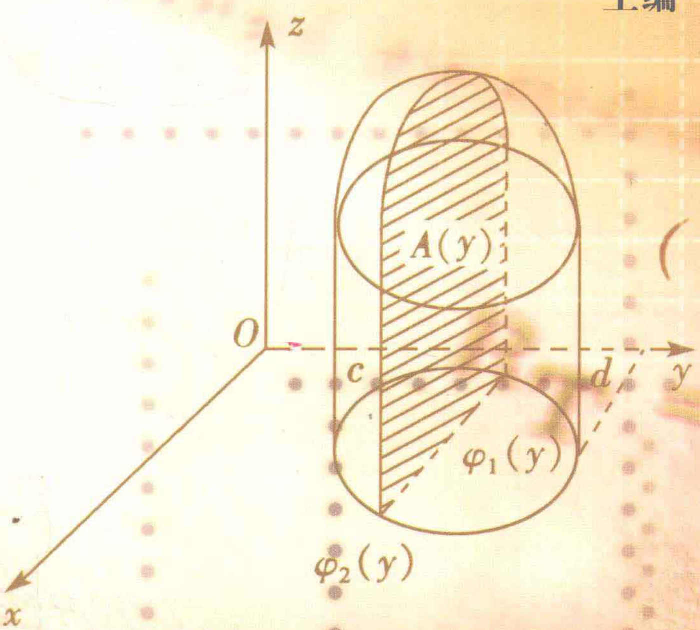
21世纪高职高专规划教材

高等数学

GAODENGSHUXUE

主编 张钢民 堵根民



内蒙古大学出版社

21世纪高职高专规划教材

高等数学

GAODENGSHUXUE

主　编　张钢民　堵根民

副主编　刘绥生　李江南

娜　仁　赵建英

内蒙古大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/张钢民,堵根民主编. -呼和浩特:内蒙古大学出版社,2006.8

ISBN 7-81115-003-4

Ⅰ.高… Ⅱ.①张…②堵… Ⅲ.高等数学-高等学校-教材 Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 106327 号

书　　名	高等数学
主　　编	张钢民　堵根民
责任编辑	张国柱
封面设计	张燕红
责任校对	李敬明
出　　版	内 蒙 古 大 学 出 版 社 呼和浩特市昭乌达路 88 号(010010)
发　　行	内蒙古新华书店
印　　刷	内蒙古政府机关印刷厂
开　　本	787×1092/16
印　　张	17.5
字　　数	414 千
版　　期	2006 年 8 月第 1 版 2006 年 8 月第 1 次印刷
标准书号	ISBN 7-81115-003-4/O·3
定　　价	22.00 元

前 言

为深化教育教学改革，培养应用型和创新型人才，适应高职教育大众化的发展趋势，内蒙古大学出版社组织了我区部分高职院校的一线骨干教师依据《高职高专高等数学课程教学基本要求》，在总结多年教学改革经验的基础上编写了《高等数学》教材。教材内容包括一元函数微积分、多元函数微分学及二重积分、级数等内容，建议总学时为 128 学时。

高等数学是学习现代科学技术必不可少的基础知识。一方面它为后继课程的学习做好了铺垫，另一方面它对培养学生基本运算能力、逻辑思维能力和严谨的科学态度及科学的思维方式都具有重要意义。它既是一门重要的公共必修课，又是一门重要的工具课，因此本教材坚持以“应用为主，够用为度，学有所用，用有所学”的原则，在适当保持数学学科的科学性系统性的前提下，注重数学的基础性、大众性，力求用通俗的语言阐述高等数学中的概念及定理，并且努力突出下面几方面的特点：

1. 突出应用与计算，淡化理论，对概念和定理尽量用通俗易懂的语言描述，强调基础知识的掌握及基本解题法和能力的训练。

2. 从高职学生实际出发，考虑到方便学生学习、明确目标、掌握所学知识，在每章内容的开始，列出了本章的学习目标，而在内容结束则做出了本章小结，同时加大了各章内容中的典型例题分析及应用例题分析。

