

高等院校精品课程系列规划教材·高等数学

# 概率论与数理统计

Probability Theory and Mathematical Statistics

黄龙生 吴志松 主编



ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS  
浙江大学出版社

高等院校精品课程系列规划教材·高等数学

# 概率论与数理统计

黄龙生 吴志松 主编



ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS  
浙江大学出版社

## 图书在版编目 (C I P) 数据

概率论与数理统计 / 黄龙生, 吴志松主编. —杭州:  
浙江大学出版社, 2012.7

ISBN 978-7-308-09957-8

I. ①概... II. ①黄... ②吴... III. ①概率论—高等  
学校—教材②数理统计—高等学校—教材 IV. ①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2012) 第 088341 号

## 概率论与数理统计

黄龙生 吴志松 主编

---

责任编辑 张 鸽

出版发行 浙江大学出版社

(杭州市天目山路 148 号 邮政编码 310007)

(网址: <http://www.zjupress.com>)

排 版 杭州星云光电图文制作工作室

印 刷 浙江云广印业有限公司

开 本 787mm×1092mm 1/16

印 张 24.5

字 数 675 千

版 次 2012 年 7 月第 1 版 2012 年 7 月第 1 次印刷

书 号 ISBN 978-7-308-09957-8

定 价 48.00 元

---

版权所有 翻印必究 印装差错 负责调换

浙江大学出版社发行部邮购电话(0571)88925591

# 前 言

《概率论与数理统计》是研究随机现象及其统计规律性的一门学科。

本教材分三大部分:前六章为概率论,后六章为数理统计,另外安排了十二个实验。本教材用“引例”(日常生产生活中的问题)的方式导入新的概念,突出概率论与数理统计的思想和方法,力求通俗易懂;对专业术语给出了相应的英语译文,为学生阅读外文资料提供便利;在内容的讲述中,借助图形的直观性,帮助学生理解概率论与数理统计的基本思想和方法,提高学生的解题能力;在例题和习题的选取上注重应用性和趣味性,以达到提高学生分析解决实际问题的能力。在教材的编写中,以定义的形式给出主要概念,以定理的形式给出主要结论,帮助学生抓住重点。每章的前几节是基本内容,后面是加深及扩展内容,通过每章后面内容的教学,巩固和深化基础知识。常用分布集中在第五章,有利于学生掌握常用分布,同时,学习常用分布的过程也是对概率论的基本概念和方法的复习过程。为了提高学生的动手能力,本书基于 Excel 环境安排了 12 个实验,实验内容的先后次序与概率论与数理统计的基本内容一致。

本教材可作为高校统计学、信息与计算科学及数学与应用数学专业的教材或参考书,也可供相关科技工作者参考。

由于编者水平有限,书中不妥之处在所难免,恳请读者批评指正。

编者

2012 年 5 月

## 目 录

第一章 随机事件及其概率 1

- § 1.1 随机事件 /1
  - § 1.1.1 随机现象 /1
  - § 1.1.2 随机试验 /2
  - § 1.1.3 样本空间 /2
  - § 1.1.4 随机事件 /3
- § 1.2 随机事件间的关系与运算 /3
  - § 1.2.1 包含关系 /3
  - § 1.2.2 相等关系 /3
  - § 1.2.3 互不相容(互斥)事件 /4
  - § 1.2.4 事件的并(和) /4
  - § 1.2.5 事件的交(积) /4
  - § 1.2.6 差事件 /5
  - § 1.2.7 对立事件 /5
  - § 1.2.8 事件的运算律 /5
- § 1.3 随机事件的概率 /6
  - § 1.3.1 概率的统计定义 /6
  - § 1.3.2 概率的公理化定义 /7
  - § 1.3.3 概率的性质 /7
- § 1.4 古典概型 /8
  - § 1.4.1 古典概率的概念 /8
  - § 1.4.2 计数原理 /10
  - § 1.4.3 利用排列组合计算古典概率 /10
- § 1.5 几何概型与主观概率 /13
  - § 1.5.1 几何概型 /13
  - § 1.5.2 蒙特卡罗(Monte-Carlo)法 /13
  - § 1.5.3 主观概率 /14
- § 1.6 条件概率与乘法公式 /14
  - § 1.6.1 条件概率的概念 /14
  - § 1.6.2 条件概率的性质 /16
  - § 1.6.3 乘法公式 /17
- § 1.7 全概率公式和贝叶斯公式 /18

