离散数学

王　岚　主编

赵宝江　主审

清华大学出版社

离散数学

王 岚 主编

孙 杰 金玉苹 季丹丹 张型岱 副主编

清华大学出版社

北京

内容简介

本书包括离散数学课程的标准内容：数理逻辑中的命题逻辑、一阶谓词逻辑、集合论、代数系统、图论等.特别是丰富了集合论的内容，将数学归纳法、计数以及组合论中的一些广泛应用的方法纳入集合论中.另外，书末附录中还讲述了离散数学在关系数据库中的应用.

本书力求做到简洁明了、易懂易学，注重理论与实际的结合，注意与后续课程的衔接.适合作为普通高等院校数学、计算机科学与技术等专业的本科生教材，也可供高职高专院校的师生参考使用.

图书在版编目（CIP）数据

离散数学／王岚主编；孙杰等副主编．—北京：清华大学出版社，2012.4
ISBN 978-7-302-28181-8

Ⅰ.①离…　Ⅱ.①王…　②孙…　Ⅲ.①离散数学－高等学校－教材　Ⅳ.①O158

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 029940 号

责任编辑：刘　颖　赵从棉
封面设计：常雪影
责任校对：王淑云
责任印制：何　芊

出版发行：清华大学出版社
网　　址：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
地　　址：北京清华大学学研大厦 A 座　　**邮　　编**：100084
社 总 机：010-62770175　　**邮　　购**：010-62786544
投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质 量 反 馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 刷 者：北京四季青印刷厂
装 订 者：三河市溧源装订厂
经　　销：全国新华书店
开　　本：185mm×230mm　　**印　　张**：16.25　　**字　　数**：354 千字
版　　次：2012 年 4 月第 1 版　　**印　　次**：2012 年 4 月第 1 次印刷
印　　数：1～3000
定　　价：29.80 元

产品编号：039631-01

参考文献

1. 傅彦.离散数学基础及应用.成都：电子科技大学出版社，2000
2. 耿素云等.离散数学.北京：高等教育出版社，2004
3. 胡冠章.应用近世代数.第2版.北京：清华大学出版社，1999
4. 胡世华，陆钟万.数理逻辑基础.北京：科学出版社，1983
5. Dossey J A.等，章炯民等译.离散数学.北京：机械工业出版社，2007
6. 卢开澄，卢华明.组合数学.北京：清华大学出版社，1999
7. Rosen K H著，袁崇义等译.离散数学及其应用(英文版).第6版.北京：机械工业出版社，2010
8. Johnoson baugh R.离散数学(英文版).第7版.北京：电子工业出版社，2009
9. 马振华.现代应用数学手册.离散数学卷.北京：清华大学出版社，2002
10. 古德斯坦因 RL.布尔代数.北京：科学出版社，1975
11. 石纯一等.数理逻辑与集合论.第2版.北京：清华大学出版社，2000
12. Feil T，Krone J著，张明军，许华译.离散数学(双语版).北京：清华大学出版社，2005
13. 辛普森著，冯速译.离散数学导学.北京：机械工业出版社，2005
14. 王国俊.非经典数理逻辑与近似推理.北京：科学出版社，2001
15. 王捍贫.数理逻辑.北京：北京大学出版社，1997
16. 王宪钧.数理逻辑引论.第2版.北京：北京大学出版社，1998
17. 王义和.离散数学引论.哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2000
18. 王元元.计算机科学中的逻辑学.北京：科学出版社，1989
19. 张禾瑞.近世代数基础.北京：高等教育出版社，2004
20. 徐洁磐.离散数学导论.北京：高等教育出版社，1997
21. 徐洁磐等.离散数学及其在计算机中的应用.北京：人民邮电出版社，2005
22. 杨炳儒.离散数学.北京：人民邮电出版社，2006
23. 张健.逻辑公式的可满足性判定.北京：科学出版社，2000
24. 张型岱等.离散数学.哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2002
25. 左孝凌等.离散数学.上海：上海科技文献出版社，1982
26. 朱一清.离散数学.北京：电子工业出版社，2001

前言

离散数学是现代数学的一个重要分支，是数学与应用数学、信息与计算科学及计算机科学与技术等专业的一门核心基础课程．旨在培养学生的抽象思维能力和逻辑推理能力，为后续课程打好扎实的基础，在数学和计算机等专业领域中占有极其重要的地位．

