

機率分配及應用

統計學(三)

Probability Distributions
with Applications

劉人紀 編著

大海文化事業股份有限公司發行

機率分配及應用

統計學(三)

Probability Distributions
with Applications

劉人紀 編著

大海文化事業股份有限公司發行

◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆
◆ 版 權 所 有 ◆
◆ 翻 印 必 究 ◆
◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆

中華民國六十六年七月初版

機率分配及應用 統計學(三)

每冊實價新臺幣壹佰壹拾圓整

著 者：劉 人 紀
發 行 人：單 繩 武
出 版 者：大海文化事業股份有限公司

行政院新聞局出版登記證局版臺業字第1555號

發 行 所：大海文化事業股份有限公司

臺北市羅斯福路二段一〇九號三樓

電 話：(02) 321 — 8987

打字排版者：西 捷 打 字 社

臺北市成功路一段一七八巷一號

電 話：(02) 761 — 5992

印 刷 所：

著者主要著作

- 長安南郊園藝概況調查（1941）
統計學（1945）
抗戰期間西安農產物價統計分析（1946）
經濟論文集（1947）
統計分析方法大綱（1955）
統計製表（1960）
統計製圖學（1960）
基本統計學（1963）
計算機使用法（1963）
管理統計（1967）
助算表（1970）
大學統計學（1970）
用書
現代管理之統計技術（1972）
統計實務（1975）
機率分配及應用（1977）
計量管理（1978不日出版）
工業管理之計量方法（1978不日出版）

序

近多年來，科學進展神速，理論如此，實務亦然。此皆治學工具精密充實，參考資料豐富翔實所致，原不足怪。或謂人類知識，平均約五年增加一倍，苟非日知所亡則厥遺必多。試察統計之學，亦屬如此。設就論著出版先後，稍加整列，變化發展絲跡自可窺及。著者儕身統計工作範疇，彈指四十寒暑；業餘執教文武大專院校，亦三十年有奇。惟因學無本源，忍令駒光虛擲，終使伏櫪如常，徒增馬齒而已。猶憶民國三十四年，拙著統計學問世之時，坊間統計書籍種量有限，屈指可數，今則不能同日而語。其後繼者統計分析方法大綱，基本統計學，及大學用書統計學等書出版，仍覺不能適應需要，難使分合得宜，各取所需。

今統計技術在治事治學上發揮前所未有之功能。前者不僅為管理之重要工具，決策之取舍標準，復供計畫之厘訂數據，預判之主要指標。後者由大專院校普遍設置有關統計課程，高中數學以專冊述其梗概，可見一斑。至作業研究，系統分析，品質管制及計量管理等，莫不以統計技術為基礎，堪資佐證。著者久以統計老兵自許，一隅之見，一慮之得，未能秘而不宣而自珍蔽帚。爰將統計學區分為四，各成專帙，而利參閱；並以冊別標注，使得保持體系，此即

