陈振宣　陈永箴

怎样的整数时，方程 $(k+1)\sin^2x-4\cos x+3k-5=0$ 有实数解？

[解] 设 $\log_2\frac{2a}{a+1}=k$，则

$\log_2\frac{4(a+1)}{a}=3-\log_2\frac{2a}{a+1}=3-$

$\log_2\frac{(a+1)^2}{4a^2}=-2\log_2\frac{2a}{a+1}=$

高考中常用的数学思想方法

…$16x^2-9y^2=144$。

…焦点坐标、离心率和渐近线方程；

…双曲线的左、右焦点，点 P 在双曲线上，

…$|PF_2|=32$，求 $\angle F_1PF_2$ 的大小。

6. 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项的和为 S_n。已知 $a_3=12$，$S_{12}>0$，$S_{13}<0$。

（1）求公差 d 的取值范围；

（2）指出 S_1，S_2，…，S_{12} 中哪一个值最大，并说明理由。

（3）如果二面角 $A-SB-Q$ 的大小为 $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{6}}{3}$，求…

$\angle AOQ$ 的大小。

ISBN 7-5006-1458-6

G·352 定价6.80元

$x^2-9y^2=144$。

坐标、离心率和渐近线方程；

曲线的左、右焦点，点 P 在双曲线上，

$PF_2|=32$，求 $\angle F_1PF_2$ 的大小。

6. 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项的和为 S_n。已知 $a_3=12$，$S_{12}>0$，$S_{13}<0$。

（1）求公差 d 的取值范围；

（2）指出 S_1，S_2，…，S_{12} 中哪一个值最大，并说明理由。

（3）如果二面角 $A-SB-Q$ 的大小为 $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{6}}{3}$，求 $\angle AOQ$ 的大小。

ISBN 7-5006-1458-6

G·352 定价6.80元

陈振宣 陈永箴

中国青年出版社

高考中常用的数学思想方法

(京)新登字 083 号

图书在版编目(CIP)数据

高考中常用的数学思想方法/陈振宣等著。—北京:中国青年出版社,1993.12
ISBN 7—5006—1458—6

Ⅰ.高…

Ⅱ.陈…

Ⅲ.①数学-思维-研究-高等学校-入学考试 ②思维-数学-研究-高等学校-入学考试

Ⅳ.01-0

责任编辑:赵惠宗

封面设计:杨大昕

*

中国青年出版社出版 发行

社址:北京东四 12 条 21 号 邮政编码:100708

二二〇七印刷厂印刷 新华书店经销

*

787×1092 1/32 10.75 印张 210 千字

1993 年 12 月北京第 1 版 1993 年 12 月北京第 1 次印刷

印数 7,000 册 定价:6.80 元

前　言

世界高科技的迅猛发展，带动了教育改革的蓬勃兴起。于是数学教育改革成了世界各国研究的热点。改革的中心点是智能开发和能力的培养。《数学教学大纲》明确提出："在教学中，要根据数学本身的特点，着重培养学生的运算能力、逻辑思维能力和空间想象能力，要使学生逐步学会分析、综合、归纳、演绎、概括、抽象、类比等重要的思想方法。"这是思想方法第一次进入大纲，是我国数学教学改革进入新阶段的标志。高考命题改革几年来也明确宣布，在考查知识、技能的同时，要考查数学思想方法，这是改革中积极的，令人鼓舞的一面。但由于历史原因、社会原因，在我国数学教育中也存在令人忧虑的一面。

长期以来，在"以多取胜"的教育策略思想指导下，数学教育中题海泛滥成灾，师生深受其害。人们越来越认识到题海的危害。但为了应试，又"被迫"大搞题海，形成了一个怪圈。最令人担心的是：在许多人（包括教师、学生、家长）心目中，只有题海才是提高"质量"的唯一"法宝"。人们不知何时才能走出怪圈？

那么是否存在走出怪圈之路呢？让我们对十多年来的数学教育改革作一番反思，也许能悟出一点道理来。

与"以多取胜"相对立的是"以少御多"的教育策略思想。在这一指导思想下，我们曾作过长期摸索。经过实践、认识、再实践，逐步认识到数学教育活动是数学思维的活动。数

学素质是人的智能的重要组成部分，其核心是数学思维的素质。确定数学素质的主变量有三，兹分述如下。

一、数学知识与数学语言

数学知识和数学研究成果的传输交流都离不开数学语言。运用数学知识解决实际问题，更离不开数学语言这一思维载体。知识借书面语言流传后世，思维依附于语言（物质外壳）才能流畅地进行。数学知识和数学语言是密切相关又难以分割的。