本书的编写是以最新的人才培养方案及课程大纲为依据，以培养学生综合能力为出发点，力求突出课程的实验与实践，更新课程的教学理念和方法，实现开拓学生创新能力的目的．本书包括 7 章及 1 个附录，所涉及的内容主要是数理逻辑、集合论、代数结构和布尔代数、图论等四方面的内容．对于有些超出教学要求的内容，均以“*”标志．限于篇幅和教学的要求，有些定理不予证明，但书后注明参考文献以便查阅．同时，本书通过配备难度适中的典型例题，对重要概念、性质、理论给予了比较详细的说明，力图把离散数学的经典理论和思想介绍给学生．本书还配备了适量的练习题，以培养学生解决问题的能力．

本书区别于其他同类书籍的鲜明特点是：将组合论、可计数理论的部分基础知识放进本书中，从而在内容上具有新颖性和实用性．它既注重基础与能力的结合、理论与实践的结合，又关注当前与未来的结合、专业与普及的结合．全书具有结构合理、内容系统、阐释新颖的特点．本书是在所有编者两年多的共同努力下，在多年教学讲义的基础上精心编写而成，力求做到取材详略得当，叙述清楚流畅，论证科学严谨，释例、练习精选独到．因此，全书具有较好的科学性、应用性和可读性．

本书第 1～3 章由孙杰编写，第 4、5、7 章及附录由金玉苹编写，第 6 章由季丹丹编写，王岚和张型岱教授提供了全书基础材料及最后的校对整理工作．本书的出版得到了牡丹江师范学院教学建设经费的资助，同时还得到了牡丹江师范学院教学改革项目(11-XJ12018)经费的资助．本书已经被评为牡丹江师范学院“十二五”规划教材的重点建设教材．在此，编者向那些给予我们帮助的各级领导、老师、同事表示衷心的感谢！由于编者水平有限，疏漏之处在所难免，还请各位读者不吝批评指正．

王　岚

2012 年 1 月于牡丹江

目录

第1章 集合论

集合论是由德国数学家康托(Cantor)在19世纪70～80年代创立的.康托提出了基数、序数、超穷数和良序集等理论,奠定了集合论的深厚基础,因此,康托被誉为集合论的创始人.集合论发展至今早已成为现代数学的独立分支,同时它也是各个数学分支的共同语言和基础.

由于集合论的语言适合于描述和研究离散对象及其关系,所以也是计算机科学与工程的理论基础,在程序设计、关系数据库、排队论、开关理论、形式语言和自动机理论等学科领域中都有重要的应用.

1.1 集合的概念与运算

1.1.1 集合的概念

在研究问题时,通常把具有某种性质的事物作为一个整体来研究,这个整体称为**集合**(set),其中的每个事物称为集合的**元素**(element).常用英文大写字母 A,B,C 等表示集合,以英文小写字母 a,b,c 等表示集合的元素.$a\in A$ 表示 a 是 A 的元素,$a\notin A$ 表示 a 不是 A 的元素.

定义 1.1.1 一个集合若由有限个元素组成,则称为**有限集**(finite set),否则称为**无限集**(infinite set).特别地,元素个数为零的集合称为**空集**(empty set),记作"$\varnothing$".用符号"$|A|$"表示有限集 A 的元素个数.

常见的集合表示法分为枚举法和特性描述法.枚举法是将集合的元素一一列出,如集合 A 由元素 a,b,c,d 组成,可记为 $A=\{a,b,c,d\}$.特性描述法是用集合的元素所具有的共同性质来刻画集合,如 $A=\{x\mid x$ 是正偶数$\}$.一般集合可用 $A=\{x\mid P(x)\}$表示,其中 $P(x)$ 表示事物 x 满足性质 P,集合 A 由满足性质 P 的所有元素组成.

注 (1) 集合的元素具有确定性,即元素 $a\in A$ 或 $a\notin A$ 二者必居且仅居其一.

(2) 集合的确定不应引起悖论,如 $A=\{x\mid x\notin A\}$不能定义成为一个集合.

(3) 集合中的元素具有无序性,如集合$\{a,b\}=\{b,a\}$.

1.1.2　集合之间的关系

定义 1.1.2　集合间的关系有如下定义：

(1) 设 A,B 为集合，$A\subseteq B$ 表示 A 是 B 的**子集**(subset)，即如果 $a\in A$，则 $a\in B$.

(2) 设 A,B 为集合，$A\subset B$ 表示 A 是 B 的**真子集**(proper subset)，即 $A\subseteq B$ 且存在 $b\in B$ 使 $b\notin A$.

