w)=\bar{p}(z,w)$,注意到 $p(0,0)=0$,由引理1.2.3,定理可证。

引理1.2.4[7] 令 $p(z,w)=\det(E-A_1w-A_2z-A_0zw)$,则对任意的 $r>0$,下列命题等价:

(i) $p(z,w)\neq 0(0<|z|<r,0<|w|<r)$;

(ii) Laurent 展式

$$D^{-1}(z,w)=(Ezw-A_1z-A_2w-A_0)^{-1}=\sum_{p=-n_1}^{\infty}\sum_{q=-n_2}^{\infty}T_{pq}z^{-p}w^{-q} \tag{1.2.8}$$

成立，且在 $0<|z^{-1}|<r, 0<|w^{-1}|<r$ 是解析的。其中整数 $0\leqslant n_k\leqslant n(k=1,2)$。

(iii) 存在 $n_1, n_2\leqslant n$，使函数矩阵

$$G(z^{-1},w^{-1}) = z^{-n_1}w^{-n_2}D^{-1}(z,w) \tag{1.2.9}$$

在 $|z^{-1}|<r, |w^{-1}|<r$ 内解析。

证明 (ii)⇒(i)。设展式(1.2.8)成立，且在 $0<|z^{-1}|<r, 0<|w^{-1}|<r$ 内解析，即 2-D 矩阵函数

$$D^{-1}(z,w) = z^{-1}w^{-1}\mathrm{adj}(E-w^{-1}A_1-z^{-1}A_2-A_0w^{-1}z^{-1})/p(z^{-1},w^{-1}) \tag{1.2.10}$$

在 $0<|z^{-1}|<r, 0<|w^{-1}|<r$ 内解析，这意味着

$$p(z,w)\neq 0,\quad 0<|z|<r, 0<|w|<r \tag{1.2.11}$$

(i)⇒(iii)。设式(1.2.11)成立，分解

$$p(z,w) = z^{n_1}w^{n_2}\bar{p}(z,w) \tag{1.2.12}$$

由引理 1.2.2 知

$$\bar{p}(z,w)\neq 0,\quad |z|<r,\ |w|<r \tag{1.2.13}$$

这意味着函数矩阵(1.2.9)在 $|z^{-1}|<r, |w^{-1}|<r$ 内解析。

(iii)⇒(ii)。设矩阵(1.2.9)在 $|z^{-1}|<r, |w^{-1}|<r$ 内解析，即它可以唯一展开为 2-D 级数

$$G(z^{-1},w^{-1}) = \sum_{p=-n_1}^{\infty}\sum_{q=-n_2}^{\infty}T_{pq}z^{-p-n_1}w^{-q-n_2} \tag{1.2.14}$$

由式(1.2.13)，唯一的 Laurent 展式(1.2.8)可以由式(1.2.14)得到，且它在 $0<|z^{-1}|<r, 0<|w^{-1}|<r$ 内解析。证毕。

下面的定理给出了 2-D 奇异系统是容许的又一充要条件。

定理 1.2.1[2] 设 2-D 矩阵束的逆的 Laurent 展式为

$$D^{-1}(z,w) = (Ezw-A_1z-A_2w-A_0)^{-1} = \sum_{p=-n_1}^{\infty}\sum_{q=-n_2}^{\infty}T_{pq}z^{-p}w^{-q} \tag{1.2.15}$$

则 2-D SGM 系统(1.1.1)是容许的当且仅当 $n_1, n_2<\infty$，且存在 $r>0$，使该 Laurent 展式在 $(0<|z|\leqslant r, 0<|w|\leqslant r)$ 是解析的。

证明 设 $\bar{p}(z,w)$ 由引理 1.2.3 所定义，由 $\bar{p}(z,w)$ 的连续性和引理 1.2.3 得系统(1.1.1)是容许的当且仅当存在 $r>0$，使得 $\bar{p}(z,w)\neq 0(0<|z|\leqslant r, 0<|w|\leqslant r)$，再由引理 1.2.4 即得。证毕。

例 1.2.1[7] 考虑如下的数量系统：

$$\begin{aligned} &x(i+1,j) = \alpha x(i,j+1),\quad \alpha>1 \\ &x(i,0) = x_{i,0},\quad x(0,j) = x_{0,j} \end{aligned} \tag{1.2.16}$$

显然，该系统满足 2-D 正则束条件，是可解的。但是由容许的定义，其特征多项式 $d(z,w)=-z+\alpha w$ 不是容许的。此时对任意的 $r>0$，2-D 矩阵束 $(Ezw-zA_1-wA_2-A_0)^{-1}=1/(-z+\alpha w)$ 在 $0<|z^{-1}|<r, 0<|w^{-1}|<r$ 内不是解析的。