3. 教材内容注意了高、中、低的结合，尽量满足不同层次学生的需求。

4. 在每章内容结束后配有一定数量的 A、B 两类习题：其中 A 类题主要以计算和应用为主，目的在于培养学生的运算能力和应用能力；B 类题主要是选择题和填空题，突出概念、性质、定理、公式等方面的内容，目的在于使学生对所学知识有一个准确清楚的理解。

本书由主编张钢民、堵根民统稿、审阅，具体编写情况为：第一、七章由刘绥生（内蒙古工业大学职业技术学院）编写，第二章由堵根民（呼和浩特职业学院）编写，第三章由李江南（呼和浩特职业学院）编写，第四章由张钢民（内蒙古商贸职业学院）编写，第五章由娜仁（内蒙古商贸职业学院）编写，第六章由赵建英（内蒙古商贸职业学院）编写。

本书在编写过程中广泛参考国内外教材和书籍，吸收和借鉴了许多同行的宝贵经验及成果，在此表示衷心感谢。由于编者水平有限，加之时间仓促，书中难免有不妥之处，错误也在所难免，恳请专家、同行与广大读者批评指正。

编　者

2006 年 8 月

目　　录

第一章　函数、极限与连续

学习目标：

1. 掌握函数的定义，会求一些函数的定义域；
2. 了解函数的简单性质；
3. 掌握基本初等函数及其主要性质；
4. 理解并掌握复合函数的定义与复合条件；
5. 理解数列及函数极限的定义，掌握基本的函数极限的求法；
6. 掌握无穷小量与无穷大量的定义与性质；
7. 掌握两个重要极限及其应用；
8. 了解函数的连续与间断的定义，会求函数的连续区间和间断点；
9. 了解闭区间上连续函数的性质.

函数是高等数学最基本的概念. 本章通过对函数概念及函数一般特性的概括，引进初等函数，为学习“高等数学”打下基础.

在高等数学中，极限是深入研究函数和解决实际问题的基本思想方法. 我们将从数列的极限入手，进一步讨论函数的极限，并应用极限的思想方法，讨论函数的连续性概念和连续函数的重要性质. 连续函数是我们着重研究的一类函数.

§1.1　函数

一、实数概述

1. 实数与数轴

实数由有理数和无理数组成. 有理数包括零、正负整数和正负分数. 有理数可以用分数 $\frac{p}{q}$（p,q 为整数，$q \neq 0$）表示，也可用有限小数或无限循环小数表示. 无限不循环小数叫做无理数. 例如$\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$，$\lg 5$，π 等等. 一切有理数及无理数统称为实数. 全体实数的集合，称为实数集，记作 R.

规定了原点及单位长度的有向直线，称为数轴. 任意实数都对应数轴上唯一的一点；反过来，数轴上任意点都唯一地表示一个实数. 我们说，全体实数与数轴上的所有点有一一对应的关系. 因此，“实数 a” 与“数轴上的点 a” 两种说法具有同一含义.

2. 实数的绝对值

设 a 是一个实数，则记号 $|a|$ 称为 a 的绝对值，定义为

$$|a| = \begin{cases} a, & a \geqslant 0 \\ -a, & a < 0 \end{cases}$$

不难看出，在数轴上，$|a|$ 表示点 a 到原点的距离（图 1－1）.

图 1－1

显然，点 a 若与原点 0 重合（$a=0$），则 $|a|=0$.

由绝对值的定义可知，对任意两个实数 a,b，有

$$|a-b| = \begin{cases} a-b, & a \geqslant b \\ b-a, & a < b \end{cases}$$

绝对值的性质：

(1) $|a| = \sqrt{a^2}$

(2) $|a| = |-a| \geqslant 0$，当且仅当 $a=0$ 时等号成立

(3) $-|a| \leqslant a \leqslant |a|$

(4) 设 $h>0$，则 $|a|<h$ 等价于 $-h<a<h$；$|a|>h$ 等价于 $a<-h$ 或 $a>h$

(5) $|a|-|b| \leqslant |a+b| \leqslant |a|+|b|$

推论：$|a_1+a_2+\cdots+a_n| \leqslant |a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|$

(6) $|a|-|b| \leqslant |a-b| \leqslant |a|+|b|$

(7) $|ab| = |a| \cdot |b|$

(8) $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$ $(b \neq 0)$

例 1　解不等式 $2|x|-3>0$.