(3) 设 A,B 为集合，$A=B$ 表示 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$，即 A 和 B 元素相同，称作 A 与 B 相等.

(4) 称 $P(X)=\{A\mid A\subseteq X\}$ 为 X 的**幂集**(power set)，即 X 的所有子集组成的集合，有时也记为 2^X.

根据讨论问题的需要，常设一个充分大的集合为**全集**(universal set)，也称为基本集，所讨论的集合均为这个集合的子集.

注　(1) 设 X 含有 n 个元素，则 X 有 2^n 个子集，即 $P(X)$ 含有 2^n 个元素.

(2) 空集是任一集合的子集.

(3) 包含关系满足以下性质：

① $A\subseteq A$；　　　　　　　　(自反性)

② 若 $A\subseteq B,B\subseteq A$，则 $A=B$；　(反对称性)

③ 若 $A\subseteq B,B\subseteq C$，则 $A\subseteq C$.　(传递性)

例 1.1.1　设 $A=\{a,b\}$，求 $P(A)$.

解　$P(A)=\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$.

注　$2^{\varnothing}=\{\varnothing\}$，要区分 $\varnothing$ 与 $\{\varnothing\}$，其中 $\varnothing$ 表示空集，其中没有任何元素，而 $\{\varnothing\}$ 则表示以空集 $\varnothing$ 为元素的一个集族，即 $\varnothing\in\{\varnothing\}$.

一般用 $\mathbb{N}$，$\mathbb{Z}$，$\mathbb{Q}$，$\mathbb{R}$，$\mathbb{C}$ 分别表示**自然数集**(natural set)，**整数集**(integer set)，**有理数集**(quotient set)，**实数集**(real set)，**复数集**(complex set)，它们满足 $\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$.

1.1.3　集合的运算

集合有并、交、差、补、对称差等运算.

定义 1.1.3　设 A,B 为集合，A 与 B 的**并集**(union set)记作 $A\cup B$，其定义式为 $A\cup B=\{x\mid x\in A$ 或 $x\in B\}$.

定义 1.1.4　设 A,B 为集合，A 与 B 的**交集**(intersection set)记作 $A\cap B$，其定义式为 $A\cap B=\{x\mid x\in A$ 且 $x\in B\}$.

定义 1.1.5　设 A,B 为集合，A 与 B 的**差集**(relative complement set)记作 $A-B$ 或 $A\backslash B$，其定义式为 $A-B=\{x\mid x\in A$ 且 $x\notin B\}$.

定义 1.1.6　设 X 为基本集，集合 A 的**补集**(supplementary set)记作 A^c 或 $\overline{A}$，其定义式为 $A^c=X-A=\{x\mid x\notin A$ 且 $x\in X\}$.

定义 1.1.7　设 A,B 为集合，A 与 B 的**对称差**(symmetry difference)记作 $A\oplus B$，其定

义式为 $A\oplus B=(A-B)\cup(B-A)$. 对称差也称为**布尔和**.

集合的运算可以用**文氏图**表示. 文氏图的构造方法如下:

E 是全集,圆 A,B 的内部为集合 A,B,如果没有关于集合不交的说明,任何两圆应彼此相交. 图 1.1.1 中的阴影区域表示集合 A,B 在相应运算下组成的集合.

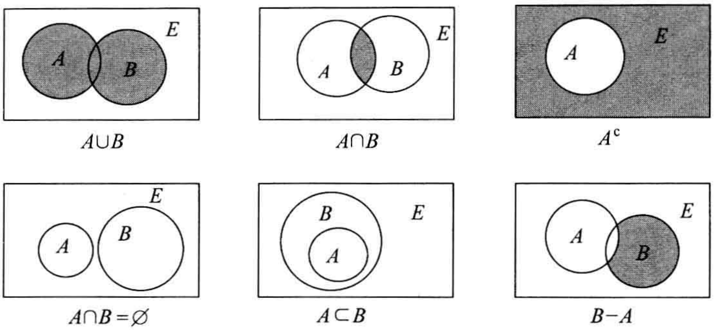

图 1.1.1

1.1.4 集合的运算性质

设 X 为基本集,A,B,C 为 X 的子集,$\cup,\cap,{}^{c}$ 分别为集合的并、交、补运算,则有性质:

(1) $A\cup B=B\cup A, A\cap B=B\cap A$; (交换律)

(2) $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$,
$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$; (结合律)

(3) $A\cup\varnothing=A, A\cap X=A$; (同一律)

(4) $A\cup A^{c}=X, A\cap A^{c}=\varnothing$; (互补律)