- 統計學(一) 基本統計方法
- 統計學(二) 統計分析
- 統計學(三) 機率分配及應用
- 統計學(四) 管理統計

本書乃上舉四者中之一。由於仁智之見未必雷同，致原理陳述，引例說明，名詞逐譯，符號選用等，難免欠當或未臻美善，尚祈 學者專家有以教之。

劉 人 紀

六十六年七月七日於台北

本書採用符號

- a* 直線迴歸截距
ANOCOVA 互變異數分析
ANOVA 變異數分析
AQL 允收品質水準
 $A\phi]_{\alpha_1}^{z_2}$ 指定區間之標準常態分配機率
b 直線迴歸斜率
BES 佳易系統估計式
bias 偏
BLUE 最佳線性不偏估計式
 $b(x; n, p)$ 二項分配機率
 $b^*(x; k, p)$ 負二項分配機率
 $B(x; n, p)$ 累積二項分配機率
C 欄
C 允收數
C 常數
C 處理
C 校正因子
C_j 欄之合計
C² 修正卡方
 nC_r 組合($\frac{n!}{r!}$)
CR 危險區域
d 離均差 ($X - \bar{X}$)
D 差異 ($X_1 - X_2$)
 \bar{D} 差異平均數
d₀ 虛無假設 $\bar{X}_1 - \bar{X}_2 = 0$
DF 自由度 ν
e 誤差
e 常數 2.71828
E 期望次數
E_i 理論個(次)數
E(X) 期望值
 $exp[]$ *e* 及其指數
E(S²) *S²* 之期望值
f 組次數
F 變異數比率
F() 累積機率分配
fe 理論次數
f₀ 實際觀測次(個)數
fpc 有限群體校正
 $g(x; p)$ 幾何分配機率
H 柯章二氏單向變異數分析值
H₀ 虛無假設
H₁ 對立假設
 $h(x; N, n, A)$ 超幾何分配機率
iff 當且僅當
K 指定數
L 信賴下限
lim 極限
LL 下界
ln 自然對數
log 對數
LSD 最小顯著差異
LTPD 批允收不良品百分數
 $l(x; \theta)$ 指數分配機率
m 成對之個數
M_d 中位數
M₀ 衆數
MD 平均差
MSD 均方差
MSB 區集間均方
MSC 欄處理均方
MSE 誤差均方
MSI 交互影響均方
MSR 列處理均方
MSS 均方和
 $m(x_1, x_2, \dots, x_k; p_1, p_2, \dots, p_k, n)$
 多項分配機率
n 樣本大小
N 群體大小
 $n(x; \mu, a)$ 常態分配機率
N(0,1) 標準常態分配機率
OC 作業特性
O_i 實際個(次)數
p 樣本比率
p 樣本成功機率
P 群體成功機率
 nPr 排列

$P_r(E)$	事象 E 之機率	W	權數
$P_r(E F)$	條件機率	W	魏考遜檢定值
$p(x;A)$	卜氏分配機率	X	隨機變數
q	樣本失敗機率 $(1-p)$	x	隨機變數 X 之值
Q	群體失敗機率 $(1-P)$	x	助變數 $(X-\bar{X})/\sigma$
QD	四分位差	\bar{x}	\bar{X} 之值
r	樣本相關係數	\bar{X}	X 之樣本平均數
r	列	$\bar{\bar{X}}$	樣本平均數之平均
r^2	決定係數	Y_c	Y 之配合值
R	複相關係數	Z	標準常態變數
R	連串檢定之統計量	α	型 I 誤差之機率
R	全距	α	顯著水準
R	區集	α	生產者風險
R_i	列之合計	β	型 II 誤差之機率
s^2	樣本變異數	β	消費者風險
s_p^2	聯合樣本變異數	γ	群體迴歸係數
S	總和	Γ	伽瑪函數
S	二項之成功數	δ	微增量
S	樣本空間	Δ	群體平均數差異
SC	標準分數	θ	任一群體參數
SE	標準誤	$\hat{\theta}$	θ 之樣本估計式
s_p	聯合樣本標準差	μ	群體平均數
SS	平方和	μ_0	假定虛無假設 (H_0) 為真之群體平均數
SSA	處理平方和	μ_1	假定對立假設 (H_1) 為真之群體平均數
SSB	區集平方和	ν	自由度之數
SSC	欄平均間變異	π	群體比率
SSE	誤差平方和	π	常數 3.14159
SSE	誤差變異	Π	連乘記號
SSI	交互影響平方和	ρ	群體相關係數
SSR	列平均間變異	σ	群體標準差
SST	總平方和	σ^2	群體變異數
SST	總變異	σ_D	差異標準差
t	T 變數之值	$\sigma_{\bar{x}}$	標準誤
T	總和	σ_{xy}	X 與 Y 之群體互變異數
T	等級總和	Σ	總和記號
TS	檢定統計常數	Σ	列聯係數
U	信賴上限	ϕ	列聯係數
U	全稱集合	$\phi(Z)$	標準常態分配機率值
U	馬魏二氏檢定值	χ^2	卡方變數
UL	上界	$\binom{n}{r}$	組合
$U(x;n)$	齊一分配		
Var	變異數 V		
σ^2	變異數		
W	加權總和		

機率分配及應用 目次

統計學(三)