§ 1.7.1	全概率公式	/19
§ 1.7.2	贝叶斯(Bayes)公式	/20
§ 1.8	随机事件的独立性	/22
§ 1.8.1	两个事件的独立性	/22
§ 1.8.2	三个事件的独立性	/24
§ 1.8.3	多个事件的相互独立	/24
§ 1.8.4	试验的独立性	/25
§ 1.8.5	$n$ 重伯努利试验	/26
§ 1.9	系统的可靠性	/27
§ 1.9.1	串联系统的可靠性	/27
§ 1.9.2	并联系统的可靠性	/27
	习题一	/28

## 第二章 随机变量及其分布

31

§ 2.1	随机变量	/31
§ 2.1.1	随机变量的概念	/31
§ 2.1.2	随机变量的分类	/32
§ 2.1.3	分布函数	/32
§ 2.1.4	分布函数的性质	/33
§ 2.2	离散型随机变量及其分布	/33
§ 2.2.1	概率分布	/33
§ 2.2.2	概率分布的性质	/34
§ 2.3	连续型随机变量及其分布	/35
§ 2.3.1	连续型随机变量的密度函数	/35
§ 2.3.2	密度函数的性质	/36
§ 2.4	随机变量函数的分布	/38
§ 2.4.1	离散型随机变量函数的分布	/39
§ 2.4.2	连续型随机变量函数的分布	/40
	习题二	/43

## 第三章 多维随机变量及其分布

46

§ 3.1	多维随机变量及其联合分布	/46
§ 3.1.1	多维随机变量的概念	/46
§ 3.1.2	联合分布函数	/46
§ 3.1.3	边缘分布函数	/47
§ 3.2	二维离散型随机变量	/48
§ 3.2.1	二维离散型随机变量	/48
§ 3.2.2	二维离散型随机变量边缘分布律	/49
§ 3.3	二维连续型随机变量	/50

§ 3.3.1	二维连续型随机变量	/50
§ 3.3.2	二维连续型随机变量边缘概率密度	/51
§ 3.4	随机变量的独立性	/52
§ 3.5	二维随机变量函数的分布	/55
§ 3.5.1	二维离散型随机变量函数的分布	/55
§ 3.5.2	连续型随机变量函数的分布	/56
§ 3.5.3	连续型随机向量的变换法	/59
§ 3.6	条件分布	/60
§ 3.6.1	离散型随机变量的条件分布律	/60
§ 3.6.2	连续型随机变量的条件概率密度	/62
§ 3.6.3	连续型的全概率公式和贝叶斯公式	/64
	习题三	/65

#### 第四章 随机变量的数字特征

68

§ 4.1	随机变量的数学期望	/68
§ 4.1.1	离散型随机变量的数学期望	/68
§ 4.1.2	连续型随机变量的数学期望	/69
§ 4.1.3	随机变量函数的数学期望	/70
§ 4.1.4	数学期望的性质	/71
§ 4.2	随机变量的方差	/73
§ 4.2.1	方差的概念	/73
§ 4.2.2	方差的性质	/75
§ 4.2.3	契比雪夫(Chebyshev)不等式	/75
§ 4.3	协方差与相关系数	/76
§ 4.3.1	协方差	/76
§ 4.3.2	相关系数	/78
§ 4.4	矩与分位数	/81
§ 4.4.1	矩	/81
§ 4.4.2	分位数	/83
§ 4.5	随机变量的形态特征数	/83
§ 4.5.1	变异系数	/83
§ 4.5.2	偏度系数	/84
§ 4.5.3	峰度系数	/84
§ 4.6	条件数学期望	/85
§ 4.6.1	条件数学期望	/85
§ 4.6.2	重期望	/86
	习题四	/88