解　$\because 2|x|-3>0$

$\therefore |x| > \dfrac{3}{2}$

所以所求的解是　$x<-\dfrac{3}{2}$ 或 $x>\dfrac{3}{2}$

例 2　解不等式 $|3-2x| \leqslant 4$.

解　因为 $|3-2x|=|2x-3|$，原不等式可以写为

$$|2x-3| \leqslant 4$$

所以 $\quad -4 \leqslant 2x-3 \leqslant 4$

$$-1 \leqslant 2x \leqslant 7$$

$$-\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant \frac{7}{2}$$

3. 区间与邻域

(1) 区间

区间分为有限区间和无限区间. 区间是数的集合.

设 $a,b \in R$,且 $a < b$.

有限区间

开区间 (a,b) 表示集合 $\left\{x \mid a < x < b\right\}$(图 1 - 2(a))

闭区间 $[a,b]$ 表示集合 $\left\{x \mid a \leqslant x \leqslant b\right\}$(图 1 - 2(b))

半开半闭区间 $(a,b]$ 表示集合 $\left\{x \mid a < x \leqslant b\right\}$, $[a,b)$ 表示集合 $\left\{x \mid a \leqslant x < b\right\}$(图 1 - 2(c),(d))

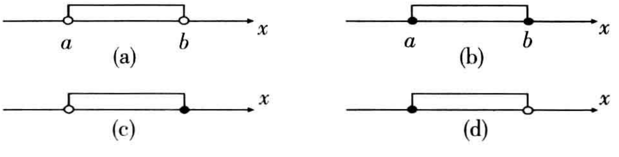


图 1 - 2

无限区间

$(a, +\infty)$ 表示集合 $\left\{x \mid a < x < +\infty\right\}$(图 1 - 3(a))

$(-\infty, b)$ 表示集合 $\left\{x \mid -\infty < x < b\right\}$(图 1 - 3(b))

$(-\infty, +\infty)$ 表示集合 $\left\{x \mid -\infty < x < +\infty\right\}$(图 1 - 3(c))

显然,区间可理解为实数集 R 的子集.

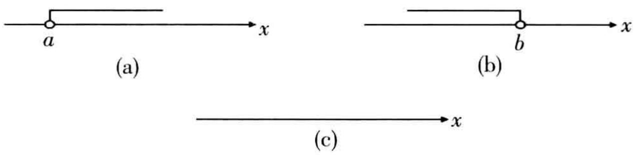


图 1 － 3

区间$[a, +\infty)$和$(-\infty, b]$也是无限区间.

（2）邻域

x－1，x+1

设$\delta>0$，则开区间$(x_0-\delta, x_0+\delta)$称为点x_0的δ（实心）邻域，x_0称为邻域的中心，δ为邻域的半径，邻域的长度为2δ. 若把邻域$(x_0-\delta, x_0+\delta)$的中心x_0去掉，则构成点x_0的空心邻域$(x_0-\delta, x_0)\cup(x_0, x_0+\delta)$.

二、函数

1. 常量与变量

在自然科学、经济管理科学，以及现实生活中，我们常遇到各种不同的量. 例如：长度、面积、体积、温度、压力、时间、速度、位移、产量、需求量、价格、收益等.

在观察某种自然现象或技术过程中或研究某种经济问题时，可以注意到，我们所遇到的种种不同的量，有着不同的性态. 其中有的量，在过程的进行中，始终保持一定的数值，这种量叫做常量. 但另外一些量，却按照一定规律发生着变化，也就是可以取各种不同的数值，这种量叫做变量.

常量与变量是相对的概念，有赖于现象发生的过程及场合. 同一个量，在某种情况下可以认为是常量；而在别的情况下，就可能是变量.