(5) $A\cup(A\cap B)=A, A\cap(A\cup B)=A$; (吸收律)

(6) $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C), A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$; (分配律)

(7) $A\cup A=A, A\cap A=A$; (幂等律)

(8) $A\cup X=X, A\cap\varnothing=\varnothing$; (零律)

(9) $(A^{c})^{c}=A$; (对合律)

(10) $(A\cup B)^{c}=A^{c}\cap B^{c}, (A\cap B)^{c}=A^{c}\cup B^{c}$; (德·摩根律)

如果 $B_t\in P(X)(t\in T)$,其中 T 为指标集,(6)和(10)有下面更一般的形式:

(6′) $A\cup\left(\bigcap_{t\in T}B_t\right)=\bigcap_{t\in T}(A\cup B_t), A\cap\left(\bigcup_{t\in T}B_t\right)=\bigcup_{t\in T}(A\cap B_t)$;

(10′) $\left(\bigcup_{t\in T}B_t\right)^{c}=\bigcap_{t\in T}B_t^{c}, \left(\bigcap_{t\in T}B_t\right)^{c}=\bigcup_{t\in T}B_t^{c}$.

其中 $\bigcup_{t\in T}B_t=\{x\mid \exists t\in T, x\in B_t\}, \bigcap_{t\in T}B_t=\{x\mid \forall t\in T, x\in B_t\}$.

我们仅证明(10′)的前式，其他由读者完成.

证明 任取 $x\in(\bigcup_{t\in T}B_t)^c$，$x\notin\bigcup_{t\in T}B_t$，即 $\forall t\in T$，$x\notin B_t$，有 $\forall t\in T$，$x\in B_t^c$，即 $x\in\bigcap_{t\in T}B_t^c$，因此

$$(\bigcup_{t\in T}B_t)^c\subseteq\bigcap_{t\in T}B_t^c. \tag{1.1.1}$$

任取 $x\in\bigcap_{t\in T}B_t^c$，$\forall t\in T$，$x\in B_t^c$，于是 $\forall t\in T$，$x\notin B_t$，即 $x\notin\bigcup_{t\in T}B_t$，有 $x\in(\bigcup_{t\in T}B_t)^c$，因此

$$\bigcap_{t\in T}B_t^c\subseteq(\bigcup_{t\in T}B_t)^c. \tag{1.1.2}$$

由式(1.1.1)、(1.1.2)证得等式成立.

由以上性质知，在任何集合运算的公式中，将 $\cup$ 与 $\cap$ 互换，公式仍然成立. 这就是集合论的对偶原则.

定理 1.1.1(包含排斥原理) 设 S 为有穷集合，$P_1,P_2,\cdots,P_m$ 是 m 个性质. S 中的任何元素 x 或者具有性质 P_i 或者不具有性质 $P_i(i=1,2,\cdots,m)$，两种情况必居其一. 令 A_i 表示具有性质 P_i 的元素构成的子集，则 S 中不具有性质 $P_1,P_2,\cdots,P_m$ 的元素个数为

$$\begin{aligned}&|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\cdots\cap\overline{A_m}|\\ =&|S|-\sum_{i=1}^{m}|A_i|+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant m}|A_i\cap A_j|-\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant m}|A_i\cap A_j\cap A_k|+\\ &\cdots+(-1)^m|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_m|.\end{aligned}$$

推论 S 中至少具有一条性质的元素数为

$$\begin{aligned}&|A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_m|\\ =&\sum_{i=1}^{m}|A_i|-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant m}|A_i\cap A_j|+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant m}|A_i\cap A_j\cap A_k|-\\ &\cdots+(-1)^{m-1}|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_m|.\end{aligned}$$

当 $m=2$ 时，

$$|A_1\cup A_2|=|A_1|+|A_2|-|A_1\cap A_2|;$$

当 $m=3$ 时，

$$\begin{aligned}|A_1\cup A_2\cup A_3|=&|A_1|+|A_2|+|A_3|-|A_1\cap A_2|-|A_1\cap A_3|-\\ &|A_2\cap A_3|+|A_1\cap A_2\cap A_3|.\end{aligned}$$

一般包含排斥原理又称为容斥原理.