序

第零章 機率 001

- 0-1 樣本空間 (001)
- 0-2 事象 (002)
- 0-3 分割 (003)
- 0-4 機率定義 (005)
- 0-5 機率與集合 (008)
- 0-6 樹形圖 (009)
- 0-7 機率公理 (010)
- 0-8 機率定理 (011)
- 0-9 條件機率 (013)
- 0-10 高級機率定理 (016)
- 0-11 簡單事象 (020)
- 0-12 推移機率 (025)
- 0-13 久賭必輸 (026)
- 0-14 市場佔有率預測 (030)
- 0-15 撲克事例 (031)
- 問題 (034)

第一章 機率分配 101

- 1-1 隨機變數 (101)
- 1-2 間斷機率分配 (102)

- 1-3 連續機率分配 (107)
- 1-4 經驗分配 (112)
- 1-5 聯合機率分配 (112)
- 1-6 期望值 (119)
- 1-7 特殊數學期望值 (128)
- 1-8 變異數之特性 (133)
- 1-9 拓拔吉夫定理 (136)
- 問 題 (142)

第二章 間斷機率分配

201

- 2-1 前言 (201)
- 2-2 齊一分配 (204)
- 2-3 二項分配 (206)
- 2-4 多項分配 (218)
- 2-5 負二項分配 (219)
- 2-6 超幾何分配 (228)
- 2-7 超幾何分配之引伸 (234)
- 2-8 幾何分配 (236)
- 2-9 卜氏分配 (238)
- 2-10 截略卜氏分配 (245)
- 2-11 OC 曲線 (249)
- 問 題 (256)

第三章 連續機率分配

301

- 3-1 常態分配 (301)
- 3-2 標準常態分配 (306)
- 3-3 常態分配面積表用法 (307)
- 3-4 常態分配應用之理由 (310)

- 3-5 常態分配之應用 (311)
- 3-6 常態分配用於估算二項分配 (313)
- 3-7 常態分配之配合 (319)
- 3-8 主要機率分配間之關係 (322)
- 3-9 對數常態分配 (323)
- 3-10 伽瑪分配 (325)
- 3-11 指數分配 (332)
- 3-12 魏寶分配 (339)
- 3-13 柯西分配 (342)
- 3-14 貝塔分配 (345)
- 3-15 其他分配 (345)
- 問題 (350)

第四章 抽樣分配

401

- 4-1 引言 (401)
- 4-2 群體 (402)
- 4-3 重要定理 (403)
- 4-4 估計 (407)
- 4-5 Z 分配 (412)
- 4-6 平均數之抽樣分配 (41)
- 4-7 二平均數差異之抽樣分配 (417)
- 4-8 t 分配 (418)
- 4-9 小樣本之平均數抽樣分配 (420)
- 4-10 數量與比率 (421)
- 4-11 清點變數 (422)
- 4-12 比率之抽樣分配 (424)
- 4-13 二比率差異之抽樣分配 (427)
- 4-14 卡方分配 (428)

- 4-15 變異數之抽樣分配 (430)
- 4-16 F 分配 (431)
- 4-17 二變異數比率之抽樣分配 (433)
- 4-18 小群體抽樣 (434)
- 4-19 其他統計常數之抽樣分配 (436)
- 問 題 (440)

第五章 假設檢定

501

- 5-1 導言 (501)
- 5-2 假設建立 (501)
- 5-3 型 I 誤差與型 II 誤差 (502)
- 5-4 顯著水準 (504)
- 5-5 一端或兩端選用準則 (504)
- 5-6 檢定程序 (504)
- 5-7 平均數檢定 (505)
 - 情況一 (505)
 - 情況二 (507)
 - 情況三 (510)
 - 情況四 (513)
 - 情況五 (517)
 - 情況六 (521)
 - 情況七 (525)
 - 情況八 (530)
- 5-8 檢定平均數樣本大小之選擇 (532)
- 5-9 變異數檢定 (535)
- 5-10 比率之檢定 (540)
- 5-11 二比率差異之檢定 (545)
- 5-12 二百分率間差異顯著性檢定 (548)
- 5-13 迴歸係數之顯著性檢定 (552)

5-14 相關係數之顯著性檢定 (555)

問 題 (558)

附 錄 (559)

第六章 變異數分析

601

6-1 前言 (601)

