运筹学原理与算法

郭强　孙浩　编著

科学出版社

运筹学原理与算法

郭 强　孙 浩　编著

科 学 出 版 社

北 京

内 容 简 介

本书与现行的其他运筹学教材相比，不涉及非线性规划，但增加了网络最优选址问题，扩充了网络规划和分配问题的内容. 对一些经典运筹问题，补充了一些运筹理论，还补充了一些更加简便、实用的运筹算法. 本书的另一个特点是，把运筹方法的程序设计纳入教学内容中，详细、完整、规范地给出了各种运筹方法的算法步骤.

本书是针对应用数学专业本科生编写的教材，也可作为经济管理、系统工程、计算机工程等专业的本科生教材，还可供相关专业研究生及科技工作者参考.

图书在版编目(CIP)数据

运筹学原理与算法/郭强，孙浩编著. —北京：科学出版社，2012
ISBN 978-7-03-034879-1

Ⅰ. ①运…　Ⅱ. ①郭…②孙…　Ⅲ. ①运筹学-高等学校-教材
Ⅳ. ①O22

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 128905 号

责任编辑：王　静 / 责任校对：张怡君
责任印制：阎　磊 / 封面设计：陈　敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

保定市中画美凯印刷有限公司印刷
科学出版社发行　各地新华书店经销

2012 年 6 月第　一　版　开本：720×1000　1/16
2012 年 6 月第一次印刷　印张：20 1/4
字数：463 000

定价：36.00 元

前　言

运筹学是20世纪30年代逐步发展起来的一门新兴学科，其涉及的内容具有共同的特征：在诸多因素制约下，为了实现既定的目标，如何通过数学方法作出最好的选择．这样的学科，无疑有着非常广泛的应用背景和重要的应用价值．

本书是编者在多年从事运筹学教学和研究的基础上，结合运筹学的最新发展，编写的面向应用数学专业的本科教材．与现有其他运筹学教材相比，增加了网络最优选址问题，内容涉及单点最优选址问题及其算法、多点最优选址问题及其算法、半径有界的最优选址问题及其算法；扩充了网络规划方面的问题，内容涉及含负权值无回路网络最短路径问题及其算法、无回路网络最长路径问题及其算法、最大增流路径问题及其算法、无向网络最大流问题及其算法；增加了一对多的分配问题及其算法；补充和改进了一些经典运筹问题的算法，涉及解线性规划的大 M 对偶单纯形法和亚基迭代算法、求最小支撑树的生长树算法、求最小费用流的负回路算法、不绘制箭线图求网络最优计划问题的算法、求运输问题的最小费用流算法和平衡负回路算法、求分配问题的平衡负回路算法．为追求系统、条理，以有利于揭示相关运筹问题之间的关系和有利于教学与交流，全书按照运筹问题的数学体系和逻辑关系进行章节编排．本书另一个特点是，把运筹方法的程序设计纳入了教学内容中，完整、规范地给出了各种运筹方法的算法步骤，凸显了现代运筹学必须与计算机科学相结合的重要性．

本书共13章，第1～10章由郭强编写，第11～13章由孙浩编写．

第1章主要介绍线性规划的基本原理和基本方法；第2章主要介绍一般线性规划的解法；第3章主要介绍线性规划的对偶问题、灵敏度问题以及目标线性规划问题；第4章主要介绍一般整数规划和一般0-1整数规划的基本解法；第5章主要介绍网络中的最小支撑树问题和最优路径问题；第6章主要介绍网络最优选址问题和网络最优计划问题；第7章主要介绍网络最大流问题和网络最小费用流问题；第8章主要介绍运输问题；第9章主要介绍各种分配问题；第10章主要介绍动态规划的基本原理和基本方法；第11章主要介绍几种确定性存储问题和几种随机性存储问题的建模方法和优化方法；第12章主要介绍以矩阵对策为主的几种对策问题及其优化方法；第13章主要介绍常见的排队问题及其优化方法．

学习本书只需具备线性代数基础知识，对微积分和概率论基础知识只要有所了解

即可. 因此,本书也可作为经济管理、系统工程、计算机工程等专业的本科生教材或参考书,还可供需要掌握这方面知识的研究生及相关科技工作者参考.