#### 第五章 常用分布

90

§ 5.1	两点分布与二项分布	/90
§ 5.1.1	两点分布	/90

§ 5.1.2	二项分布	/90
§ 5.1.3	二项分布与 0-1 分布之间的关系	/91
§ 5.1.4	二项分布的数学期望和方差	/91
§ 5.2	泊松分布	/92
§ 5.2.1	泊松分布	/92
§ 5.2.2	泊松定理	/93
§ 5.2.3	泊松分布的数字特征	/94
§ 5.3	几何分布	/95
§ 5.3.1	几何分布	/95
§ 5.3.2	几何分布的数字特征	/95
§ 5.4	超几何分布	/96
§ 5.4.1	超几何分布	/96
§ 5.4.2	超几何分布的数字特征	/96
§ 5.5	负二项分布	/97
§ 5.6	均匀分布	/97
§ 5.6.1	均匀分布	/97
§ 5.6.2	均匀分布的数字特征	/98
§ 5.7	指数分布	/98
§ 5.7.1	指数分布	/98
§ 5.7.2	指数分布的数字特征	/99
§ 5.8	正态分布	/100
§ 5.8.1	正态分布	/100
§ 5.8.2	正态分布与标准正态分布的关系	/101
§ 5.8.3	正态分布的数字特征	/103
§ 5.9	伽玛分布	/104
§ 5.9.1	伽玛函数	/104
§ 5.9.2	伽玛分布	/104
§ 5.9.3	伽玛分布的数字特征	/104
§ 5.9.4	伽玛分布的两个特例	/105
§ 5.10	贝塔分布	/105
§ 5.10.1	贝塔函数	/105
§ 5.10.2	贝塔分布	/105
§ 5.10.3	贝塔分布的数字特征	/106
§ 5.11	常用多维分布	/106
§ 5.11.1	多项分布	/106
§ 5.11.2	多维均匀分布	/107
§ 5.11.3	二维正态分布	/108
§ 5.11.4	二维指数分布	/111
	习题五	/111



第六章 极限理论 114

- § 6.1 随机变量序列的收敛性 /114
    - § 6.1.1 以概率 1 收敛 /114
    - § 6.1.2 依概率收敛 /114
    - § 6.1.3 依分布收敛 /115
    - § 6.1.4 三种收敛的关系 /115
  - § 6.2 特征函数 /117
    - § 6.2.1 特征函数 /117
    - § 6.2.2 特征函数的计算 /117
    - § 6.2.3 特征函数的性质 /118
    - § 6.2.4 特征函数唯一决定分布函数 /119
    - § 6.2.5 分布函数的再生性 /120
  - § 6.3 大数定律 /121
    - § 6.3.1 大数定律 /121
    - § 6.3.2 契比雪夫大数定律 /121
    - § 6.3.3 伯努利大数定律 /122
    - § 6.3.4 辛钦大数定律 /122
    - § 6.3.5 马尔可夫大数定律 /123
  - § 6.4 中心极限定理 /124
    - § 6.4.1 中心极限定理 /124
    - § 6.4.2 独立同分布的中心极限定理 /124
    - § 6.4.3 独立不同分布的中心极限定理 /127
- 习题六 /128

第七章 数理统计基础 130

- § 7.1 数理统计的基本概念 /130
  - § 7.1.1 总体与个体 /130
  - § 7.1.2 样本 /131
  - § 7.1.3 统计量与常用统计量 /133
- § 7.2 数理统计中常用的三大分布 /135
  - § 7.2.1 卡方分布 /135
  - § 7.2.2  $t$  分布 /136
  - § 7.2.3  $F$  分布 /137
- § 7.3 正态总体下的抽样分布 /139
- § 7.4 两个正态总体下的抽样分布 /142
- § 7.5 数据整理 /145
  - § 7.5.1 频率分布表与直方图 /145
  - § 7.5.2 茎叶图 /146

- § 7.5.3 条形图 /147
- § 7.5.4 五数概括与箱线图 /147
- § 7.6 经验分布函数 /149
- § 7.7 次序统计量 /150
  - § 7.7.1 次序统计量的概念 /150
  - § 7.7.2 次序统计量的分布 /152
  - § 7.7.3 多个次序统计量的联合分布 /153
  - § 7.7.4 极差 /154
- 习题七 /154