在数学中讨论的量，不论是常量还是变量，都不考虑它们的实际意义而只关注它们的数值，用字母$a, b, \cdots, x, y\cdots$来表示. 量x的每一个值都是一个数，因而可用数轴上的点来代表它. 如果量x是常量，则用数轴上的一个定点来表示；如果量x是变量，则用数轴上的动点来表示.

2. 函数概念

我们先来列举几个有两个变量互相联系的例子：

例3 自由落体运动中，物体下落时间t与下落距离s互相联系着. 如果物体距地面的高度为h，那么，对任意一个$t\in\left[0, \sqrt{\frac{2h}{g}}\right]$，都对应一个距离$s$. 我们在中学物理学中已经知道，$t$与$s$的对应关系是

$$s=\frac{1}{2}gt^2$$

例 4 设有半径为 r 的圆，由图 1 – 4 容易看出，对于任意一个 $n \in \{3,4,5,\cdots\}$，内接于该圆的正 n 边形的周长为

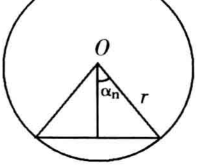


图 1 – 4

$$S_n = 2nr\sin\frac{\pi}{n}$$

其中 $\alpha_n = \frac{\pi}{n}$. 当边数 n 取定一个值时，由上式就可确定周长 S_n 的一个值.

具体的对应关系由下表给出：

n	3	4	5	6	7	8	⋯	100	⋯	1000	⋯
S_n	5.1962	5.6569	5.8779	6.0000	6.0744	6.1229	⋯	6.2822	⋯	6.2831	⋯

例 5 在气象观测站，气温自动记录仪把某一天的气温描绘在记录纸上，如图 1 – 5 所示，曲线上某一点 $P_0(t_0,\theta_0)$ 表示时刻 t_0 的气温是 θ_0. 观察这条曲线，就可以知道在这一天内气温的变化情况. 时间 t 和气温 θ 这两个变量之间的数量关系由一条曲线确定.

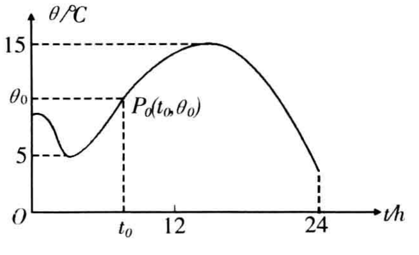


图 1 – 5

例6 某城市现行出租汽车收费标准为：乘车不超过2 千米，收费6 元；若超过2 千米，超过里程每千米（不足 1 千米按 1 千米计算）收费 1.2 元.

由于乘车量不超过2 千米与超过2 千米的收费标准不同，乘车费用 P 与乘车的里程 x 之间的数量关系应由两个数学表达式表示，即

$$P = \begin{cases} 6, & 0 < x \leqslant 2 \\ 6 + 1.2(x-2), & 2 < x \end{cases}$$

不考虑上面几个例子中量的实际意义，我们看到它们都是表达了两个变量间的相互依赖关系，这种相依关系给出了一种对应法则. 根据这一法则，当其中一个变量在某一范围内每取一个数值时，另一变量就有唯一确定的值与之对应. 两个变量之间的这种对应关系就是函数概念的实质.

定义 1.1（函数的定义） 设 x 和 y 是两个变量，D 是一个给定的非空数集. 若对于任意 $x \in D$，按照某一确定的对应法则 f，变量 y 总有唯一确定的值与之对应，则称 y 是 x 的函数，记作

$$y = f(x), \quad x \in D$$

其中，x 称为自变量，D 是 x 的取值范围，也就是使函数 $y=f(x)$ 有意义的数集. y 是 x 的函数，也叫做因变量.

当 x 取某一数值 $x_0 \in D$ 时，则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 有定义，与 x_0 对应的 y 的数值称为函数 $f(x)$ 在点 x_0 的函数值，记作 $y|_{x=x_0}$ 或 $f(x_0)$. 当 x 遍取函数定义域 D 中的所有数值时，对应的函数值全体构成的数集

$$Z=\left\{y \mid y=f(x), x \in D\right\}$$

称为函数 $y=f(x)$ 的值域. 若 $x \notin D$，则称函数在点 x_0 没有定义.