6-2 完全隨機之單變數分類模式 (602)

6-3 最小顯著差異 (608)

6-4 一格一值 (609)

6-5 隨機完全區集設計 (614)

6-6 隨機完全區集設計之伴同附加符號 (622)

6-7 隨機效應模式 (623)

6-8 完全隨機之無反覆二變數分類模式 (628)

6-9 完全隨機之有反覆二變數分類模式 (630)

6-10 隨機區集之有反覆二變數分類模式 (636)

6-11 變異數分析檢定之檢定力 (640)

6-12 迴歸之變異數分析 (646)

問 題 (650)

第七章 無參數檢定

701

7-1 前言 (701)

7-2 符號檢定 (701)

7-3 中位數檢定 (703)

7-4 魏考遜二樣本檢定 (708)

7-5 成對觀測值之魏考遜檢定 (713)

7-6 等級總和檢定 (719)

7-7 U 檢定 (721)

7-8 連串檢定 (725)

- 7-9 無參數變異數分析(728)
- 7-10 獨立性檢定(733)
- 7-11 2×2 表(737)
- 7-12 $R \times C$ 表(740)
- 7-13 $R \times 2$ 表(741)
- 7-14 合併檢定法(747)
- 7-15 配合適度之檢定(748)
- 7-16 等級相關(754)

問 題(758)

附 錄(759)

附錄一 譯名對照表

801

附錄二 主要參考書目

808

第零章

機 率

0-1 樣本空間

一集合 (Set) 之元素 (Element) 表示一實驗之全部可能情況者，稱為該實驗之樣本空間 (Sample Space)。其應具之要件有二，即

1. 其中任一元素，均為實驗可能發生之結果。
2. 一實驗之每一試行，能且僅能獲得該集合之一元素。

樣本空間中之單一元素稱為樣本點 (Sample Point)，因其不能再作分割，故用作單位，且係簡單事象 (Simple Event) 之所由來。

在統計學中用實驗一詞說明產生原始資料之任一處理過程，通常希望使用樣本空間獲得實驗結果有關之最多資料。是故不明瞭樣本空間者對機率無法作深入研究，致抽樣理論與技術之討論發生困難，至為明顯。

【例001】 一幣連拋兩次，其樣本空間為

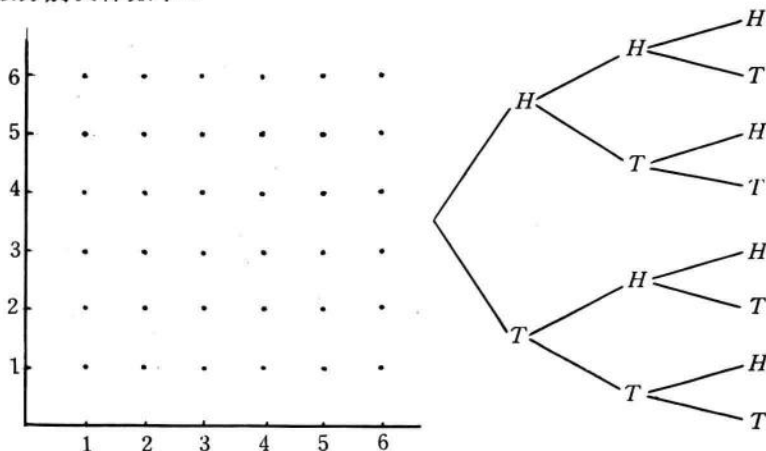
$$S = \{(T, T), (T, H), (H, T), (H, H)\}$$

此即以 T 表背 (Tail)，而以 H 表面 (Head) 之結果。實則兩點樣本空間 (Two-point Sample Space) 之元素，可作零與一之二元分類，如令背 = $T = 0$ ，面 = $H = 1$ ，當可寫作

$$S = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$$

乃知樣本空間中之每一元素，均為序對 (Ordered Pair) 之表示方式，與一般集合之只重元素有無而不顧及順序先後者不同。

圖示樣本空間之方法有二，一為矩形笛卡兒坐標制 (Rectangular Cartesian Coordinate System)，二為樹形圖 (Tree Diagram)，茲分別例釋如下：