## 第八章 参数估计

156

- § 8.1 参数估计的概念 /156
  - § 8.1.1 点估计的概念 /156
  - § 8.1.2 区间估计的概念 /156
  - § 8.1.3 单侧置信区间 /158
- § 8.2 矩估计法 /159
- § 8.3 最大似然估计法 /161
- § 8.4 点估计优劣的评价标准 /164
  - § 8.4.1 无偏性 /165
  - § 8.4.2 有效性 /166
  - § 8.4.3 一致性 /168
  - § 8.4.4 均方误差 /169
- § 8.5 正态总体参数的置信区间 /169
  - § 8.5.1 总体方差已知情况下均值的置信区间 /169
  - § 8.5.2 总体方差未知情况下均值的置信区间 /170
  - § 8.5.3 正态总体方差与标准差的置信区间 /172
- § 8.6 两个正态总体参数的置信区间 /173
  - § 8.6.1 两个正态总体均值差的置信区间 /173
  - § 8.6.2 两个正态总体方差比的置信区间 /174
- § 8.7 样本容量的确定 /175
  - § 8.7.1 正态总体方差已知时样本容量的确定 /176
  - § 8.7.2 正态总体方差未知时样本容量的确定 /176
- § 8.8 最小方差无偏估计 /177
  - § 8.8.1 费希尔(Fisher)信息量 /177
  - § 8.8.2 最小方差无偏估计 /179
- § 8.9 充分统计量 /183
  - § 8.9.1 充分性的概念 /183
  - § 8.9.2 因子分解定理 /184
  - § 8.9.3 Rao-Blackwell 定理 /187

- § 8.10 贝叶斯估计 /190
  - § 8.10.1 统计推断的基础 /190
  - § 8.10.2 贝叶斯公式的密度函数形式 /191
  - § 8.10.3 贝叶斯估计 /191
  - § 8.10.4 共轭先验分布 /193
- 习题八 /193

## 第九章 假设检验

196

- § 9.1 假设检验的基本概念 /196
  - § 9.1.1 假设检验的概念 /196
  - § 9.1.2 两类错误 /198
  - § 9.1.3 假设检验的基本步骤 /199
  - § 9.1.4 假设检验的三种基本形式 /200
- § 9.2 假设检验问题的  $P$  值 /200
- § 9.3 正态总体均值的假设检验 /202
  - § 9.3.1 方差已知时的  $Z$  检验 /203
  - § 9.3.2 方差未知时的  $T$  检验 /203
  - § 9.3.3 正态总体均值检验问题小结 /205
- § 9.4 正态总体方差的假设检验 /205
  - § 9.4.1 均值未知时的卡方检验 /205
  - § 9.4.2 均值已知时的卡方检验 /206
  - § 9.4.3 正态总体方差检验问题小结 /207
- § 9.5 两个正态总体均值的假设检验 /207
  - § 9.5.1 方差已知时的  $Z$  检验 /207
  - § 9.5.2 方差未知但相等时的  $T$  检验 /208
  - § 9.5.3 配对样本的  $T$  检验 /209
  - § 9.5.4 方差未知且不等时的  $T$  检验 /210
  - § 9.5.5 两个正态总体均值的假设检验问题小结 /210
- § 9.6 两个正态总体方差的假设检验 /211
  - § 9.6.1 两个正态总体方差的  $F$  检验 /211
  - § 9.6.2 两个正态总体方差的假设检验问题小结 /212
- § 9.7 正态性检验 /212
  - § 9.7.1 正态概率纸 /212
  - § 9.7.2 构造正态概率纸的原理 /212
  - § 9.7.3 正态概率纸检验法 /213
  - § 9.7.4 正态概率纸参数估计法 /213
- 习题九 /215