由函数定义可知，函数的定义域 D 和对应法则 f 是决定函数关系的两个要素，而与自变量用什么字母表示无关. 也就是说，$y=f(x), x \in D$ 与 $y=f(t), t \in D$ 是同一函数. 但 $y=f(x)$，$x \in D$ 与 $y=g(x), x \in D$ 是不同的. 因为它们的定义域虽然相同，但对应法则不相同. 又如 $y=f(x), x \in D_1$ 与 $y=f(x), x \in D_2(D_1 \neq D_2)$，也是不同的. 因为虽然它们的对应法则相同，但定义域不同. 因此，两个函数当且仅当定义域相同且对应法则相同时，它们才是相同的函数.

由函数定义可知，y 与 x 的对应是单值的，例如 $y=x^2, x \in(-\infty,+\infty)$.

由函数定义还可知，函数定义域的确定，应根据具体情况来考虑求出，使得 $x \in D$ 时，函数 $y=f(x)$ 有意义.

下面，我们列举一些例题，来说明上述概念及其应用.

例 7 讨论下列各对函数，是否为同一函数.

(1) $f(x)=\lg x^2, g(x)=2\lg x$

(2) $f(x)=x, g(x)=\sqrt{x^2}$

(3) $f(x)=x, g(x)=\arcsin(\sin x)$

(4) $f(x)=\sin(\arcsin x), g(x) \neq \arcsin(\sin x)$

(5) $f(x)=\begin{cases}x+1, & -1<x<0 \\ x-1, & 0<x<1\end{cases}, g(t)=f^{-1}(t)$

解 易判断(1)定义域不同；(2)对应法则不同；(3)对应法则不同；(4)对应法则和定义域都不同，因而它们都不是同一函数.

我们来分析第(5)题. 因为 $g(t)=f^{-1}(t)$，而

$$f^{-1}(x)=\begin{cases}x+1, & -1<x<0 \\ x-1, & 0<x<1\end{cases}$$

将字母 x 换成 t，则

$$f^{-1}(t)=\begin{cases}t+1, & -1<t<0 \\ t-1, & 0<t<1\end{cases}$$

显然$f^{-1}(t)$与$f(x)$不仅定义域相同,而且对应法则也相同,所以它们是同一函数.

例 8　求下列函数的定义域:

(1) $f(x)=\dfrac{\sqrt{4-x^2}}{\ln(x+2)}$

(2) $g(x)=\dfrac{1}{|x+2|+|x-1|}$

解　(1) 要使函数$f(x)=\dfrac{\sqrt{4-x^2}}{\ln(x+2)}$有意义,必须$4-x^2\geqslant 0$且$x+2>0$,$x+2\neq 1$同时成立,即

$$\begin{cases}|x|\leqslant 2\\ x>-2\\ x\neq -1\end{cases}\quad 或\quad \begin{cases}-2\leqslant x\leqslant 2\\ x>-2\\ x<-1\\ x>-1\end{cases}$$

所以函数$f(x)$的定义域是$D=(-2,-1)\cup(-1,2]$.

(2) 因为$|x+2|=0$和$|x-1|=0$不可能同时成立,所以

$$|x+2|+|x-1|\neq 0$$

所以函数$g(x)$的定义域是实数集R,即$D=R$.

例 9　已知函数$f(x)$的定义域为$[a,b]$,且$b>-a>0$,求函数$F(x)=f(x)-f(-x)$的定义域.

解　因为$f(x)$的定义域为$[a,b]$,所以$f(-x)$的定义域为$[-b,-a]$

解不等式组$\begin{cases}a\leqslant x\leqslant b\\ -b\leqslant x\leqslant -a\end{cases}$,注意到$b>-a>0$,得$F(x)$的定义域为$[a,-a]$(图1-6).

