高等院校精品课程系列规划教材·高等数学

概率论与数理统计

Probability Theory and Mathematical Statistics

黄龙生　吴志松　主编

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

高等院校精品课程系列规划教材·高等数学

概率论与数理统计

黄龙生　吴志松　主编

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计 / 黄龙生，吴志松主编. —杭州：浙江大学出版社，2012.7
ISBN 978-7-308-09957-8

Ⅰ.①概... Ⅱ.①黄...②吴... Ⅲ.①概率论—高等学校—教材②数理统计—高等学校—教材 Ⅳ.①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2012）第 088341 号

概率论与数理统计
黄龙生　吴志松　主编

责任编辑　张　鸽
出版发行　浙江大学出版社
（杭州市天目山路 148 号　邮政编码 310007）
（网址：http://www.zjupress.com）
排　　版　杭州星云光电图文制作工作室
印　　刷　浙江云广印业有限公司
开　　本　787mm×1092mm　1/16
印　　张　24.5
字　　数　675 千
版 印 次　2012 年 7 月第 1 版　2012 年 7 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978-7-308-09957-8
定　　价　48.00 元

前 言

《概率论与数理统计》是研究随机现象及其统计规律性的一门学科。

本教材分三大部分:前六章为概率论,后六章为数理统计,另外安排了十二个实验。本教材用“引例”(日常生产生活中的问题)的方式导入新的概念,突出概率论与数理统计的思想和方法,力求通俗易懂;对专业术语给出了相应的英语译文,为学生阅读外文资料提供便利;在内容的讲述中,借助图形的直观性,帮助学生理解概率论与数理统计的基本思想和方法,提高学生的解题能力;在例题和习题的选取上注重应用性和趣味性,以达到提高学生分析解决实际问题的能力。在教材的编写中,以定义的形式给出主要概念,以定理的形式给出主要结论,帮助学生抓住重点。每章的前几节是基本内容,后面是加深及扩展内容,通过每章后面内容的教学,巩固和深化基础知识。常用分布集中在第五章,有利于学生掌握常用分布,同时,学习常用分布的过程也是对概率论的基本概念和方法的复习过程。为了提高学生的动手能力,本书基于 Excel 环境安排了 12 个实验,实验内容的先后次序与概率论与数理统计的基本内容一致。

本教材可作为高校统计学、信息与计算科学及数学与应用数学专业的教材或参考书,也可供相关科技工作者参考。

由于编者水平有限,书中不妥之处在所难免,恳请读者批评指正。

编者

2012 年 5 月

目 录

第一章　随机事件及其概率

概率论与数理统计是研究和揭示随机现象统计规律性的一门数学学科. 概率论与数理统计的理论和方法,在工业、农业、军事、天文、医学、金融、保险、试验设计等人类活动的各个领域中发挥着越来越重要的作用. 在理论联系实际方面,可以说概率论与数理统计是当今世界上发展最迅速且最活跃的数学分支之一. 概率论是研究随机现象中数量规律的数学分支,是数理统计的理论基础.

§1.1　随机事件

§1.1.1　随机现象

在自然界和人类社会活动中,人们所观察到的现象大致可分为必然现象和随机现象两类.

定义 1-1　在一定条件下必然出现的现象,即只有一个结果,因而可以事先准确预知的现象,称为**必然现象**或**确定性现象**.

例如:

◆ 每天早晨太阳从东方升起;

◆ 同性电荷相互排斥,异性电荷相互吸引;

◆ 在自然状态,水从高处流向低处等.

定义 1-2　在一定条件下,人们不能事先准确预知其结果的现象,即在一定条件下可能出现也可能不出现的现象,称为**随机现象**(Random phenomenon).