## 第十章 非正态总体假设检验

218

- § 10.1 总体分布的拟合检验 /218

§ 10.2 独立性的列联表检验 /221

§ 10.3 指数分布参数的假设检验 /223

§ 10.4 比例的假设检验 /223

§ 10.5 大样本检验 /224

§ 10.6 置信区间与假设检验之间的关系 /225

    § 10.6.1 由置信区间解决假设检验问题 /225

    § 10.6.2 由假设检验问题求置信区间 /226

§ 10.7 施行特征函数与样本容量的确定 /226

    § 10.7.1 施行特征函数 /227

    § 10.7.2 单侧  $Z$  检验法的  $OC$  函数与样本容量的确定 /227

    § 10.7.3 双侧  $Z$  检验法的  $OC$  函数与样本容量的确定 /228

习题十 /229

第十一章 方差分析

230

§ 11.1 单因素方差分析 /230

    § 11.1.1 基本假定条件 /230

    § 11.1.2 统计假设 /231

    § 11.1.3 平方和分解 /231

    § 11.1.4 方差分析 /232

§ 11.2 无交互作用双因素方差分析 /235

    § 11.2.1 无交互作用双因素方差分析模型 /235

    § 11.2.2 平方和分解 /236

    § 11.2.3 方差分析 /237

§ 11.3 有交互作用双因素方差分析 /241

§ 11.4 多重比较 /245

    § 11.4.1 参数的点估计 /245

    § 11.4.2 参数的区间估计 /246

    § 11.4.3 效应差的置信区间 /246

    § 11.4.4 多重比较问题 /246

    § 11.4.5 重复数相等场合的  $T$  法 /247

    § 11.4.6 重复数不相等场合的  $S$  法 /249

§ 11.5 方差齐性检验 /251

    § 11.5.1 Hartley 检验 /251

    § 11.5.2 Bartlett 检验 /253

    § 11.5.3 修正的 Bartlett 检验 /253

习题十一 /255

第十二章 回归分析

258

§ 12.1 一元线性回归方程 /258

§ 12.1.1	相关分析与回归分析	/258
§ 12.1.2	总体回归函数	/259
§ 12.1.3	样本回归函数	/260
§ 12.1.4	回归系数的最小二乘估计(Least squares estimates)	/261
§ 12.2	一元线性回归方程的显著性检验	/263
§ 12.2.1	平方和分解	/263
§ 12.2.2	F 检验	/264
§ 12.2.3	t 检验	/265
§ 12.2.4	相关系数检验	/266
§ 12.3	估计与预测	/267
§ 12.3.1	均值 $E(Y_0)$ 的点估计	/267
§ 12.3.2	均值 $E(Y_0)$ 的区间估计	/268
§ 12.3.3	随机变量 $Y_0$ 的预测区间	/269
§ 12.4	可线性化的一元非线性回归	/271
§ 12.4.1	模型的确定	/271
§ 12.4.2	系数的估计	/273
§ 12.5	多元线性回归分析	/274
§ 12.5.1	参数估计	/275
§ 12.5.2	平方和分解与假设检验	/277
习题十二		/280

---

基于 Excel 的概率统计实验 282

实验一	Excel 中的统计分析工具	/282
实验二	几个常用分布	/284
实验三	正态分布	/289
实验四	数理统计中常用的三大分布	/293
实验五	描述性统计	/299
实验六	单个正态总体参数的区间估计	/306
实验七	两个正态总体参数的区间估计	/311
实验八	单个正态总体参数的假设检验	/317
实验九	两个正态总体参数的假设检验	/322
实验十	非参数检验	/333
实验十一	方差分析	/338
实验十二	回归分析	/349

---

附表 /358

---

参考文献 /377

# 第一章 随机事件及其概率

概率论与数理统计是研究和揭示随机现象统计规律性的一门数学学科. 概率论与数理统计的理论和方法, 在工业、农业、军事、天文、医学、金融、保险、试验设计等人类活动的各个领域发挥着越来越重要的作用. 在理论联系实际方面, 可以说概率论与数理统计是当今世界上发展最迅速且最活跃的数学分支之一. 概率论是研究随机现象中数量规律的数学分支, 是数理统计的理论基础.

## § 1.1 随机事件

### § 1.1.1 随机现象

在自然界和人类社会活动中, 人们所观察到的现象大致可分为必然现象和随机现象两类.

**定义 1-1** 在一定条件下必然出现的现象, 即只有一个结果, 因而可以事先准确预知的现象, 称为**必然现象**或**确定性现象**.

例如:

- ◆ 每天早晨太阳从东方升起;
- ◆ 同性电荷相互排斥, 异性电荷相互吸引;
- ◆ 在自然状态, 水从高处流向低处等.