上圖中左右分別說明二種不同表示方法，前者適用於情況複雜，後者適用於情況簡單。

0-2 事象

在樣本空間中所顯示之單一標本點為簡單事象，二個或二個以上之簡單事象構成複合事象 (Compound Event)。聯合事象中有互斥 (Mutually Exclusive) 與可重 (Overlapping) 之分，交會事象中有獨立 (Independent) 與相依 (Dependent) 之別。所謂互斥指任二事象不能同時發生，可重則為非互斥者。所謂獨立指任二事象先後出現時彼此毫無影響，相依則發生在先者必將影響後者。

通常所見之拋設計點，擲幣察面，皆互斥事象；而考試猜題，商場購物，投彈着落，乃可重事象。事象中之獨立者如擲幣得面且拋設

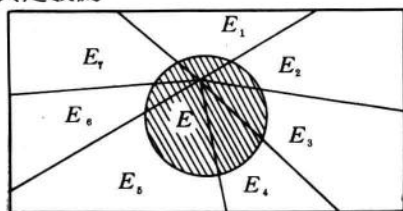
得偶數；相依者如遇天雨而帶傘，斯二者就其是否直接影響加以決定。

要而言之，事象乃樣本空間之部份集合 (Subset) 而已。分真部份集合 (Proper Subset) 假部份集合 (Improper Subset) 及空集合 (Empty Subset) 三者。

0-3 分割 (Partition)

對巨大或全稱集合 (Universal Set) 之部份集合 (Subset) 加以研究時，分割實為一有用之手段。其定義為

令 E_1, E_2, \dots, E_n 為集合 S 之部份集合，如具有下列特性時，該類部份集合稱為集合 S 之分割。



1. 任一 E_i 為 S 之真部份集合 (Proper Subset)，即

$$E_i \subset S, \quad i=1, 2, \dots, n, \text{ 但 } E_i \neq S。$$

2 全體部份集合之聯集 (Union of Set) 為 S ，即

$$E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_n = S。$$

3 部份集合成對式 (Pairwise) 分離，即

$$E_i \cap E_j = \phi, \quad i, j=1, 2, \dots, n, \text{ 但 } i \neq j。$$

大凡由精密之分析改為粗略之分析，事實上係用分割之方法。例如 A 與 B 二球隊連賽三場之可能情形如下：

$$\{AAA, AAB, ABA, BAA, ABB, BAB, BBA, BBB\}$$

茲就 A 隊獲勝之次數加以分割，乃有

$$\{ \{AAA\}, \{AAB, ABA, BAA\}, \{ABB, BAB, BBA\}, \{BBB\} \}$$

此即按連勝三場，二勝一輸，一勝二輸及連輸三場之情形。

分割中又有交叉分割與成序分割二者，分述如下：

一、交叉分割 (Cross-Partition) 通常用於分類問題。設 (A_1, A_2, \dots, A_r) 與 (B_1, B_2, \dots, B_s) 係同一集合 U 之兩種分割，則其中所有交集 (Intersection of Set) 形成之部份集合 $A_i \cap B_j$ 又為

一新分割。通常稱爲原二分割之交叉分割。試察下例採單項分類時有

(a)依年級分

年級	人 數
一	16573
二	10318
三	4321
四	1410
合計	32622

(b)依性別分

性別	人 數
男	8672
女	23950
合計	32622

(c)依科別分

科別	人 數
理工	6576
文法	26046
合計	32622

改採交叉分類(Cross classification)時則爲

(a)年級與性別交叉

年級 (1)	合 計 (2)	男 (3)	女 (4)
合計	32622	8672	23950
一	16573	4015	12558
二	10318	2647	7671
三	4321	1381	2940
四	1410	629	781

(b)年級與科別交叉

年級 (1)	合 計 (2)	理 工 (3)	文 法 (4)
合計	32622	6576	26046
一	16573	3426	13147
二	10318	2043	8275
三	4321	872	3449
四	1410	235	1175

(c)性別與科別交叉

區分 (1)	合 計 (2)	男 (3)	女 (4)
合計	32622	8672	23950
理工	6576	6283	293
文法	26046	2389	23657