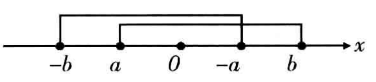


图1-6

例 10　设$f(x)=\dfrac{|x-2|}{x+1}$,求$f(0)$,$f(2)$,$f(-2)$,$f(1)$,$f(\frac{1}{2})$.

解　$f(x)$的定义域是$(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$. 若$x_0\in(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$,那么,$f(x_0)$是函数$f(x)$在点$x_0$的函数值. 所以

$$f(0)=\frac{|0-2|}{0+1}=2$$

$$f(2)=\frac{|2-2|}{2+1}=0$$

$$f(-2)=\frac{|-2-2|}{-2+1}=-4$$

$$f(1)=\frac{|1-2|}{1+1}=\frac{1}{2}$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\left|\frac{1}{2}-2\right|}{\frac{1}{2}+1}=1$$

3. 函数的表示法

（1）表格法：在实际应用中，常将一系列的自变量值与对应的函数值列成表，如例 4. 函数的表格表示法不但是为了应用上的便利，而且它可以表示不知道解析表达式的函数. 这在自然科学、工程技术及经济学中是常用的. 它的局限性是不能完全反映两个变量之间的函数关系.

（2）图示法：用几何图形（曲线）表示变量 x 与 y 之间的函数关系，称为图示法，当自变量等于曲线上点的横坐标，对应的函数值就等于该点的纵坐标. 因此，函数也可用坐标平面上的曲线来表示，如例 5. 函数的图示法有一个很大的优点 —— 直观性. 这使它对于函数的研究非常有用.

（3）解析法：如果两个变量之间的函数关系借助公式或分析式直接指出，要对自变量施行哪些数学运算（如加、减、乘、除、乘方、开方、取对数、求正弦、余弦等等），以及按照怎样的次序来进行这些运算，才能给出函数的对应值，我们说这是用解析法（公式法）表示函数. 如例 3、例 4、例 6 中的函数 $S=\frac{1}{2}gt^2, t\in\left[0,\sqrt{\frac{2h}{g}}\right]$；$S_n=2nr\sin\frac{\pi}{n}, n\in\{3,4,5,\cdots\}$和

$P(x)=\begin{cases}6, & 0<x\leqslant 2\\ 6+1.2(x-2), & 2<x\end{cases}$. 对 $P(x)$ 这种类型的函数，我们称之为分段函数. 它的定义域是$(0,2]\cup(2,+\infty)$，即$(0,+\infty)$.

在分析解决实际问题时，究竟采用哪一种方法，要看采用哪一种方法更为简便、更为直观. 一般来讲，要结合采用.

最后，我们来介绍一下显函数和隐函数概念. 若因变量 y 是用自变量 x 的数学解析式直接表达出来的，这样的函数称为显函数. 如例 3、例 4、例 6 中的函数及函数

$$y=\sqrt{1-x^2},\quad y=\lg(3x+1)$$

都是显函数. 若两个变量 x 与 y 之间的函数关系是用方程 $F(x,y)=0$ 来表示的，则称为隐函数. 如

$$x^2+y^2-R^2=0,\quad xy+e^{xy}=0$$

就是隐函数. 在隐函数中，哪个变量作为自变量都可以；若指定 x 为自变量，则当 x 取定一个

值后,变量 y 的值就相应地被确定了,即 y 是 x 的函数.

显然,显函数可以表示为隐函数,但隐函数不一定能表示为显函数.

三、函数的几何特性

1. 函数的奇偶性

函数 $y = x^2$ 的图像关于 y 轴是对称的(图 1 - 7). 我们把具有这种几何特性的函数叫做偶函数. $y = f(x)$ 是偶函数的标志是:当自变量 x 取一对互为相反的数时,函数的值不变,即 $f(-x) = f(x)$. 函数 $y = x^3$ 的图像关于原点是对称的. 我们把具有这种几何特性的函数叫做奇函数. $y = f(x)$ 是奇函数的标示是:当自变量取一对互为相反的数时,函数的值也是互为相反的数,即 $f(-x) = -f(x)$.