**定义 1-2** 在一定条件下, 人们不能事先准确预知其结果的现象, 即在一定条件下可能出现也可能不出现的现象, 称为**随机现象**(Random phenomenon).

随机现象在日常生活中也是广泛存在的. 例如:

- ◆ 向上抛一枚硬币, 落地后可能正面朝上也可能反面朝上, 就是说, “正面朝上”这个结果可能出现也可能不出现;
- ◆ 掷一枚骰子, 可能出现 1、2、3、4、5、6 点, 至于将掷出哪一点, 也是不能事先准确预知的;
- ◆ 在股市交易中, 某只股票的价格受到国家金融政策、上市公司业绩、股民的炒作行为及其他国家股市的涨跌等许多不确定因素影响, 下一个交易日该股票的股价可能上升也可能下跌, 而且这只股票的最高价和最低价也不能事先确定;
- ◆ 在射击比赛中, 运动员用同一支步枪向一个靶子射击, 打出的环数可能不同;
- ◆ 在某一条生产线上, 使用相同的工艺生产出来的产品, 寿命也可能有较大差异等.

虽然随机现象在相同条件下可能的结果不止一个, 且不能事先准确预知将出现什么样的结果, 但是经过长期的、反复的观察和试验, 人们逐渐发现了所谓结果“不能事先准确预知”只是对一次或几次观察或试验而言, 在相同条件下进行大量重复观察或试验时, 其结果就会呈现某种规律性, 这就是所谓的统计规律性.

在概率论与数理统计中蕴含着一种不同于确定性数学研究中经常运用的思想方法和世界

观. 在随机现象的研究中, 我们不能将复杂的随机现象简化为确定性的现象, 而是承认在所研究的系统中确实存在一些我们不能掌握或根本不知道的因素, 因而系统中会有随机现象发生. 面对这样的客观现实, 从概率论与数理统计的观点出发, 我们的态度是: 既不无视随机性的存在, 简单地就已经掌握的片面情况乱作决定, 也不盲目地惧怕不确定性, 因而踌躇不前; 而是找出实际情况中随机现象的规律, 并基于对它们的认识, 做出尽可能好的决策.

### § 1.1.2 随机试验

为了研究随机现象的数量规律性, 需要对随机现象进行一些重复观察或试验.

在这里, 我们把试验作为一个含义广泛的术语, 它可以是各种各样的科学试验, 也可以是对自然现象或社会现象所进行的观察. 例如:

- ◆ 在一批笔记本电脑中任意抽取一台, 检测它的寿命;
- ◆ 向上抛一枚硬币三次, 观察其落地后出现正面的次数;
- ◆ 记录某市火车站售票处一天内售出的车票数.

**定义 1-3** 具有下述三个特点的试验称为**随机试验**(Random experiment), 简称为试验, 用大写英文字母  $E$  表示.

- (1) 可重复性: 试验可以在相同的条件下重复进行.
- (2) 可观察性: 每次试验的可能结果不止一个, 但事先可以明确知道试验的所有可能结果.
- (3) 不确定性: 进行一次试验之前不能确定会出现哪一个结果.

本书中所提到的试验均指随机试验.

### § 1.1.3 样本空间

由于随机试验具有可观察性, 因此, 虽然事先不能确定试验将出现哪一个结果, 但试验的所有可能的基本结果所构成的集合是已知的.

**定义 1-4** 将随机试验  $E$  的每个可能的基本结果称为一个**样本点**(Sampling point), 全体样本点组成的集合称为  $E$  的**样本空间**(Sampling space), 记为  $\Omega = \{\omega\}$ , 其中  $\omega$  表示试验的样本点.

**例 1-1** 设  $E_1$ : 向上抛掷一枚硬币, 观察其落地后正面朝上还是反面朝上, 则  $\Omega_1 = \{\text{正面, 反面}\}$ ;

$E_2$ : 将一枚硬币连续向上抛掷两次, 依次观察其落地后正面朝上还是反面朝上, 则  $\Omega_2 = \{\text{正正, 正反, 反正, 反反}\}$ ;

$E_3$ : 将一枚硬币连续向上抛掷两次, 观察其反面朝上的次数, 则  $\Omega_3 = \{0, 1, 2\}$ ;

$E_4$ : 记录某市火车站售票处一天内售出的车票数, 则  $\Omega_4 = \{0, 1, 2, \dots\}$ ;

$E_5$ : 在某型号电脑中任取一台检测其使用寿命, 则  $\Omega_5 = \{t \mid t \geq 0\}$ ;

$E_6$ : 记录证券交易所内某只股票一天内的最低价  $x$ (元) 和最高价  $y$ (元), 则

$$\Omega_6 = \{(x, y) \mid 0 < x \leq y\}.$$

从例 1-1 不难看出, 样本空间可以是有限集、可列集、不可列集, 甚至是二维空间中的某一平面区域.