数学语言，狭义地说，是指数学符号语言；广义地说，一切用以反映数量关系和空间形式的语言，都是数学语言。在数学教科书里，它有三种形态：自然语言（包括口头的、文字的普通语言），符号语言和图象语言（也可看作一种符号语言）。同一数学研究的对象，往往可用不同的语言形态表达。不同语言形态的互译能力是数学的基本能力之一。不少数学问题的解决，实质上不过是不同语言形态的互译而已。数学思维活动多是无声的数学语言活动，流畅的数学思维建筑在娴熟的数学语言的基础上。这就是数学知识与数学语言是数学素质的第一个主变量的道理。

二、数学思想方法

数学知识与数学语言是解决问题的工具。如何才能运用自如，发挥工具的最大效用？除了熟练掌握工具的技能外，还要善于概括领会数学思想方法（也称数学思维方法）。解决问题的过程，正是艰苦思考的过程。如何找到问题的突破口，要

靠思维的过滤器、整流器或导航器——科学的思维方法。过去人们不注意从思维高度去概括数学思想方法，把一些难题的巧妙解法归之于聪明人的偶然触发，不明其规律何在，无以名之，一概称之为“技巧”。难怪学生不易掌握。其实经过仔细剖析，上升到思维高度加以概括，无非是自觉或不自觉地运用了正确的数学思维方法。

三、情感因素与心理素质

人是有感情的。人的思维总是伴随着情感的发展变化而同步进行。大量智力测试中发现，人的思维能力既可受情感因素的激励获得超常发挥，也可能受情绪心理因素的干扰产生失常表现。这已为人们亿万次实践所证实。但由于人们把智力因素与情感因素孤立割裂开来考察，将情感、兴趣、意志、品格、宁静、坚韧、顽强等心理素质与智力因素对立起来，统称为非智力因素，因而人为地把情感因素和心理素质从人的智能素质中排除出去。实际上，人的智能不单与智力因素有关，同时和情感、心理素质也是息息相关的。许多有心人的观察实验已初步证实这一点。已可预见，情感因素和心理素质是不能排除在数学素质之外的。

我们的反复实验都取得令人欣奋的结果。以在上海第四轮实验为例，参加的学校有四：向明中学（市重点校）6 个班，1987 年高考数学均分 99 分（满分 120 分，下同）；宜川中学（区重点校）2 个班 93.1 分；淮中中学（普通完中）1 个班 91.4 分；娄塘中学（农村完中）1 个班 88.3 分。当年上海市市重点校均分 92.6 分，区县重点校 83 分。数学竞赛，向明中学有 4 人获全国一等奖（占全市 25%），宜川中学也有 1 人获二

等奖。普通完中虽未获奖，但校平均分仅次于重点中学。向明中学还有1人获国际奥林匹克银牌奖。实验结果证实，只要强化数学知识与数学语言相结合的教学；注意数学思想方法平时渗透和集中讲授并举的办法，同时重视情感因素和心理素质的培养，是可以达到既减轻负担又提高质量的目标的。定可走出怪圈，摆脱题海，步上数学教改的康庄大道。

关于数学思维方法的探索，在1988年，我们写出《中学数学思维方法》，对十年摸索作了初步概括，以后此书就成了我们研究的新的起点。随着认识的发展，1992年，又写成了《数学思想方法入门》（上海市选修教材），使探索向前跨进了一步，使我们明确地提出了数学素质三个主变量的假设。这次，在编写《中学数学思维方法》与《数学思想方法入门》两书的基础上，我们以数学思想方法为指导，对历年高考试题作剖析，提出了一些新解法，进而写成《高考中常用的数学思想方法》一书，一则为数学思想方法的普及做点传播工作，二则希望为数学教育走出怪圈，为青年学子摆脱题海之苦做点实事。

本书的出版如能受到读者的欢迎，有助于减轻负担提高质量，作者将引为莫大的欣慰。并热诚欢迎广大读者和专家给予指正。

作者

1993年1月15日

目　　录

第一章 常用的证明方法

1.1 综合与分析

数学不仅要从事于发现，还要证明所发现的结论一定正确。这是由于人的观察有时不够全面，可能产生错觉，归纳推理（不完全归纳法）、类比推理、单凭直觉获得的结论，都是或然的，不经过严格的逻辑推理作出证明，也可能出现片面性。所以数学里非常强调逻辑推理，要求按推理规律，对结论作出证明。那么什么是证明呢？

证明题都有条件 $p(x)$ 和结论 $q(x)$，并要求从 $p(x)$ 推出（$\Rightarrow$）$q(x)$。从条件 $p(x)$ 出发，应用已知的公理、定义、定理，运用分段连贯的演绎推理（从一般原理推出个别结论的必然推理）确定结论 $q(x)$ 必真的思维过程，称为证明。

