

PINGMIANJIHE XINSIWEI

平面几何

新思维

邓培友 著



中国海洋大学出版社

平面几何新思维

邓培友 著

中国海洋大学出版社

• 青岛 •

图书在版编目(CIP)数据

平面几何新思维/邓培友著. —青岛:中国海洋
大学出版社,2010.12
ISBN 978-7-81125-540-9

I. ①平… II. ①邓… III. ①平面几何 IV.
①0123.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 256982 号

出版发行 中国海洋大学出版社
社 址 青岛市香港东路 23 号 邮政编码 266071
网 址 <http://www.ouc-press.com>
电子信箱 xianlimeng@gmail.com
订购电话 0532-82032573 (传真)
责任编辑 孟显丽 电 话 0532-85901092
印 制 青岛海大印务有限公司
版 次 2010 年 12 月第 1 版
印 次 2010 年 12 月第 1 次印刷
成品尺寸 144 mm×215 mm
印 张 2.75
字 数 47 千字
定 价 18.00 元



前 言

三角形是平面几何学中最简单、最基础的图形。三角形可同时拥有以下四个定义：由不在同一直线上的三条线段首尾顺次连接所组成的封闭图形叫做三角形；由三条边首尾相接组成的内角和为 180° 的封闭图形叫做三角形；由两个拥有公共边的角所组成的封闭图形叫做三角形；一条直线和一个角的两条边同时相交所组成的封闭图形叫做三角形。以上四种三角形定义都是正确的，其文字描述的不同是因为其观察认识三角形的角度不同、方法不同和逻辑推理不同。以上是静态地观察一个三角形而得出的三角形定义描述，那么动态地观察又该如何？

在一个平板上，同时运行着许多形状、大小皆相同的三角形，你紧盯着其中一个三角形，很快就会跟踪



丢。在一个平板上,同时运行着许多形状、大小各不相同的三角形,你紧盯着其中一个三角形,就很难跟踪丢,原因是什么?有特点才有亮点,有亮点才有区别!三角形的内角决定三角形的形状,三角形的边长决定三角形的大小。一个三角形的大小和形状可由三个要素确定,这三个要素中有且至少有一条边参与;如果有两条边时,第三个要素就必须是它们之间的夹角(直角三角形除外)。一个三角形的形状可由其两个内角要素而唯一确定,如果硬要有边要素参入,则必须有边角边或边边边三个要素才可确定。

本书运用通俗易懂、风趣有味的语言,着力剖析了平面几何学的特点、三角形全等(或相似)性质定理和判定定理的特点、圆的性质定理和判定定理的特点、平面几何题已知条件的特点、求证的特点,并首次提出三个要素学说、作辅助线的两个原则和作辅助线的思维特点,即改变求证形式的照猫画虎法和改变已知条件形式的怀孕生子法。列方程式解平面几何题学说的提出,大大拓宽了我们的思路。

由于平面几何具有鲜明的直观性和有着严密的逻辑演绎方法相结合的特点,长期的实践表明,它已成为培养、提高青少年逻辑思维能力的好素材。历史上不知有多少科学家从学习几何中得到益处,从而作出了伟大的贡献。



时代呼唤创新型社会,创新型社会需要创新型人才,创新型人才必须有创新型思维,创新型思维习惯不是一天就能养成的。“不积跬步,无以至千里;不积小流,无以成江海。”

本书只谈解题思路、解题技巧,不谈解题步骤、解题细节。

通读完本书,如果能为你提供一点点帮助,幸莫大焉!

邓培友

2010-10-20



目次

第一章 引子	(1)
第二章 三个要素学说	(7)
第三章 三角形的特点	(19)
第四章 平面几何题中的已知条件特点	(22)
第五章 平面几何题中的求证特点	(26)
第六章 列方程式解平面几何题	(29)
第七章 列方程式添加辅助线解平面几何题	(35)
第一节 改变求证形式作辅助线	
——照猫画虎法	(38)
第二节 改变已知条件形式作辅助线	
——怀孕生子法	(66)
第三节 圆的平面几何题解法	(72)



第一章

引 子

本书只谈解题思路、解题技巧,不谈解题步骤、解题细节.