本书在编写过程中,得到了西北工业大学应用数学系和教务处的支持,也得到了应用数学系一些教师的关心和帮助,在此一并表示感谢.

限于编者的水平,书中不妥之处在所难免,恳请同行专家和广大读者批评指正.

编 者

2011 年 10 月

目　　录

第1章

线性规划

线性规划(linear programming)是运筹学中的一个重要分支,在现代工业、农业、商业、交通运输、国防军事及经济管理等诸多领域都有着广泛、重要的应用.本章介绍的是线性规划的基本概念、性质及在可行基或正则基已知的前提下求解线性规划的方法.

1.1 线性规划的模型及概念

一、线性规划及其模型

现实中有许多问题可以表示成,在满足一组线性等式或线性不等式的条件下,寻求一个能够使某个线性函数的值最大(或最小)的一组变量的取值,这样的问题称为**线性规划问题**.其中,被要求值达到最大(或最小)的函数,称为线性规划的**目标函数**;要求变量满足的所有条件称为线性规划的**约束条件**.

例 1.1.1 某厂生产产品 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 要用到原料 $B_1,B_2,\cdots,B_m$.已知该厂每种原料的拥有量、生产中每种单位产品要消耗的各种原料量,以及每种产品的单位价格,见表 1.1.1.

表 1.1.1

单位用量 产品 / 原料	A_1	A_2	$\cdots$	A_n	原料拥有量
B_1	a_{11}	a_{12}	$\cdots$	a_{1n}	b_1
B_2	a_{21}	a_{22}	$\cdots$	a_{2n}	b_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
B_m	a_{m1}	a_{m2}	$\cdots$	a_{mn}	b_m
单位产品价格	c_1	c_2	$\cdots$	c_n	

要研究的问题是:在现有条件下,要获得最高产值,每种产品应各生产多少?

设 x_j 为产品 A_j 的生产量($j=1,2,\cdots,n$),则目标函数为总产值

$$c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n$$

约束条件为原料 B_i 的拥有量对各种产品 A_j 的生产量 x_j 的限制

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n\leqslant b_i \quad (i=1,2,\cdots,m)$$

以及客观条件 $x_j\geqslant0(j=1,2,\cdots,n)$.因此,本题的数学模型为

$$\max\ c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n$$

$$\text{s. t.}\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n\leqslant b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n\leqslant b_2\\\cdots\cdots\\a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n\leqslant b_m\\x_j\geqslant 0\quad(j=1,2,\cdots,n)\end{cases}$$

其中 max 是英文 maximum 的缩写，表示取最大；s. t. 是英文 subject to 的缩写，表示受约束于….

例 1.1.2 从 $A_1,A_2,\cdots,A_n$矿石中均可提炼出 $B_1,B_2,\cdots,B_m$物质. 已知每种矿石中可以提炼的各种物质量、提炼单位矿石的费用，以及需要提取的各种物质量，见表 1.1.2.

表 1.1.2

单位提取量 \ 矿石 / 物质	A_1	A_2	$\cdots$	A_n	需要的物质量
B_1	a_{11}	a_{12}	$\cdots$	a_{1n}	b_1
B_2	a_{21}	a_{22}	$\cdots$	a_{2n}	b_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
B_m	a_{m1}	a_{m2}	$\cdots$	a_{mn}	b_m
单位提取费用	c_1	c_2	$\cdots$	c_n	

要研究的问题是：要使总的提炼费用最少，这 n 种矿石应各选用多少？

设 x_j 为矿石 A_j 的选用量($j=1,2,\cdots,n$)，则目标函数为总提炼费用

$$c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n$$

约束条件为物质 B_i的需要量对各种矿石 A_j的选用量 x_j的最低要求

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n\geqslant b_i\quad(i=1,2,\cdots,m)$$