设函数 $y = f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称,若对任意 $x \in D$,有

(1) $f(-x) = f(x)$,则称 $f(x)$ 为偶函数.

(2) $f(-x) = -f(x)$,则称 $f(x)$ 为奇函数.

当(1)(2) 都不成立时,$f(x)$ 称为非奇非偶函数.

例 11 判断下列函数的奇偶性:

(1) $f(x) = \ln\dfrac{1-x}{1+x}$ (2) $f(x) = x\left(\dfrac{1}{2^x - 1} + \dfrac{1}{2}\right)$

解 (1) 函数 $f(x) = \ln\dfrac{1-x}{1+x}$ 的定义域是 $(-1,1)$,对任意的 $x \in (-1,1)$,由于

$$f(-x) = \ln\frac{1-(-x)}{1+(-x)} = \ln\frac{1+x}{1-x} = -\ln\frac{1-x}{1+x} = -f(x)$$

所以 $f(x)$ 是奇函数.

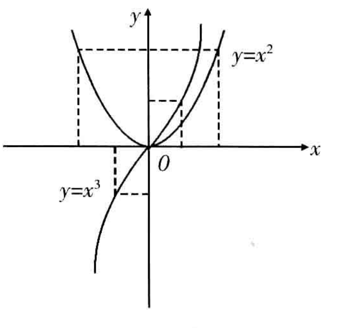


图 1 - 7

(2) 函数 $f(x) = x\left(\dfrac{1}{2^x - 1} + \dfrac{1}{2}\right)$ 的定义域是 $(-\infty,0) \cup (0,+\infty)$. 对任意的 $x \in (-\infty,0) \cup (0,+\infty)$,由于

$$f(-x) = (-x)\left(\frac{1}{2^{-x} - 1} + \frac{1}{2}\right) = (-x)\left(\frac{2^x}{1 - 2^x} + \frac{1}{2}\right)$$

$$= x\left(\frac{2^x}{2^x - 1} - \frac{1}{2}\right) = x\left(\frac{2^x}{2^x - 1} - 1 + \frac{1}{2}\right)$$

$$= x\left(\frac{1}{2^x - 1} + \frac{1}{2}\right) = f(x)$$

所以 $f(x)$ 是偶函数.

2. 函数的单调性

函数 $y = x^3$ 的图像是从左到右逐渐上升的(图 1 - 7),我们把具有这种几何特性的函

数，叫做增函数. 而把图像从左到右逐渐下降的函数，叫做减函数. 如 $y=-x$ 就是一个减函数. 函数 $y=x^2$ 的图像在其整个定义域 $(-\infty,+\infty)$ 里既不是增函数也不是减函数. 但如果把定义域 $(-\infty,+\infty)$ 分成 $(-\infty,0)$ 和 $[0,+\infty)$ 两部分，那么，在 $(-\infty,0)$，图像是从左到右逐渐下降的. 因此我们说，在这个区间里函数 $y=x^2$ 是减函数. 相应地，把 $(-\infty,0)$ 叫做 $y=x^2$ 的减区间；在 $[0,+\infty)$，图像是从左到右逐渐上升的. 因此我们说，在这个区间里函数 $y=x^2$ 是增函数. 相应地，把 $[0,+\infty)$ 叫做 $y=x^2$ 的增区间.

设函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上有定义，若对于任意 $x_1,x_2\in I$，且 $x_1<x_2$，有

(1) $f(x_1)<f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 是 I 上的增函数.

(2) $f(x_1)>f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 是 I 上的减函数.

某一区间 I 上的增函数和减函数，统称为这个区间上的单调函数，而这个区间就叫做函数的单调区间.

例 12 讨论函数 $f(x)=\dfrac{ax}{x^2-1}$，$x\in(-1,1)$，$(a>0)$ 的单调性.