在一个公理系统中，公式 A 的证明是一个有限的公式序列 E_1，E_2，…，E_n，其中每一个公式适合以下条件之一：(1) 是一个公理；(2) 是一已证的定理；(3) 是本序列中次序在前的公式用变形规则所得的一个公式；(4) 最后一个公式 $E_n=A$。

上述"证明"的两种定义，实质是一样的，只是表达的形式不同而已。"分段连贯的演绎推理"与"有限的公式序列"是一码事，只是前者较通俗，后者更形式化罢了。

为了深刻理解每一个演绎推理段，还应该了解一些推理规则。数学中常用的推理规则有九个：1. 逻辑公理；2. 关系推理；3. 联言推理；4. 选言推理；5. 分离原则；6. 完全归纳法；7. 换质位法；8. 矛盾法（7，8 是反证法的两种形式）；9. 数学归纳法。

在这一节里先介绍 1～6；在第二节里介绍反证法 7，8；第四节里介绍 9。

1. 逻辑公理。

例如："长方体的体对角线的平方等于其长、宽、高三度的平方和，正四棱柱是长方体，所以正四棱柱的体对角线的平方等于其底面边长的平方的两倍与高的平方之和。

"一切偶数都能被 2 整除，所以偶质数 2 也能被 2 整除。

逻辑公理是：

集合 I 中每一个元素都有某性质，则 I 中任一元素或任一非空子集都有此性质。这一推理规则记为 R_1。

因为偶质数 2 是偶数集合中的一个元素，而偶数集中每一个元素都能被 2 整除，所以偶质数 2 也能被 2 整除。

全体正四棱柱是长方体集合中的一个非空子集，所以长方体的任何性质，正四棱柱都有。

根据逻辑公理，可知上述两推理都是正确的。

逻辑公理的实质是集合之间的包含关系的传递性。如果 $p\subset q$ 且 $q\subset r$，则 $p\subset r$。从维恩图（图 1—1）看，这显然是正确的。

逻辑公理可表达如下：

$$\begin{array}{ll} \text{大前提：} & q\subset r \\ \underline{\text{小前提：}} & \underline{p\subset q} \\ \text{结论：} & p\subset r \end{array}$$

这一推理形式也称三段论，是数学中常用的推理规则之一。

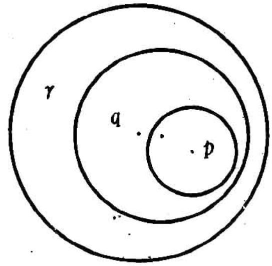

图 1—1

例 在锐角三角形中，$AD \perp BC$，$BE \perp AC$，D，E 是垂足（图1—2），求证：AB 的中点 M 到 D、E 的距离相等。

［**证**］ （1）有一个内角为直角的三角形是直角三角形。

而$\triangle ABD$中，$AD \perp BC$，即$\angle ADB = 90°$，故$\triangle ABD$是直角三角形。

同理，$\triangle AEB$也是直角三角形。

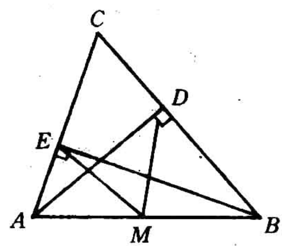

图 1—2

（2）∵ 直角三角形斜边上的中点等于斜边的一半，而 M 是直角三角形 ADB 的斜边 AB 上的中点，DM 是斜边上的中线，

∴ $MD = \frac{1}{2}AB$。

同理，M 是直角三角形 AEB 的斜边 AB 上的中点，ME 是斜边的中线，

∴ $ME = \frac{1}{2}AB$。

∴ $MD = ME$。

［**说明**］这里（1）、（2）都是逻辑公理的应用，最后从 $MD = \frac{1}{2}AB$，$ME = \frac{1}{2}AB \Rightarrow MD = ME$，则是下面将要介绍的关系推理的实例。

2. 关系推理。

（1）对称关系推理。

数学中出现的关系很多。例如平行、垂直、全等、相似、相等、同解、等价等等。有一种关系是：若 $a/\!/b$，则 $b/\!/a$；若 $a\perp b$，则 $b\perp a$；若 $A\cong B$，则 $B\cong A$；……。这种关系称为对称关系。对称关系推理可以概括为：

在集合 I 中，有元素 x，y（$x\neq y$）存在对称关系，记作 xRy。对称关系推理就是从 xRy 可以推出 yRx，反过来也一样，即

$$xRy\Leftrightarrow yRx。$$

例如，空间两直线 l_1、l_2，若 $l_1/\!/l_2$，则 $l_2/\!/l_1$；若 $l_1\perp l_2$，则 $l_2\perp l_1$。