对正常系统来讲，边界条件可以任意取，但是奇异系统的边界条件有相容与不相容之分。当输入 $u(i,j)$ 和边界条件 $x_{i,0}, x_{0,j}$ 相容时，Kaczorek 给出了 2-D 奇异系统存在唯一解的充要条件[1]。

考虑 2-D SGM 系统(1.1.1)，对矩阵 E，必定存在非奇异方阵 P,Q 使得

$$PEQ=\begin{bmatrix} I_{n_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{1.2.17}$$

其中，$I_{n_1}\in\mathbf{R}^{n_1\times n_1}$ 为单位矩阵。相应记

$$PA_kQ=\begin{bmatrix} A_{11}^k & A_{12}^k \\ A_{21}^k & A_{22}^k \end{bmatrix},\quad PB_k=\begin{bmatrix} B_1^k \\ B_2^k \end{bmatrix},\quad k=0,1,2 \tag{1.2.18}$$

令

$$\begin{aligned} A_{11}&=[A_{11}^0\quad A_{11}^1\quad A_{11}^2],\quad A_{12}=[A_{12}^0\quad A_{12}^1\quad A_{12}^2],\quad B_1=[B_1^0\quad B_1^1\quad B_1^2] \\ A_{21}&=[A_{21}^0\quad A_{21}^1\quad A_{21}^2],\quad A_{22}=[A_{22}^0\quad A_{22}^1\quad A_{22}^2],\quad B_2=[B_2^0\quad B_2^1\quad B_2^2] \end{aligned}$$

再令

$$Q^{-1}=\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix}$$

其中，Q_1, Q_2 分别为 $n_1\times n$ 和 $n_2\times n$ 的实矩阵。再记

$$x_1(i,j)=Q_1x(i,j),\quad x_2(i,j)=Q_2x(i,j),\quad i,j\geqslant 0$$

则

$$x(i,j)=Q\begin{bmatrix} x_1(i,j) \\ x_2(i,j) \end{bmatrix},\quad x_1(i,j)\in\mathbf{R}^{n_1}, x_2(i,j)\in\mathbf{R}^{n_2}, n_1+n_2=n$$

用矩阵 P 左乘系统(1.1.1)得

$$x_1'=A_{11}x_1+A_{12}x_2+B_1u \tag{1.2.19a}$$

$$0=A_{21}x_1+A_{22}x_2+B_2u \tag{1.2.19b}$$

其中

$$x_1'=x_1(i+1,j+1),\quad x_1=\begin{bmatrix} x_1(i,j) \\ x_1(i+1,j) \\ x_1(i,j+1) \end{bmatrix}$$

$$x_2=\begin{bmatrix}x_2(i,j)\\x_2(i+1,j)\\x_2(i,j+1)\end{bmatrix},\quad u=\begin{bmatrix}u(i,j)\\u(i+1,j)\\u(i,j+1)\end{bmatrix}$$

另记

$$\mathrm{diag}\{Q_k,Q_k,Q_k\}=Q_{dk},\quad k=1,2$$

则(1.2.19b)可改写为$(A_{21}Q_{d1}+A_{22}Q_{d2})x+B_2u=0$,它是局部状态向量和输入向量必须满足的约束条件。边界约束条件为

$$(A_{21}Q_{d1}+A_{22}Q_{d2})\begin{bmatrix}x(i,0)\\x(i+1,0)\\x(i,1)\end{bmatrix}+B_2\begin{bmatrix}u(i,0)\\u(i+1,0)\\u(i,1)\end{bmatrix}=0,\quad i\geqslant 0\tag{1.2.20a}$$

$$(A_{21}Q_{d1}+A_{22}Q_{d2})\begin{bmatrix}x(0,j)\\x(1,j)\\x(0,j+1)\end{bmatrix}+B_2\begin{bmatrix}u(0,j)\\u(1,j)\\u(0,j+1)\end{bmatrix}=0,\quad j\geqslant 0\tag{1.2.20b}$$

2-D SGM 系统(1.1.1)的边界条件(1.1.2)称为相容边界条件是指它满足式(1.2.20)。

1.3 2-D 奇异系统的状态响应公式

本节首先介绍 2-D SGM 系统(1.1.1)在边界条件(1.1.2)下的状态响应公式,然后介绍 2-D SRM 系统(1.1.3)在边界条件(1.1.4)下的状态响应公式。