解 设 $-1<x_1<x_2<1$.

$$\text{因为} f(x_1)-f(x_2)=\frac{ax_1}{x_1^2-1}-\frac{ax_2}{x_2^2-1}=\frac{a(x_1x_2+1)(x_2-x_1)}{(x_1^2-1)(x_2^2-1)}$$

又因为 $-1<x_1<x_2<1$，所以

$$f(x_1)-f(x_2)>0$$

即

$$f(x_1)>f(x_2)$$

所以 $f(x)$ 是减函数.

学习导数的应用之后，同学们会很容易应用导数的概念来判断函数的单调性.

3. 函数的周期性

我们知道，正弦函数 $y=\sin x$ 是周期函数. 即

$$\sin(x+2k\pi)=\sin x\quad(k=\pm1,\pm2,\cdots)$$

即 $\pm2\pi,\pm4\pi,\cdots$ 都是它的周期，2π 是它的最小正周期，一般称 2π 是正弦函数的周期.

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D. 若存在常数 $T>0$，对于任意的 $x\in D$，有 $x\pm T\in D$，且

$$f(x\pm T)=f(x)$$

总成立，则称 $f(x)$ 是以 T 为周期的周期函数.

若 T 是函数的一个周期，则 $-T,\pm2T,\pm3T,\cdots$，也是它的周期. 通常称周期中的最小正周期为函数的周期. 以 T 为周期的周期函数，在长度为 T 的各个区间上，函数具有相同形状的图像.

同正弦函数一样，余弦函数 $y=\cos x$ 周期也是 2π. 正切函数 $y=\tan x$ 和余切函数 $y=\cot x$ 的周期都是 π.

4. 函数的有界性

在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上，函数 $y=\sin x$ 的图像介于 $y=-1$ 和 $y=1$ 两条直线之间，即 $|\sin x|\leqslant 1$. 而函数 $y=x^3$ 的图形向上和向下都无限延伸，即不存在两条平行于 x 轴的直线，使其介于这两条直线之间. 我们说，前者在 $(-\infty,+\infty)$ 上是有界函数，而后者是无界函数.

设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义，若存在正数 M，使对任意的 $x\in I$，有

$$|f(x)|\leqslant M \quad (M>0)$$

则称函数 $f(x)$ 在区间上是有界函数；否则称 $f(x)$ 在区间 I 上是无界函数.

由函数的有界性概念可知，必须就自变量的某个取值范围讨论函数的有界性. 并且，如果一个函数 $f(x)$ 是有界的，那么，大于 M 的任何实数都是它的界.

例如，$f(x)=3+x$ 在闭区间 $[-1,1]$ 上是有界的，上界是4（或大于4的任何数），下界是2（或小于2的任何数）. 再如，$f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在区间 $[2,+\infty)$ 上是有界的，上界是 $\dfrac{1}{2}$（或大于 $\dfrac{1}{2}$ 的任何数），下界是0（或小于0的任何数）；而在开区间 $(0,2)$ 上是无界的. 因为可通过选择充分接近于0的 x，使 $f(x)$ 达到我们期望的任意大的值，故不存在上界，而下界是 $\dfrac{1}{2}$（或小于 $\dfrac{1}{2}$ 的任何数）. 我们也可以说，函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在开区间 $(0,2)$ 上是有下界无上界函数.

四、反函数

我们已经知道，在函数 $y=f(x)$ 中，x 是自变量，y 是因变量，然而在同一过程中，函数关系中的两个变量究竟哪一个是自变量，哪一个是因变量，并不是绝对的，而应视问题的具体要求来确定. 例如，销售某种商品，已知商品价格为 P，如果想根据商品销售量 x 来确定该商品销售总收入 y，可以认为 x 是自变量，y 是因变量，即

$$y=Px$$

相反，如果想从商品销售总收入确定其销售量，就应把 y 看作自变量，把 x 取作是因变量，并可由上式把 x 解出，得函数关系

$$x=\frac{y}{P}$$

从上式知，对于每一个值 y，都有唯一的一个 x 与之对应，因此，函数 $x=\dfrac{y}{P}$ 叫做函数 $y=Px$ 的反函数.

定义 1.2（反函数定义）　设 $y=f(x)$ 是给定的一个函数，如果对其值域 Z 中的任意值