例 1.1.2 有 120 个学生参加考试，试卷中有 3 道题 A,B,C，考试结果如下：12 个学生 3 道题都做对了，20 个学生做对 A,B 两道题，16 个学生做对 A,C 两道题，28 个学生做对 B,C 两道题，做对 A 题的有 48 个学生，做对 B 题的有 56 个学生，还有 16 个学生一道题也没做对. 求做对了 C 题的学生有多少个？

解 设做对 A 题的学生为 P_1，做对 B 题的学生为 P_2，做对 C 题的学生为 P_3，由题意，

根据容斥原理可知，

$$|P_1\cap P_2\cap P_3|=12,\ |P_1\cap P_2|=20,\ |P_1\cap P_3|=16,\ |P_2\cap P_3|=28,$$
$$|P_1|=48,\ |P_2|=56,\ |\overline{P_1\cup P_2\cup P_3}|=16,$$

所以

$$|P_1\cup P_2\cup P_3|=120-16=104,$$

而

$$|P_1\cup P_2\cup P_3|=|P_1|+|P_2|+|P_3|-|P_1\cap P_2|-|P_1\cap P_3|-|P_2\cap P_3|+|P_1\cap P_2\cap P_3|,$$

因此 $|P_3|=52$，所以做对了 C 题的学生有 52 人.

1.1.5 序偶与笛卡儿积

现实生活中许多事物的出现具有顺序性，所以有序性是普遍存在的现象. 下面引入序偶概念及其性质.

定义 1.1.8 设 A,B 是两集合，$a\in A,b\in B$，称二元序组 (a,b) 为**序偶**(ordered pair)，其中 a 为序偶的第一元素，b 为第二元素.

定义 1.1.9 n 个有序元素 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 组成一 n 元序组，记为 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$. 两个 n 元序组 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 与 $(b_1,b_2,\cdots,b_n)$ 相等，当且仅当对应元素相等.

定义 1.1.10 集合 A,B 的**笛卡儿积**(cartesian product)为 $A\times B=\{(a,b)\mid a\in A, b\in B\}$.

例 1.1.3 $A=\{1,2\}$，$B=\{a,b\}$，求 $A\times B$，$B\times A$.

解 $A\times B=\{(1,a),(1,b),(2,a),(2,b)\}$，$B\times A=\{(a,1),(a,2),(b,1),(b,2)\}$.

一般 $A\times B\neq B\times A$.

注 (1) 设 $A,B\in 2^X$，但 $A\times B\notin 2^X$.

(2) 对于任意集合 A，有 $A\times\varnothing=\varnothing\times A=\varnothing$.

(3) 笛卡儿积运算形式上不满足结合律，即对于任意非空集合 A,B,C，

$$(A\times B)\times C\neq A\times(B\times C).$$

(4) $|A|=m$，$|B|=n$，则 $|A\times B|=mn$.

(5) 笛卡儿积运算对交、并运算满足分配律：

$$A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C),\quad (B\cap C)\times A=(B\times A)\cap(C\times A),$$
$$A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C),\quad (B\cup C)\times A=(B\times A)\cup(C\times A).$$

进一步可以将两个集合上的笛卡儿积概念推广到 n 个集合上.

定义 1.1.11 集合 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的笛卡儿积为

$$A_1\times A_2\times\cdots\times A_n=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid x_1\in A_1,x_2\in A_2,\cdots,x_n\in A_n\}.$$

显然 $|A_1\times A_2\times\cdots\times A_n|=|A_1|\times|A_2|\times\cdots\times|A_n|$.

当 $A_1=A_2=\cdots=A_n=A$ 时，记 $A^n=\underbrace{A\times A\times\cdots\times A}_{n个}$.

例 1.1.4 n 维实空间$\mathbb{R}^n$上的任意一点的坐标是有序笛卡儿积，它的全体可以表示成 n 元序组$\mathbb{R}^n=\{(a_1,a_2,\cdots,a_n)\mid a_i\in\mathbb{R},i=1,2,\cdots,n\}$.

1.2 二元关系

现实世界中存在着各种各样的关系，如父子关系、同事关系、数之间的大小关系等. 一些关系可以用表格的形式清晰地表示出来，例如，表 1.2.1 说明了哪些学生选哪些课程. 例如，Bill 选了计算机课程和艺术课，Mary 选了数学课. 用关系的术语说就是：Bill 与计算机课程和艺术课相关，Mary 和数学课相关.

表 1.2.1 学生与课程的关系

学生	课　程	学生	课　程
Bill	计算机科学	Beth	历史
Mary	数学	Beth	计算机科学
Bill	艺术	Dave	数学

下面介绍二元关系及其相关概念.

1.2.1 二元关系及其表示

定义 1.2.1 设 $R\subseteq A\times B$，称 R 为集合 A 到集合 B 的一个二元**关系**(relation)，若 A 和 B 相等，称 R 为 A 上的二元关系.