一道非常难的数学题,做了好长时间也没有做出,等看到答案后又觉得非常容易做,对此,好多人往往会发出这样的感慨:这种方法我怎么就没想到呢?问题出在哪里呢?有这样一则故事,也许会对解决这个问题有所启发.某位爱狗成疯的人,常常花费巨额金钱购买昂贵的宠物食品来喂养他的名犬.他听人说深海鱼油对狗的发育很有帮助,于是每天一大早,他就把他的爱犬牵来,用双膝夹紧狗头,硬使它张开大口,然后对准它的喉咙灌鱼油.有一天狗挣脱了主人的双膝,鱼油流得满地都是.这个人生气之余,惊喜地发现,自己的爱犬正在地



上静静地舔食着鱼油.此时,他猛然醒悟:原来狗抗拒的不是鱼油,而是他的喂鱼油的方式.

利用好的方法做事,往往事半功倍!

欧式几何的传统描述是一个公理系统,通过有限的公理来证明所有的“真命题”.

欧式几何的五条公理是:

1. 任意两个点可以通过一条直线连接.
2. 任意线段能无限延伸成一条直线.
3. 给定任意线段,可以以其一个端点作为圆心,该线段作为半径作一个圆.
4. 所有直角都全等.
5. 若两条直线都与第三条直线相交,并且在同一边的内角之和小于两个直角,则这两条直线在这一边必定相交.

长期的实践表明,由于欧式几何具有鲜明的直观性和有着严密的逻辑演绎方法,它已成为培养、提高青少年逻辑思维能力的好教材.历史上不知有多少科学家从学习几何中得到益处,从而作出了伟大的贡献.

平面几何学有什么特点呢?

要知道一只鸡的重量可用弹簧秤称一下,要知道一条道路的长度可用米尺量一下,要知道一个角的角度可用量角器测一下.但是,有好多物体的这些数据是很难直接称出、量出和测出的,而现实生活中又必须知道其

重量、长度和角度,这该怎么办呢?这就需要我们用几何知识来解决.利用几何知识可以间接地通过“比较”的方法解决有关问题.

公元前 200 年,聪明的古埃及人仅仅用了一些数学知识,就测得了地球一周的总长度.古埃及人发现,在当时的城市塞恩(图 1-1 中的 A 点),直立的杆子在某个时刻没有影子,而此时在 800 千米以外的亚历山大(图 1-1 中的 B 点),直立的杆子的影子却偏离垂直方向 7.2° (图 1-1 中的 $\angle AOD$ 等于 7.2°).根据这个道理,古埃及人算出地球一周的总长度约等于 40 000 千米,这是因为弧 AB 的长 $\div 7.2 = \text{地球周长} \div 360$ 的缘故.其中, AB 弧的长度大约为 800 千米($AO \parallel DB$, $\angle AOD = \angle ODB$).

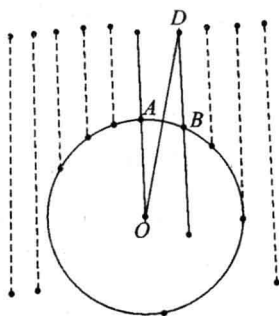


图 1-1

古希腊数学家、天文学家泰勒斯曾利用相似三角形



原理,测出了埃及胡夫金字塔的高度约为 131 米. 他的方法是:在金字塔顶部的影子处立一根杆子,借助太阳光线构成两个相似三角形,塔高与杆高之比等于两者影长之比. 由此,便可算出金字塔的高度.

显然,初中几何学就是一门“比较”的学科,利用几何的各种性质,用已知的线段、角或弧去“比较”或度量未知的线段、角或弧!