随机现象在日常生活中也是广泛存在的. 例如:

◆ 向上抛一枚硬币,落地后可能正面朝上也可能反面朝上,就是说,"正面朝上"这个结果可能出现也可能不出现;

◆ 掷一枚骰子,可能出现 1、2、3、4、5、6 点,至于将掷出哪一点,也是不能事先准确预知的;

◆ 在股市交易中,某只股票的价格受到国家金融政策、上市公司业绩、股民的炒作行为及其他国家股市的涨跌等许多不确定因素影响,下一个交易日该股票的股价可能上升也可能下跌,而且这只股票的最高价和最低价也不能事先确定;

◆ 在射击比赛中,运动员用同一支步枪向一个靶子射击,打出的环数可能不同;

◆ 在某一条生产线上,使用相同的工艺生产出来的产品,寿命也可能有较大差异等.

虽然随机现象在相同条件下可能的结果不止一个,且不能事先准确预知将出现什么样的结果,但是经过长期的、反复的观察和试验,人们逐渐发现了所谓结果"不能事先准确预知"只是对一次或几次观察或试验而言,在相同条件下进行大量重复观察或试验时,其结果就会呈现某种规律性,这就是所谓的统计规律性.

在概率论与数理统计中蕴含着一种不同于确定性数学研究中经常运用的思想方法和世界

观.在随机现象的研究中,我们不能将复杂的随机现象简化为确定性的现象,而是承认在所研究的系统中确实存在一些我们不能掌握或根本不知道的因素,因而系统中会有随机现象发生.面对这样的客观现实,从概率论与数理统计的观点出发,我们的态度是:既不无视随机性的存在,简单地就已经掌握的片面情况乱作决定,也不盲目地惧怕不确定性,因而踌躇不前;而是找出实际情况中随机现象的规律,并基于对它们的认识,做出尽可能好的决策.

§1.1.2 随机试验

为了研究随机现象的数量规律性,需要对随机现象进行一些重复观察或试验.

在这里,我们把试验作为一个含义广泛的术语,它可以是各种各样的科学试验,也可以是对自然现象或社会现象所进行的观察.例如:

◆ 在一批笔记本电脑中任意抽取一台,检测它的寿命;

◆ 向上抛一枚硬币三次,观察其落地后出现正面的次数;

◆ 记录某市火车站售票处一天内售出的车票数.

定义 1-3 具有下述三个特点的试验称为**随机试验**(Random experiment),简称为试验,用大写英文字母 E 表示.

(1) 可重复性:试验可以在相同的条件下重复进行.

(2) 可观察性:每次试验的可能结果不止一个,但事先可以明确知道试验的所有可能结果.

(3) 不确定性:进行一次试验之前不能确定会出现哪一个结果.

本书中所提到的试验均指随机试验.

§1.1.3 样本空间

由于随机试验具有可观察性,因此,虽然事先不能确定试验将出现哪一个结果,但试验的所有可能的基本结果所构成的集合是已知的.

定义 1-4 将随机试验 E 的每个可能的基本结果称为一个**样本点**(Sampling point),全体样本点组成的集合称为 E 的**样本空间**(Sampling space),记为 $\Omega=\{\omega\}$,其中 ω 表示试验的样本点.

例 1-1 设 E_1:向上抛掷一枚硬币,观察其落地后正面朝上还是反面朝上,则 $\Omega_1=\{$正面,反面$\}$;

E_2:将一枚硬币连续向上抛掷两次,依次观察其落地后正面朝上还是反面朝上,则 $\Omega_2=\{$正正,正反,反正,反反$\}$;

E_3:将一枚硬币连续向上抛掷两次,观察其反面朝上的次数,则 $\Omega_3=\{0,1,2\}$;

E_4:记录某市火车站售票处一天内售出的车票数,则 $\Omega_4=\{0,1,2,\cdots\}$;

E_5:在某型号电脑中任取一台检测其使用寿命,则 $\Omega_5=\{t\mid t\geqslant 0\}$;

E_6:记录证券交易所内某只股票一天内的最低价 x(元)和最高价 y(元),则

$$\Omega_6=\{(x,y)\mid 0<x\leqslant y\}.$$

从例 1-1 不难看出,样本空间可以是有限集、可列集、不可列集,甚至是二维空间中的某一平面区域.