写出试验的样本空间是描述随机现象的基础. 值得注意的是: 即使是相同的试验, 由于研究目的不同, 其样本空间也可能不同, 如例 1-1 中的  $\Omega_2$  和  $\Omega_3$ . 也就是说, 样本空间的样本点取决于随机试验及其研究目的.

### § 1.1.4 随机事件

**定义 1-5** 随机试验  $E$  的样本空间  $\Omega$  的子集称为  $E$  的**随机事件**(Random event), 简称事件(Event). 常用大写英文字母  $A, B, C$  等表示事件.

- ◆ 任何一个样本点  $\omega$  构成的单点集  $\{\omega\}$ , 称为**基本事件**(Basic events).
- ◆ 任何事件可看成是由基本事件复合而成的.
- ◆ 在概率论中, 事件  $A$  发生, 是指当且仅当  $A$  所包含的某一样本点发生.

例如在掷一枚骰子的试验中, “出现偶数点”是一个事件, 这个事件就是样本空间  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  的一个子集  $A = \{2, 4, 6\}$ ; 它也可看成是由基本事件“出现 2 点”, “出现 4 点”, “出现 6 点”复合而成的, 而且一旦出现这三个基本事件中的一个, 我们就可说“出现偶数点”这个事件发生了.

◆ 样本空间  $\Omega$ , 称为**必然事件**(Certain event). 因为  $\Omega$  本身也是  $\Omega$  的一个子集, 故也是事件, 在每次试验中必然会出现  $\Omega$  中的某一样本点, 所以在任何一次试验中  $\Omega$  必然会发生, 故称其为必然事件.

◆ 空集  $\emptyset$ , 称为**不可能事件**(Impossible event). 空集  $\emptyset$  也是  $\Omega$  的子集, 故也是事件. 因为空集不包含任何样本点, 所以在任何一次试验中  $\emptyset$  都不可能发生, 所以称其为不可能事件.

必然事件和不可能事件已经失去了“不确定性”, 本已不属于随机事件, 但是为了讨论问题的方便, 还是将它们作为两个极端情形的随机事件.

## § 1.2 随机事件间的关系与运算

因为样本空间  $\Omega$  就是全体样本点(基本事件)所组成的集合, 随机事件是  $\Omega$  的子集, 所以事件间的关系和运算也可按集合间的关系和运算来处理. 为了简化以后的概率计算, 下面的讨论总是假定在同一个样本空间  $\Omega$  中进行.

### § 1.2.1 包含关系

**定义 1-6** 若事件  $A$  发生必然导致事件  $B$  发生, 则称事件  $B$  **包含**(Inclusion relation)事件  $A$ , 或事件  $A$  包含于事件  $B$ , 记为  $B \supset A$  或  $A \subset B$ , 如图 1-1 所示.

◆  $A \subset B$ , 也就是事件  $A$  中的每一个样本点都是事件  $B$  的样本点.

- ◆ 对于任意事件  $A$ , 必有  $\emptyset \subset A \subset \Omega$ .

例如, 掷一枚骰子,  $A =$ “出现 6 点”,  $B =$ “出现偶数点”, 则  $A \subset B$ .

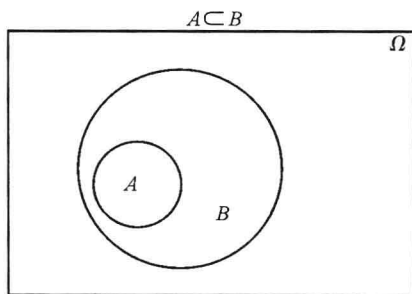


图 1-1 包含关系维恩(Venn)图

### § 1.2.2 相等关系

**定义 1-7** 若事件  $A$  发生必然导致事件  $B$  发生, 同时事件  $B$  发生必然导致事件  $A$  发生, 则称事件  $A$  与  $B$  **相等**(Equivalent relation), 记为  $A = B$ .

◆  $A = B$ , 也就是事件  $A$  中的样本点与事件  $B$  的样本点完全相同, 即  $A \subset B$  和  $B \subset A$  同时成立.