若$(x,y)\in R$，记作 xRy，读作“x 对 y 有关系 R”. 若$(x,y)\notin R$，记作 $x\not R y$，读作“x 对 y 没有关系 R”.

令 $\mathrm{dom}(R)=\{x\mid(x,y)\in R$，对某个 $y\in Y\}$，称为 R 的**定义域**(domain).

令 $\mathrm{ran}(R)=\{y\mid(x,y)\in R$，对某个 $x\in X\}$，称为 R 的**值域**(range).

令 $\mathrm{fld}(R)=\mathrm{dom}(R)\cup\mathrm{ran}(R)$，称为 R 的**域**(field).

由定义知二元关系 R 是 $A\times B$ 的子集，R 中的元素是有序对.

定义 1.2.2 对任何集合 A，空集$\varnothing$是 $A\times A$ 的子集，称为空关系，$E_A=A\times A$ 称为**全**(total)关系，$I_A=\{(x,x)\mid x\in A\}$称为**恒等关系**.

例 1.2.1 实数$\mathbb{R}$上的“$\leqslant$”关系可如下定义：

$$\leqslant=\{(x,y)\mid x\in\mathbb{R},y\in\mathbb{R}\text{ 且 }x\leqslant y\}.$$

在平面$\mathbb{R}^2$上可找到满足关系的点集，它是以 $x=y$ 为界的左半平面.

例 1.2.2 令 $X=\{\text{Bill},\text{Mary},\text{Beth},\text{Dave}\}$，$Y=\{$计算机科学，数学，艺术，历史$\}$，则表 1.2.1 表示的二元关系可写为

$$R=\{(\text{Bill},\text{计算机科学}),(\text{Mary},\text{数学}),(\text{Bill},\text{艺术}),(\text{Beth},\text{历史}),(\text{Beth},\text{计算机科学}),(\text{Dave},\text{数学})\}.$$

二元关系的表示法：

1. 集合表示法

二元关系是特殊的集合，用集合表示二元关系，如例 1.2.1.

2. 关系图表示法

当 A,B 为有限集时，用有向图表示 A 到 B 之间的二元关系 R，将 A,B 中的元素作为顶点，若 $(a,b)\in R$，用从 a 到 b 的有向边表示. 当 R 是 A 上的二元关系时，A 中每个元素分别用一个顶点表示，若 $(a,a)\in R$，用从 a 到 a 带箭头的圆圈表示. 这种图称为**关系图**(graph of relation).

例 1.2.3　设 $A=\{P_1,P_2,\cdots,P_6\}$ 是六个程序，它们之间有一种调用关系 R，若 P_i 可调用 P_j，用 $(P_i,P_j)\in R$ 表示. 设 $R=\{(P_1,P_2),(P_2,P_6),(P_5,P_2),(P_3,P_1),(P_3,P_4),(P_4,P_5)\}$，$R$ 的关系图如图 1.2.1 所示.

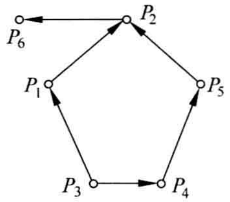

图　1.2.1

3. 二元关系的矩阵表示法

定义 1.2.3　设 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$，$B=\{b_1,b_2,\cdots,b_m\}$ 是两个有限集，R 是从 A 到 B 的一个二元关系，则对应于 R 的**关系矩阵**(matrix of relation)$\boldsymbol{M}_R=(r_{ij})_{n\times m}$，其中，

$$r_{ij}=\begin{cases}1, & \text{当}(a_i,b_j)\in R,\\ 0, & \text{当}(a_i,b_j)\notin R,\end{cases}\quad i=1,2,\cdots,n,j=1,2,\cdots,m.$$

例 1.2.4　在例 1.2.3 中二元关系 R 的关系矩阵 $\boldsymbol{M}_R=\begin{pmatrix}0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&1\\1&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1&0\\0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$.

用有向图表示二元关系比较直观，但复杂的图不便于表示，用矩阵表示二元关系便于计算机处理分析.