写出试验的样本空间是描述随机现象的基础.值得注意的是:即使是相同的试验,由于研究目的不同,其样本空间也可能不同,如例 1-1 中的 Ω_2 和 Ω_3.也就是说,样本空间的样本点取决于随机试验及其研究目的.

§1.1.4　随机事件

定义 1-5　随机试验 E 的样本空间 Ω 的子集称为 E 的**随机事件**(Random event)，简称事件(Event). 常用大写英文字母 A,B,C 等表示事件.

◆ 任何一个样本点 ω 构成的单点集 $\{\omega\}$，称为**基本事件**(Basic events).

◆ 任何事件可看成是由基本事件复合而成的.

◆ 在概率论中，事件 A 发生，是指当且仅当 A 所包含的某一样本点发生.

例如在掷一枚骰子的试验中，“出现偶数点”是一个事件，这个事件就是样本空间 $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$ 的一个子集 $A=\{2,4,6\}$；它也可看成是由基本事件“出现 2 点”，“出现 4 点”，“出现 6 点”复合而成的，而且一旦出现这三个基本事件中的一个，我们就可说“出现偶数点”这个事件发生了.

◆ 样本空间 Ω，称为**必然事件**(Certain event). 因为 Ω 本身也是 Ω 的一个子集，故也是事件，在每次试验中必然会出现 Ω 中的某一样本点，所以在任何一次试验中 Ω 必然会发生，故称其为必然事件.

◆ 空集 $\varnothing$，称为**不可能事件**(Impossible event). 空集 $\varnothing$ 也是 Ω 的子集，故也是事件. 因为空集不包含任何样本点，所以在任何一次试验中 $\varnothing$ 都不可能发生，所以称其为不可能事件.

必然事件和不可能事件已经失去了“不确定性”，本已不属于随机事件，但是为了讨论问题的方便，还是将它们作为两个极端情形的随机事件.

§1.2　随机事件间的关系与运算

因为样本空间 Ω 就是全体样本点(基本事件)所组成的集合，随机事件是 Ω 的子集，所以事件间的关系和运算也可按集合间的关系和运算来处理. 为了简化以后的概率计算，下面的讨论总是假定在同一个样本空间 Ω 中进行.

§1.2.1　包含关系

定义 1-6　若事件 A 发生必然导致事件 B 发生，则称事件 B **包含**(Inclusion relation)事件 A，或事件 A 包含于事件 B，记为 $B\supset A$ 或 $A\subset B$，如图 1-1 所示.

◆ $A\subset B$，也就是事件 A 中的每一个样本点都是事件 B 的样本点.

◆ 对于任意事件 A，必有 $\varnothing\subset A\subset\Omega$.

例如，掷一枚骰子，$A=$“出现 6 点”，$B=$“出现偶数点”，则 $A\subset B$.

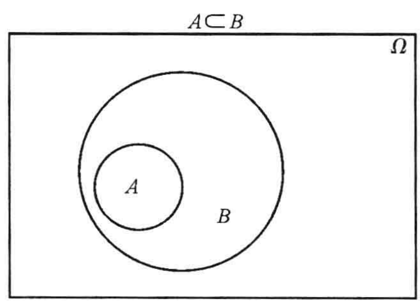

图 1-1　包含关系维恩(Venn)图

§1.2.2　相等关系

定义 1-7　若事件 A 发生必然导致事件 B 发生，同时事件 B 发生必然导致事件 A 发生，则称事件 A 与 B **相等**(Equivalent relation)，记为 $A=B$.

◆ $A=B$，也就是事件 A 中的样本点与事件 B 的样本点完全相同，即 $A\subset B$ 和 $B\subset A$ 同时成立.