以及客观条件 $x_j\geqslant 0(j=1,2,\cdots,n)$. 因此，本题的数学模型为

$$\min\ c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n$$

$$\text{s. t.}\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n\geqslant b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n\geqslant b_2\\\cdots\cdots\\a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n\geqslant b_m\\x_j\geqslant 0\quad(j=1,2,\cdots,n)\end{cases}$$

其中 min 是英文 minmum 的缩写，表示取最小；s. t. 的含义同上.

例 1.1.3 按照供需要求，要从发货点 $A_1,A_2,\cdots,A_m$处将货物运往 $B_1,B_2,\cdots,B_n$各收货点. 已知各发货点提供的货物量、各收货点的货物需求量、从各发货点到各收货

点的单位货物运费，见表 1.1.3.

表 1.1.3

单位运费 \ 收货点 发货点	B_1	B_2	…	B_n	发货点提供的货物量
A_1	c_{11}	c_{12}	…	c_{1n}	a_1
A_2	c_{21}	c_{22}	…	c_{2n}	a_2
⋮	⋮	⋮		⋮	⋮
A_m	c_{m1}	c_{m2}	…	c_{mn}	a_m
收货点的货物需求量	b_1	b_2	…	b_n	

要研究的问题是：按照供需现状，如何安排各发货点到各收货点的货物量，才能使总运费最少？

设 x_{ij} 为 A_i 点运往 B_j 点的货物量($i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n$)，则目标函数为总运费 $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}$. 但约束条件要分为以下三种情况：

(1) $\sum_{i=1}^{m}a_i=\sum_{j=1}^{n}b_j$ 时，约束条件是：A_i 点运出的货物量应等于 A_i 点可提供的货物量，B_j 点收到的货物量应等于 B_j 点的货物需求量，即 $\sum_{j=1}^{n}x_{ij}=a_i(i=1,2,\cdots,m)$；$\sum_{i=1}^{m}x_{ij}=b_j(j=1,2,\cdots,n)$；以及客观条件 $x_{ij}\geqslant 0(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$. 此时，数学模型为

$$\min \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}$$

$$\text{s. t.}\begin{cases}\sum_{j=1}^{n}x_{ij}=a_i & (i=1,2,\cdots,m)\\ \sum_{i=1}^{m}x_{ij}=b_j & (j=1,2,\cdots,n)\\ x_{ij}\geqslant 0 & (i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)\end{cases}$$

(2) $\sum_{i=1}^{m}a_i\leqslant\sum_{j=1}^{n}b_j$ 时，约束条件是：A_i 点运出的货物量应等于 A_i 点可提供的货物量，B_j 点收到的货物量应不超过 B_j 点的货物需求量，即 $\sum_{j=1}^{n}x_{ij}=a_i(i=1,2,\cdots,m)$，$\sum_{i=1}^{m}x_{ij}\leqslant b_j(j=1,2,\cdots,n)$；以及客观条件 $x_{ij}\geqslant 0(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$. 此时，数学模型为

$$\min \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

$$\text{s. t.}\begin{cases}\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i & (i=1,2,\cdots,m)\\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \leqslant b_j & (j=1,2,\cdots,n)\\ x_{ij} \geqslant 0 & (i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)\end{cases}$$

(3) $\sum_{i=1}^{m} a_i \geqslant \sum_{j=1}^{n} b_j$ 时，约束条件是：A_i 点运出的货物量应不超过 A_i 点可提供的货物量，B_j 点收到的货物量应等于 B_j 点的货物需求量，即 $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leqslant a_i (i=1,2,\cdots,m)$；$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j (j=1,2,\cdots,n)$；以及客观条件 $x_{ij} \geqslant 0 (i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$. 此时，数学模型为

$$\min \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

$$\text{s. t.}\begin{cases}\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leqslant a_i & (i=1,2,\cdots,m)\\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j & (j=1,2,\cdots,n)\\ x_{ij} \geqslant 0 & (i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)\end{cases}$$

例 1.1.4 某建筑工地因施工需要，要用 12m 长的钢筋，截取 5.5m、3.5m、2.5m 长的钢筋段各 1600、3500、2800 根. 试问：要使 12m 长的钢筋用量最少，应如何下料?