长度的度量单位是米,质量的度量单位是千克,而在初中几何学中,线段的度量单位往往是角,角的度量单位又往往是线段. 这句话该怎样理解呢? 对线段来说,往往在角规范、约束后才有资格“比较”线段与线段间的大小长度;对角来说,往往在线段规范、约束后才有资格“比较”角与角间的大小和方向. 换句话也可以这样表述:线段与线段之间想要取得联系,需要靠角的媒介作用,角和角之间想要取得联系,需要靠线段的媒介作用. 例如在三角形中,等角对等边,等边对等角;在等腰三角形中,底边上的高、中线和角平分线重合;在等边三角形中,内角为 60° 且三心重合(三角形的三条高的交点叫做三角形的垂心,重心是三角形三边中线的交点,三角形的三条内角平分线交于一点,该点叫做三角形的内心);在直角三角形中,三条边之间存在勾股定理关系,如果一个锐角等于 30° ,那么它所对的直角边等于斜边的一半,斜边上的中线等于斜边的一半.



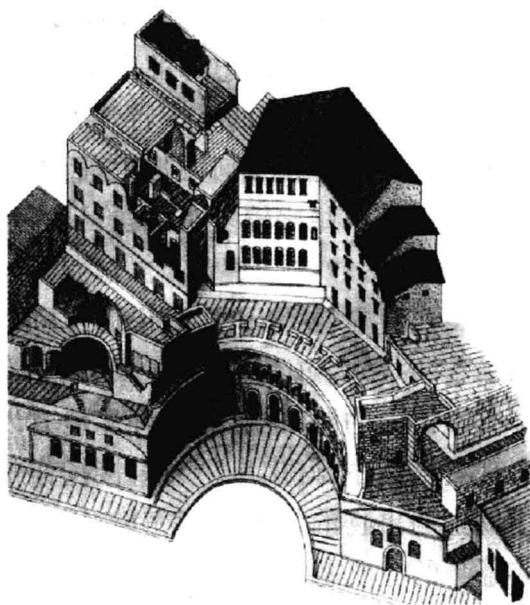
上面的表述强烈地提示我们：在初中几何学里，边和角是密不可分的，犹如阴与阳、雌与雄、表与里的关系！要想比较两条线段之间的关系，往往需要角的因素参与；要想比较两个角之间的关系，也往往需要边的因素参与，边与边之间比较大小不需要角做媒介参与的只有一个特例，这个特例就是勾股定理，角之间比较大小而不需要边做媒介参与的却有多多个特例，如三角形的三个内角和为 180° 、三角形的一个外角等于其余两个内角的和、同一平角上的所有角之和为 180° 、同一圆周角上的所有角之和为 360° 、四边形的内角和为 360° 。这些三个或三个以上角之间的多个特殊关系常常被我们忽略，因为它们只隐含在几何图形中，而不在已知条件中明确标明，但在一些比较复杂的题目中，它们又往往是解题的关键！

“条条大路通罗马”这个谚语是说通往罗马的路有很多，不只一条两条。换句话讲，通往罗马的路有直道也有弯道，即有直接去的路，也有辗转好多地方以后才能到达的路。现实生活中，好多事情靠直接操作是做不了的，需要借助别的事物的帮助才能完成，用现代时髦的话讲，好多任务的完成需要借助一个操作平台。例如，大的资金流动往往需要借助于股市、期货、银行，社会经济的发展往往需要借助于市场经济的推动。平面几何学就是线段和角的操作平台！平面几何学是一门“比较”的



学科、“媒介”的学科,利用几何的各种性质,利用已知的线段、角或弧去“比较”或度量未知的线段、角或弧!

初中几何学的特点就是线段间的联系往往通过角的媒介作用而实现,角与角间的联系往往通过线段的媒介作用而实现. 初中几何学的最主要的特征就是“比较”.





第二章

三个要素学说

很多初中数学问题可由三个具有相互关联的因素分析解决,这种说法我们暂称其为“三个要素学说”。“三个要素学说”是理解、解决许多平面几何题的好方法.以下是对三个要素学说的阐述.