又如方程 $f_1(x)=0$ 与方程 $f_2(x)=0$ 同解，则方程 $f_2(x)=0$ 与方程 $f_1(x)=0$ 同解。

（2）传递关系推理。

数学中，若 $a=b$，$b=c$，则 $a=c$；若 $a>b$，$b>c$，则 $a>c$。这样的关系称为传递关系。平行、相等、全等、相似、等积、同解、等价、大于、小于、包含等等都具有传递性。传递关系推理可以概括为：

在集合 I 中，元素 x、y、z 具有传递关系，就是从 xRy，yRz 可以推出 xRz，即

$$xRy,\ yRz\Rightarrow xRz。$$

对称关系推理，传递关系推理分别记为 R_2，R_2'。

上面的例子中，$MD=\frac{1}{2}AB,\frac{1}{2}AB=ME\Rightarrow MD=ME$，就是 R_2' 的应用。

例 设 $\theta\in R$，x，$y\in R^+$，求证：$x^{\sin^2\theta}y^{\cos^2\theta}<x+y$。

［**分析**］ 欲证此不等式，必须将左式非同底数幂转化为同底数幂。由于 $x\leqslant\max(x, y)$，$y\leqslant\max(x, y)$，其中

max (x, y)表示 x、y 中最大的那个数，故可采用放大法证明。

［证］ $x \leqslant \max(x, y)$，$y \leqslant \max(x, y)$。

根据正指数幂函数在 $(0, +\infty)$ 上是增函数，应用逻辑公理（即 R_1），可得

$$x^{\sin^2\theta} \leqslant [\max(x,y)]^{\sin^2\theta},$$

$$y^{\cos^2\theta} \leqslant [\max(x,y)]^{\cos^2\theta}。$$

再根据不等式的性质“若 $0<a\leqslant b$，$0<c\leqslant d$，则 $ac\leqslant bd$”，可得

$$x^{\sin^2\theta}y^{\cos^2\theta} \leqslant [\max(x, y)]^{\sin^2\theta+\cos^2\theta} = \max(x,y)。$$

$\because \quad \max(x,y) < x+y \quad (\because x>0, y>0)$，

根据大于关系的传递性（即 R_2'），得

$$x^{\sin^2\theta}y^{\cos^2\theta} < x+y。$$

3. 联言推理。

例如，若$\triangle ABC$ 是直角三角形，且$\triangle ABC$ 是等腰三角形，可以推出$\triangle ABC$ 是等腰直角三角形。这就是联言推理的组合式：若 A 成立，B 成立，可以推出 A 且 B 成立。反过来，若 A 且 B 成立，可以推出 A 成立，也可推出 B 成立，这就是联言推理的分解式。

把 A 且 B 成立记作 $A \wedge B$，读作 A 且 B，（或 A 与 B）。它的意义是当且仅当 A，B 都成立（即都对）时，$A \wedge B$ 成立。

A 成立，B 成立$\Rightarrow A \wedge B$ 成立。这是联言推理的组合式，记作 R_3。

$A \wedge B \Rightarrow A$ 成立；$A \wedge B \Rightarrow B$ 成立。这是联言推理的分解式，记作 R_3'。

如$||z_1|-|z_2||\leqslant|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|$可推出$|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|$；也可推出$|z_1+z_2|\geqslant||z_1|-|z_2||$。

4. 选言推理。

例如，“已知大于1的自然数N，且N不是合数，则N必为质数。”

因为大于1的自然数N或为质数或为合数，既然不是合数，那么必为质数。

这样的推理称为选言推理。把A成立或B成立，记为$A\vee B$，读作A或B。当且仅当A，B都不成立时，$A\vee B$不成立。也就是A成立B也成立，A成立B不成立，A不成立B成立，这三种情况的任一种情况下，$A\vee B$都成立。选言推理可以概括为：

$A\vee B$成立且B不成立$\Rightarrow A$成立；

$A\vee B$成立且A不成立$\Rightarrow B$成立。

选言推理记作R_4。

例　已知一质数p与一奇数q之和为11，求p，q。

[**解**]　因为p为质数，所以p为奇数或偶数。

如p为奇数，则奇数p与奇数q之和为偶数，这与已知$p+q=11$矛盾。根据选言推理，可知p为奇数或偶数，且p非奇数$\Rightarrow p$为偶数。

因为p为偶数且为质数，所以$p=2$（偶质数）。

从$p+q=11$，得$q=9$。

[**说明**]　“p为偶数且为质数$\Rightarrow p$为偶质数2”是R_3（联言推理的组合式）的应用。