分析 按不同的下料方法可以获得的不同结果，见表 1.1.4.

表 1.1.4

规 格	方案一	方案二	方案三	方案四	方案五	方案六	方案七
5.5m	2	1	1	0	0	0	0
3.5m	0	1	0	3	2	1	0
2.5m	0	1	2	0	2	3	4

设按第 j 种方案用 12m 的钢筋 x_j 根 $(j=1,2,\cdots,7)$，则目标函数为 12m 长的钢筋总用量 $x_1+x_2+\cdots+x_7$. 约束条件为截出的 5.5m、3.5m、2.5m 长的钢筋数量应满足的需要量 $2x_1+x_2+x_3 \geqslant 1600$，$x_2+3x_4+2x_5+x_6 \geqslant 3500$，$x_2+2x_3+2x_5+3x_6+4x_7 \geqslant 2800$，以及客观条件 $x_j \geqslant 0 (j=1,2,\cdots,7)$. 因此，该问题的数学模型为

$$\min\ x_1+x_2+\cdots+x_7$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}2x_1+x_2+x_3\geqslant 1600\\ x_2+3x_4+2x_5+x_6\geqslant 3500\\ x_2+2x_3+2x_5+3x_6+4x_7\geqslant 2800\\ x_j\text{为整数}\geqslant 0\quad (j=1,2,\cdots,7)\end{cases}$$

例 1.1.5 在每项工作只能由一人承担的要求下，安排 m 个人去完成 n 项工作. 已知第 i 人完成第 j 工作的用时为 $c_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$. 研究：如何进行工作分配，才能使完成所有工作的总用时最少？

设 $x_{ij}=\begin{cases}1, & \text{安排第 } i \text{ 人承担第 } j \text{ 项工作,}\\ 0, & \text{否则}\end{cases}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$，$y_i$ 为第 i 人承担的工作数($i=1,2,\cdots,m$)，则目标函数为完成所有工作的总用时 $\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}$. 约束条件是：每个人对各项工作是否承担应当与其承担的工作数相吻合，即 $\sum\limits_{j=1}^{n}x_{ij}=y_i(i=1,2,\cdots,m)$；每项工作只能由一人承担 $\sum\limits_{i=1}^{m}x_{ij}=1(j=1,2,\cdots,n)$；所有工作都必须完成，即 $\sum\limits_{i=1}^{m}y_i=n$；以及 $x_{ij}\in\{0,1\}\ (i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$ 和 $y_i\in\{0,1,\cdots,n\}$ $(i=1,2,\cdots,m)$. 因此，该问题的数学模型为

$$\min\ \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}\sum\limits_{j=1}^{n}x_{ij}=y_i\quad (i=1,2,\cdots,m)\\ \sum\limits_{i=1}^{m}x_{ij}=1\quad (j=1,2,\cdots,n)\\ \sum\limits_{i=1}^{m}y_i=n\\ x_{ij}\in\{0,1\},y_i\in\{0,1,\cdots,n\}\quad (i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)\end{cases}$$