1.3.1 2-D SGM 的状态响应公式

Kaczorek 利用 2-D z-变换给出了 2-D SGM 系统(1.1.1)在边界条件(1.1.2)下的状态响应公式。令 $F(z,w)$为函数 $f(i,j)$的 2-D z-变换,其中当 $i<0$ 或 $j<0$ 时,$f(i,j)=0$,则

$$F(z,w)=Z[f(i,j)]=\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}f(i,j)z^{-i}w^{-j}\tag{1.3.1}$$

引理 1.3.1[2] 如果 $F(z,w)=Z[f(i,j)]$,则

$$\begin{aligned}&Z[f(i+1,j)]=z[F(z,w)-F(0,w)]\\&Z[f(i,j+1)]=w[F(z,w)-F(z,0)]\\&Z[f(i+1,j+1)]=zw[F(z,w)-F(z,0)-F(0,w)+f(0,0)]\end{aligned}\tag{1.3.2}$$

其中

$$F(z,0)=\sum_{i=0}^{\infty}f(i,0)z^{-i},\quad F(0,w)=\sum_{j=0}^{\infty}f(0,j)w^{-j}$$

考虑 2-D SGM 系统(1.1.1)

$$Ex(i+1,j+1)=A_0x(i,j)+A_1x(i+1,j)+A_2x(i,j+1)+B_0u(i,j)+B_1u(i+1,j)+B_2u(i,j+1)$$

$$y(i,j)=Cx(i,j)+Du(i,j)$$

边界条件为

$$x(i,0)=x_{i0},\quad x(0,j)=x_{0j},\quad i,j=0,1,2,\cdots$$

对系统(1.1.1)作 2-D z-变换，得

$$X(z,w)=D^{-1}(z,w)[(B_0+B_1z+B_2w)U(z,w)-B_1zU(0,w)-B_2wU(z,0)-A_1zX(0,w)-A_2wX(z,0)+Ezw(X(z,0)+X(0,w)-x(0,0))] \tag{1.3.3}$$

其中，$X(z,w)$，$U(z,w)$，$U(z,0)$，$U(0,w)$，$X(z,0)$，$X(0,w)$分别为 $x(i,j)$，$u(i,j)$，$u(i,0)$，$u(0,j)$，$x(i,0)$，$x(0,j)$的 2-D z-变换；$D(z,w)=(Ezw-A_1z-A_2w-A_0)$。

注意到对容许 2-D 奇异系统来说，由定理 1.2.1 知

$$D^{-1}(z,w)=\sum_{p=-n_1}^{\infty}\sum_{q=-n_2}^{\infty}T_{pq}z^{-p}w^{-q},\quad n_1\leqslant n,n_2\leqslant n \tag{1.3.4}$$

从而有

$$\sum_{p=-n_1}^{\infty}\sum_{q=-n_2}^{\infty}D(z,w)T_{pq}z^{-p}w^{-q}=\sum_{p=-n_1}^{\infty}\sum_{q=-n_2}^{\infty}T_{pq}D(z,w)z^{-p}w^{-q}=I$$

比较上式两端系数得

$$ET_{pq}=\begin{cases}A_0T_{00}+A_1T_{10}+A_2T_{01}+I, & p=q=1\\ A_0T_{p-1,q-1}+A_1T_{p,q-1}+A_2T_{p-1,q}, & p\neq 1\text{ 和(或)}q\neq 1\\ 0, & p<-n_1\text{ 和(或)}q<-n_2\end{cases} \tag{1.3.5}$$

由

$$\sum_{p=-n_1}^{\infty}\sum_{q=-n_2}^{\infty}D(z,w)T_{pq}z^{-p}w^{-q}=\sum_{p=-n_1}^{\infty}\sum_{q=-n_2}^{\infty}T_{pq}D(z,w)z^{-p}w^{-q}=I$$

还知

$$A_0T_{p-1,q-1}+A_1T_{p,q-1}+A_2T_{p-1,q}=T_{p-1,q-1}A_0+T_{p,q-1}A_1+T_{p-1,q}A_2 \tag{1.3.6}$$

将式(1.3.4)代入式(1.3.3)，有

$$X(z,w)=\sum_{p=-n_1}^{\infty}\sum_{q=-n_2}^{\infty}T_{pq}z^{-p}w^{-q}[(B_0+B_1z+B_2w)U(z,w)-B_1zU(0,w)-B_2wU(z,0)-A_1zX(0,w) \tag{1.3.7}$$