### § 1.2.3 互不相容(互斥)事件

**定义 1-8** 若事件  $A$  与  $B$  不可能同时发生,则称事件  $A$  与事件  $B$  互不相容(或互斥)(Incompatible events),如图 1-2 所示.

◆ 事件  $A$  与事件  $B$  互斥,即  $A \cap B = \emptyset$ ,事件  $A$  与  $B$  没有相同的样本点.

◆ 任意两个不同的基本事件是互不相容的.

◆ 若事件  $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$  满足当  $i \neq j$  ( $i, j = 1, 2, \dots$ ) 时,  $A_i A_j = \emptyset$ ,即事件组中任意两个不同事件都互不相容,则称事件  $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$  两两互不相容.

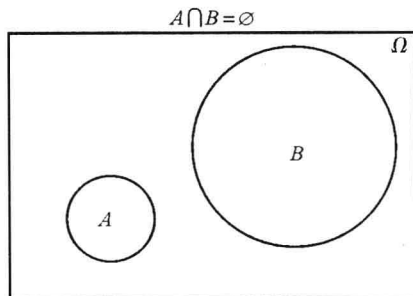


图 1-2 互斥关系维恩(Venn)图

### § 1.2.4 事件的并(和)

**定义 1-9** “事件  $A$  与  $B$  中至少有一个发生”这一事件称为事件  $A$  与事件  $B$  的并(或和)(Union of events),记为  $A \cup B$ ,如图 1-3 所示.

◆  $A \cup B$  就是由事件  $A$  和  $B$  的所有样本点(相同的只计入一次)所组成的新事件,即  $A \cup B = \{\omega | \omega \in A \text{ 或 } \omega \in B\}$ .

◆ “事件  $A_1, A_2, \dots, A_n$  中至少有一个发生”这一事件称为事件  $A_1, A_2, \dots, A_n$  的并(和),记为  $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ ,也可简记为  $\bigcup_{i=1}^n A_i$ .

◆ “可列个事件  $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$  中至少有一个发生”这一事件称为事件  $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$  的可列并(和),记为  $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ .

例如,掷一枚骰子, $A$  = “出现偶数点”, $B$  = “出现点数不超过 4”,则  $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6\}$ .

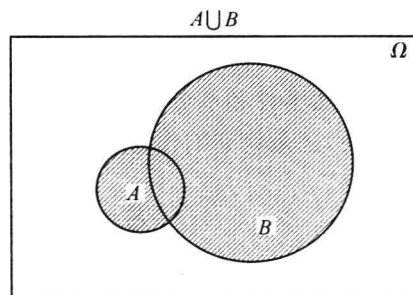


图 1-3 并运算维恩(Venn)图

### § 1.2.5 事件的交(积)

**定义 1-10** “事件  $A$  与  $B$  同时发生”这一事件称为事件  $A$  与事件  $B$  的交(或积)(Product of events),记为  $A \cap B$ ,或简记为  $AB$ ,如图 1-4 所示.

◆  $A \cap B$  就是由事件  $A$  与  $B$  中公共的样本点组成的新事件,这与集合的交集定义完全相同,即  $A \cap B = \{\omega | \omega \in A \text{ 且 } \omega \in B\}$ .

◆ “事件  $A_1, A_2, \dots, A_n$  同时发生”这一事件称为事件  $A_1, A_2, \dots, A_n$  的交(积),记为  $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$  或  $A_1 A_2 \dots A_n$ ,也可简记为  $\bigcap_{i=1}^n A_i$ .

◆ “可列个事件  $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$  同时发生”这一事件称为事件  $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$  的可列交(积),记为  $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ .

例如,掷一枚骰子, $A$  = “出现偶数点”, $B$  = “出现点数不超过 4”,则  $A \cap B = \{2, 4\}$ .

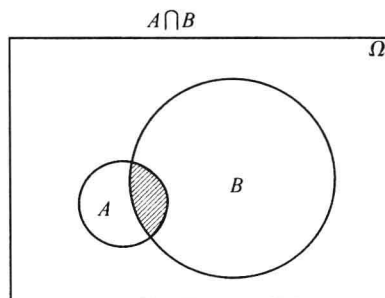


图 1-4 交运算维恩(Venn)图