以上 5 个问题的数学模型，目标函数和约束条件都是线性的，变量都是非负的，因此，都属于线性规划问题. 一般线性规划可分为以下三种形式：

$$(\text{LP1})\quad \begin{array}{l}\min(\text{或}\max)C^{\mathrm{T}}x\\ \text{s.t.}\begin{cases}Ax=b\\ x\geqslant 0\end{cases}\end{array}\qquad (\text{LP2})\quad \begin{array}{l}\min(\text{或}\max)C^{\mathrm{T}}x\\ \text{s.t.}\begin{cases}Ax\leqslant b\\ x\geqslant 0\end{cases}\end{array}\qquad (\text{LP3})\quad \begin{array}{l}\min(\text{或}\max)C^{\mathrm{T}}x\\ \text{s.t.}\begin{cases}Ax=b\\ \overline{A}x\leqslant d\\ x\geqslant 0\end{cases}\end{array}$$

其中 $C=(c_1,c_2,\cdots,c_n)^{\mathrm{T}}$，$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$，$A=(a_{ij})_{m\times n}$，$b=(b_1,b_2,\cdots,b_m)^{\mathrm{T}}$，$\overline{A}=(a_{ij})_{k\times n}$，$d=(d_1,d_2,\cdots,d_k)^{\mathrm{T}}$.

规定 (LP1)为线性规划的**标准形**.(LP2)和(LP3)不是标准形,但都可以化成标准形.

定义 1.1.1 如果通过加(或减)非负变量把线性规划的不等式约束变成等式约束,则称这样的非负变量为该线性规划的**松弛变量**.

例如,引入松弛变量 $x_{n+1},x_{n+2},\cdots,x_{n+m}\geqslant 0$,可以把例 1.1.1 中给出的非标准形线性规划转化成标准形线性规划:

$$
\begin{aligned}
&\max\ c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n\\
&\text{s. t.}\begin{cases}
a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n+x_{n+1}=b_1\\
a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n+x_{n+2}=b_2\\
\cdots\cdots\\
a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n+x_{n+m}=b_m\\
x_j\geqslant 0\quad (j=1,2,\cdots,n+m)
\end{cases}
\end{aligned}
\tag{1.1.1}
$$

引入松弛变量 $x_{n+1},x_{n+2},\cdots,x_{n+m}\geqslant 0$,可以把例 1.1.2 给出的非标准形线性规划转化成标准形线性规划:

$$
\begin{aligned}
&\min\ c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n\\
&\text{s. t.}\begin{cases}
a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n-x_{n+1}=b_1\\
a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n-x_{n+2}=b_2\\
\cdots\cdots\\
a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n-x_{n+m}=b_m\\
x_j\geqslant 0\quad (j=1,2,\cdots,n+m)
\end{cases}
\end{aligned}
\tag{1.1.2}
$$

不难理解,任何非标准形线性规划都可以转化成标准形线性规划,因此,如何构建标准形线性规划问题的解法,是构建一般性线性规划问题的解法的关键.

二、线性规划的几何意义

定义 1.1.2 称集合$\{x\mid Ax=b,x\geqslant 0\}$为线性规划(LP1)的**可行域**,该集合中的元素称为线性规划(LP1)的**可行解**.

定义 1.1.3 如果(LP1)的可行解能够使(LP1)的目标函数达到目标要求,则该可行解称为(LP1)的**最优解**,对应的目标函数值称为(LP1)的**最优值**.

线性规划(LP2)和(LP3)的可行域、可行解、最优解及最优值的定义类似.

我们知道,二元一次方程 $a_{i1}x_1+a_{i2}x_2=b_i$ 在 x_1Ox_2 直角坐标系中,图像是直线.三元一次方程 $a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+a_{i3}x_3=b_i$ 在 $Ox_1x_2x_3$ 直角坐标系中,图像为平面.但是在 $n>3$ 时,n 元一次方程 $a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n=b_i$ 的图像是无法绘制的,为方便起见,称 n 元一次方程的图像为超平面.因此,(LP1)的可行域是一系列超平面的公共点构成的集合;(LP2)的可行域是一系列超平面围成的集合.特别是在 $n=2$ 时,(LP2)的可行域是由若干条直线围成的凸多边形.在 $n=3$ 时,(LP2)的可行域是由若个平面围成的凸多面体.