§1.2.3　互不相容(互斥)事件

定义 1-8　若事件 A 与 B 不可能同时发生，则称事件 A 与事件 B **互不相容**(**或互斥**)(Incompatible events)，如图 1-2 所示.

◆ 事件 A 与事件 B 互斥，即 $A\cap B=\varnothing$，事件 A 与 B 没有相同的样本点.

◆ 任意两个不同的基本事件是互不相容的.

◆ 若事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 满足当 $i\neq j$ $(i,j=1,2,\cdots)$ 时，$A_iA_j=\varnothing$，即事件组中任意两个不同事件都互不相容，则称事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 两两互不相容.

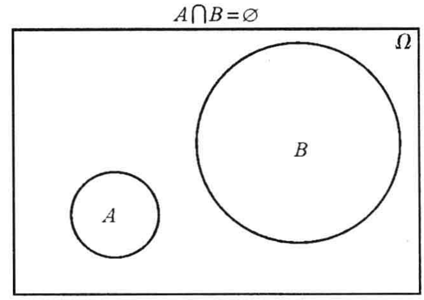

图 1-2　互斥关系维恩(Venn)图

§1.2.4　事件的并(和)

定义 1-9　"事件 A 与 B 中至少有一个发生"这一事件称为事件 A 与事件 B 的**并**(**或和**)(Union of events)，记为 $A\cup B$，如图 1-3 所示.

◆ $A\cup B$ 就是由事件 A 和 B 的所有样本点(相同的只计入一次)所组成的新事件，即 $A\cup B=\{\omega|\omega\in A$ 或 $\omega\in B\}$.

◆ "事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中至少有一个发生"这一事件称为事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的并(和)，记为 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$，也可简记为 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$.

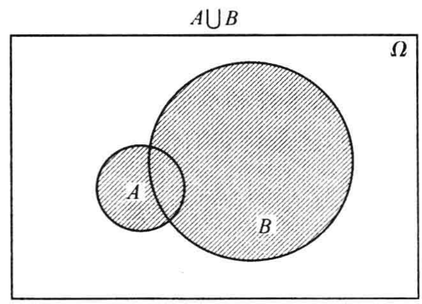

图 1-3　并运算维恩(Venn)图

◆ "可列个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 中至少有一个发生"这一事件称为事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 的可列并(和)，记为 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$.

例如，掷一枚骰子，$A=$"出现偶数点"，$B=$"出现点数不超过 4"，则 $A\cup B=\{1,2,3,4,6\}$.

§1.2.5　事件的交(积)

定义 1-10　"事件 A 与 B 同时发生"这一事件称为事件 A 与事件 B 的**交**(**或积**)(Product of events)，记为 $A\cap B$，或简记为 AB，如图 1-4 所示.

◆ $A\cap B$ 就是由事件 A 与 B 中公共的样本点组成的新事件，这与集合的交集定义完全相同，即 $A\cap B=\{\omega|\omega\in A$ 且 $\omega\in B\}$.

◆ "事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 同时发生"这一事件称为事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的交(积)，记为 $A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n$ 或 $A_1A_2\cdots A_n$，也可简记为 $\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$.

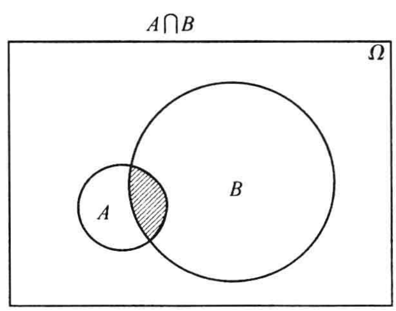

图 1-4　交运算维恩(Venn)图

◆ "可列个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 同时发生"这一事件称为事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 的可列交(积)，记为 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i$.

例如，掷一枚骰子，$A=$"出现偶数点"，$B=$"出现点数不超过 4"，则 $A\cap B=\{2,4\}$.