1.2.2　二元关系的运算

1. 关系的并、交、差、补运算

由于关系是特殊的集合，有关集合的并、交、差、补运算也适用于二元关系. 设 R,S 都是集合 A 到 B 的二元关系，则

$$R\cup S=\{(x,y)\mid xRy\text{ 或 }xSy\},\quad R\cap S=\{(x,y)\mid xRy\text{ 且 }xSy\},$$
$$R-S=\{(x,y)\mid xRy\text{ 且 }x\not S y\},\quad R^c=\{(x,y)\mid x\not R y\}.$$

由于 $A\times B$ 是相对于 R 的全集，因此，

$$R^c=A\times B-R,\quad R^c\cup R=A\times B,\quad R^c\cap R=\varnothing.$$

2. 复合运算

定义 1.2.4 设 R 是 A 到 B 的二元关系，S 是 B 到 C 的二元关系，$R\circ S$ 表示 R 和 S 的**复合**(composition)，即 $R\circ S=\{(x,z)\mid x\in A,z\in C,且\ \exists y\in B,使(x,y)\in R,(y,z)\in S\}$. 这个复合关系是 A 到 C 的关系.

一般地，$F\circ G\neq G\circ F$. 例如，$F=\{(3,3),(6,2)\}$，$G=\{(2,6)\}$，则 $F\circ G=\{(6,6)\}$，$G\circ F=\{(2,2)\}$，$F\circ G\neq G\circ F$.

例 1.2.5 设 $A=\{a_1,a_2,a_3\}$，$B=\{b_1,b_2,b_3\}$，$C=\{c_1,c_2,c_3\}$，从 A 到 B 的二元关系 $R=\{(a_1,b_1),(a_1,b_2),(a_2,b_2)\}$；从 B 到 C 的二元关系 $S=\{(b_1,c_2),(b_2,c_3),(b_3,c_3)\}$，由此得到从 A 到 C 的二元关系 $R\circ S=\{(a_1,c_2),(a_1,c_3),(a_2,c_3)\}$.

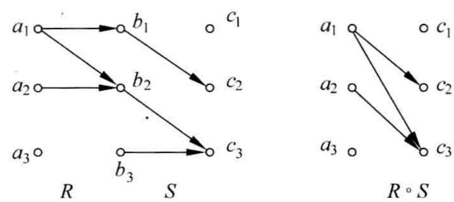

图 1.2.2

这个复合关系的关系图容易作出. 将 a_i 与 c_j 通过 b_r 有边相连者组成 $R\circ S$，如图 1.2.2 所示.

两个二元关系的复合可以用矩阵的运算来表示，这里举例说明. 设 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$，$B=\{b_1,b_2,\cdots,b_m\}$，$C=\{c_1,c_2,\cdots,c_k\}$，R 是从 A 到 B 的二元关系，S 是从 B 到 C 的二元关系，二元关系 R 的关系矩阵 $\boldsymbol{M}_R$ 为 n 行 m 列矩阵，二元关系 S 的关系矩阵 $\boldsymbol{M}_S$ 为 m 行 k 列矩阵，复合关系 $R\circ S$ 的关系矩阵 $\boldsymbol{M}_{R\circ S}$ 为 n 行 k 列矩阵.

例 1.2.6 在例 1.2.5 中关系 R 和关系 S 的关系矩阵分别为 $\boldsymbol{M}_R=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{M}_S=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}$，$R\circ S$ 的关系矩阵为 $\boldsymbol{M}_{R\circ S}=\boldsymbol{M}_R\times\boldsymbol{M}_S=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$.

复合关系是由复合运算所得，它满足结合律.

注 复合关系 $R\circ S$ 的矩阵可以通过 R 和 S 的关系矩阵作矩阵乘法得到. 但运算过程中的加法是逻辑加法，即 $1+1=1+0=0+1=1$，$0+0=0$.

定理 1.2.1 设 R,S,T 分别为集合 A 到 B，B 到 C，C 到 D 的二元关系，则有

$$(R\circ S)\circ T=R\circ(S\circ T).$$

证明 任取 $(a,d)\in(R\circ S)\circ T$，由定义 $\exists c\in C$，有 $(a,c)\in R\circ S$，$(c,d)\in T$，进而 $\exists b\in B$，有 $(a,b)\in R$，$(b,c)\in S$，因为 $(b,c)\in S$，$(c,d)\in T$，故必有 $(b,d)\in S\circ T$；又因 $(a,b)\in R$，$(b,d)\in S\circ T$，故有 $(a,d)\in R\circ(S\circ T)$，因此，$(R\circ S)\circ T\subseteq R\circ(S\circ T)$. 类似可证 $R\circ(S\circ T)\subseteq(R\circ S)\circ T$.