三角形全等的五个定理:

边角边公理(SAS):有两边和它们的夹角对应相等的两个三角形全等.

角边角公理(ASA):有两角和它们的夹边对应相等的两个三角形全等.

推论(AAS):有两角和其中一角的对边对应相等的两个三角形全等.

边边边公理(SSS):有三边对应相等的两个三角形



全等.

斜边、直角边公理(HL):有斜边和一条直角边对应相等的两个直角三角形全等.

以上五个三角形全等定理可以用“三个要素学说”描述为:一个三角形的大小和形状可由它自身的三条边唯一确定(只要三角形三边的长度确定,这个三角形的形状和大小就完全确定,这个性质叫做三角形的稳定性);也可由两边和它们的夹角唯一确定;也可由两角和它们的夹边唯一确定;也可由两角和其中一角的对边唯一确定;也可由直角三角形任意两条边唯一确定(其中隐含着斜边的对角即直角这个要素);换句话也可以这样描述:一个三角形的大小和形状可由三个要素确定,这三个要素中有且至少有一条边参与;如果有两条边时,第三个要素就必须是它们之间的夹角(直角三角形除外).

只有已知图形的大小和形状确定了,才能谈和别的图形的比较,谈全等问题!在做平面几何题时,题意中不会明确告诉你是否应应用三角形全等知识来解题,只会告诉你一个个已知条件,如果已知条件中明确告诉你可判断三角形全等的三个要素了,你就应立刻意识到余下的解题可能应用三角形全等知识.

定理 平行于三角形一边的直线和其他两边(或两边的延长线)相交,所构成的三角形与原三角形相似.



相似三角形判定定理 1 两角对应相等,两三角形相似.

直角三角形被斜边上的高分成的两个直角三角形和原三角形相似.

判定定理 2 两边对应成比例且夹角相等,两三角形相似.

判定定理 3 三边对应成比例,两三角形相似.

定理 如果一个直角三角形的斜边和一条直角边与另一个直角三角形的斜边和一条直角边对应成比例,那么这两个直角三角形相似.

以上六个三角形相似定理可以用“三个要素学说”描述为:一个三角形的大小由它的边长确定,形状由它的角度确定.由于三角形的两个内角可确定第三个角(三角形的内角和为 180°),所以一个三角形的形状可由其两个内角要素而唯一确定;如果硬要有边要素参与,则必须有边角边或边边边三个要素才可确定.显然,要判定两个三角形相似,只需角角、边角边和边边边相等或相似即可(角相等、边成比例).由于直角三角形存在着一个角为直角的特殊情况,故两个直角三角形中,其对应的任意两条边成比例,即可判定为相似,而无须角要素参与.

在直角三角形中,如果一个锐角等于 30° ,那么它所对的直角边等于斜边的一半.



直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半.

定理 线段垂直平分线上的点和这条线段两个端点的距离相等.

逆定理 和一条线段两个端点距离相等的点,在这条线段的垂直平分线上.

线段的垂直平分线可看做是和线段两端点距离相等的所有点的集合.

定理 1 关于某条直线对称的两个图形是全等形.

定理 2 如果两个图形关于某直线对称,那么对称轴是对应点连线的垂直平分线.

定理 3 两个图形关于某直线对称,如果它们的对应线段或延长线相交,那么交点在对称轴上.

逆定理 如果两个图形的对应点连线被同一条直线垂直平分,那么这两个图形关于这条直线对称.

勾股定理 直角三角形两直角边 a 、 b 的平方和、等于斜边 c 的平方,即 $a^2 + b^2 = c^2$.

勾股定理的逆定理 如果三角形的三边长 a 、 b 、 c 有关系 $a^2 + b^2 = c^2$,那么这个三角形是直角三角形.

性质 1: 直角三角形两直角边的平方和等于斜边的平方.

性质 2: 在直角三角形中,两个锐角互余.

性质 3: 在直角三角形中,斜边上的中线等于斜边的一半.