由于复合运算满足结合律，因此可以将复合运算中的括号省略，运算仍有意义. 即

$$(R\circ S)\circ T=R\circ(S\circ T)=R\circ S\circ T.$$

定义 1.2.5 设 R 为 A 上的二元关系，$n\in\mathbb{N}$，则 R 的 n 次幂定义为

$$R^0=\{(x,x)\mid x\in A\}=I_A, R^{n+1}=R^n\circ R.$$

3. 关系的逆运算

定义 1.2.6 设 R 是从 A 到 B 的二元关系，则有 B 到 A 的二元关系 $R^{-1}=\{(b,a)\mid(a,b)\in R\}$，称 R^{-1} 为 R 的**逆关系**(inverse relation).

逆关系也可以用关系图与关系矩阵表示，R^{-1} 的关系图是改变 R 的关系图中所有有向边的方向而得到的. R^{-1} 的关系矩阵 $\boldsymbol{M}_{R^{-1}}$ 是 $\boldsymbol{M}_R$ 的转置.

注 $R\circ R^{-1}\subseteq I_A$($R$ 是 A 上的二元关系).

容易得到下面定理：

定理 1.2.2 设 R,S 分别是从 A 到 B，B 到 C 的二元关系，则

(1) $(R^{-1})^{-1}=R$； (2) $(R\circ S)^{-1}=S^{-1}\circ R^{-1}$.

证明留作练习，读者自证.

定理 1.2.3 设 A 为 n 元集合，R 是 A 上的二元关系，则存在自然数 s 和 t，使得 $R^s=R^t$.

证明 由于 R 为 A 上的二元关系，$\forall k\in\mathbb{N}$，$R^k\subseteq A\times A$. 又 $A\times A$ 中元素个数为 n^2，于是 $A\times A$ 的不同子集仅有 2^{n^2} 个. R 的各次幂为 $R^0,R^1,R^2,\cdots,R^{2^{n^2}}$ 时，必存在 $s,t\in\mathbb{N}$，使 $R^s=R^t$.

定理 1.2.4 设 R 为 A 上的关系，$m,n\in\mathbb{N}$，则

(1) $R^m\circ R^n=R^{m+n}$； (2) $(R^m)^n=R^{mn}$.

用归纳法不难证明.

定理 1.2.5 设 R,S,T,U 分别是从集合 A 到 B，B 到 C，B 到 C 和 C 到 D 的二元关系，则有

(1) $R\circ(S\cup T)=(R\circ S)\cup(R\circ T)$； (2) $R\circ(S\cap T)\subseteq(R\circ S)\cap(R\circ T)$；

(3) $(S\cup T)\circ U=(S\circ U)\cup(T\circ U)$； (4) $(S\cap T)\circ U\subseteq(S\circ U)\cap(T\circ U)$.

证明 (1)任取 $(x,y)\in R\circ(S\cup T)$，则存在 $t\in B$，使 $(x,t)\in R$，$(t,y)\in S\cup T$，则 $(t,y)\in S$ 或 $(t,y)\in T$，从而 $(x,y)\in R\circ S$ 或 $(x,y)\in R\circ U$，所以 $(x,y)\in(R\circ S)\cup(R\circ T)$，所以 $R\circ(S\cup T)\subseteq(R\circ S)\cup(R\circ T)$.

反之，任取 $(x,y)\in(R\circ S)\cup(R\circ T)$，则 $(x,y)\in R\circ S$ 或 $(x,y)\in R\circ U$，于是存在 $t\in B$，使 $(x,t)\in R$，$(t,y)\in S$ 或 $(x,t)\in R$，$(t,y)\in U$，故 $(x,t)\in R$，$(t,y)\in S\cup T$，从而 $(x,y)\in R\circ(S\cup T)$，即 $R\circ(S\cup T)\supseteq(R\circ S)\cup(R\circ T)$.

因此，$R\circ(S\cup T)=(R\circ S)\cup(R\circ T)$.

(2)、(3)、(4)的证明与(1)类似，证明由读者完成.

注 在定理 1.2.5 的条件下，一般

$$R\circ(S\backslash T)\neq(R\circ S)\backslash(R\circ T), (S\backslash T)\circ U\neq(S\circ U)\backslash(T\circ U).$$

例如，设 $X=\{a,b,c\}$，$R_1=\{(a,a),(a,b)\}$，$R_2=\{(a,a),(b,c)\}$，$R_3=\{(a,c),(b,b)\}$，则

$$R_2\backslash R_3=\{(a,a),(b,c)\}=R_2, R_1\circ(R_2\backslash R_3)=\{(a,a),(a,c)\},$$