最新版 吉米多维奇数学分析习题集选解（下）

ZUIXINBAN JIMIDUOWEIQI SHUXUE FENXI XITIJI XUANJIE

经典 Classics

经典教材辅导用书 数学系列

知识要点

解题方法、技巧

习题详解

黄光谷 等 编

華中科技大學出版社
http://www.hustp.com

图书在版编目(CIP)数据

最新版吉米多维奇数学分析习题集选解(下册)/黄光谷 等编. -2版. —武汉:华中科技大学出版社,2009年6月
ISBN 978-7-5609-3892-9

Ⅰ.最… Ⅱ.黄… Ⅲ.数学分析-高等学校-解题 Ⅳ.O17-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第088639号

最新版吉米多维奇
数学分析习题集选解(下册)

黄光谷 等编

策划编辑:周芬娜
责任编辑:李 琴 周芬娜
责任校对:周 娟
封面设计:潘 群
责任监印:周治超

出版发行:华中科技大学出版社(中国·武汉)
武昌喻家山 邮编:430074 电话:(027)87557437

录 排:武汉佳年华科技有限公司
印 刷:湖北新华印务有限公司

开本:710mm×1000mm 1/16 印张:13.75 字数:400 000
版次:2009年6月第2版 印次:2009年6月第3次印刷 定价:21.00元
ISBN 978-7-5609-3892-9/O·404

内 容 简 介

吉米多维奇的《数学分析习题集》是一部著名的、很有代表性的习题集.编者根据我国目前的教学实际情况,选编了其中约三分之一的重要习题,并作了详细解答,分上、下两册出版.本书覆盖了该习题集各章节的主要内容,便于读者由厚到薄、由少而精地掌握该习题集内容,这对学习理科数学分析或工科高等数学(即微积分)的读者将大有裨益.

本书有很强的可读性,并兼顾多方需要,适合理、工科等的本、专科各专业教、学数学分析或高等数学(微积分)的师生作为教学参考书.

主 要 符 号

$\mathbf{N}$、$\mathbf{Z}$、$\mathbf{Q}$、$\mathbf{R}$、$\mathbf{C}$ 分别表示自然数集、整数集、有理数集、实数集、复数集.

$\mathbf{N}^*$ 表示正整数集（$\mathbf{N}$ 中去掉数 0 的集合）.

$\mathbf{R}^+$，$\mathbf{R}^-$ 分别表示正，负实数集.

$U(a,\delta)$表示以 a 为中心，δ 为半径的邻域.

$\mathring{U}(a,\delta)$表示去心邻域.

$\forall$ 表示“任意给定”或“任给”、“对任意的”.

$\exists$ 表示“存在”、“有”.

$\triangleq$表示“记为”、“定义为”.

$\Rightarrow$表示“推出”、“推得”或“蕴含”.

$\Leftrightarrow$表示可“互推出”、“等价于”或“充要条件”.

$\complement_I B$ 表示 I 中子集 B 的余集或补集.

$f(x)\in B(I)$表示区间 I 上的全体有界函数之集.

$C(I)$表示 I 上全体连续函数之集.

$D(I)$表示 I 上全体可导函数之集.

$D^n(I)$表示 I 上全体 n 阶可导函数之集.

$R(I)$表示 I 上全体（黎曼）可积函数之集.

$f(x)\in C[a,b]\cap D(a,b)$表示函数 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，且在开区间(a,b)内可导.

第二版前言

俄文吉米多维奇的《数学分析习题集》第 13 版在原版的基础上增加了两百多道新习题，但原题号未变，而是以附加子题号的形式插入了这两百多道题，例如题号 10.1 就是在原第 10 题后插入的一道题，其余类似.

《吉米多维奇数学分析习题集选解》自 2007 年初问世以来，承蒙读者厚爱，已印刷多次，但毕竟所依据的原习题集还是 20 世纪 50 年代初出版的，年代久远；现与时俱进，根据该习题集的最新第 13 版(中译本)予以增订，以适应新的情况. 为使本书不致变厚，在增补这二百多道新题解答的同时，删去了原选解题的部分内容，牵涉到有的题的第一个序号相应地作了变动，特此说明.

编　者

2009 年 1 月

前　　言

前苏联的吉米多维奇(Б. П、Демидович)著的《数学分析习题集》是一部著名的、很有代表性和影响力的书籍，原书曾经由前苏联高等教育部审定为综合性大学及师范院校数理系的教学参考书.该书自20世纪50年代初在我国翻译出版以来，几十年来引起了各大专院校广大师生的巨大反响，促进了我国数学分析(微积分)的教与学.

笔者从1958年至1965年间，曾陆续试解了该书中的大部分习题，收益颇丰.这次应邀从该书4462道习题中，挑选约30%的习题，整理详解，分上、下两册出版.这些题是根据我国目前的教学实际情况并兼顾理、工科等多方面需要而选解编入的，大部分是该书中难度中等或中等偏上的习题，也选入了少数基本题垫底；至于其它一些很容易的习题，没有选入，留给读者思考或演练；对于超出我国现时数学分析教学要求和考研要求或难度很大的习题，也未选入，有兴趣的读者可以查阅参考文献[2].这就是说，本书在挑选习题时只选编了原习题集中难度中等的一部分，并参考了前苏联著名数学家辛钦在参考文献[4]中推荐的习题.这样由厚到薄、由少而精，便于读者根据实际情况，掌握主要内容.

编写本书时，并没有逢三选一地在各章节中平均选题，对重点节，选了约1/2的好题；对有些超出教学要求的节，只选入了几个，甚至只一两个题作为代表.为了便于读者阅读本书，掌握有关知识点，照录了原习题集中各节前的知识要点，并冠以“内容提要”的标题，其中超出要求的内容加了“*”号.解题中用到的其它知识，读者可查阅参考文献[3]或[6]，这里不一一标出.

为了便于读者查阅，各题前写了两个题号，如5—320，第一个数字5是本书该节的顺序号，第二个数字320是原书《数学分析习题集》的题号.若行文中仅一个序号，如530，指的是原书《数学分析习题集》之题号.为了符合读者的阅读习惯，将原习题集中俄文的小题号(а)、(б)、(в)、(г)、(д)等，依次改成了数字(1)、(2)、(3)、(4)、(5)或(a)、(b)、(c)等.对于标注的式子的俄文(A)、(Б)、(B)等，改换成了读者熟悉的英文(A)、(B)、(C)等.其余类似.

选入的题都有详解，为了避免重复，不再作详细分析.简要分析以黑括号【 】标出，少数题在题末加“注”，力求画龙点睛，以期引起读者的注意或扩充知识面.有的题还给出了一题多解，许多题采用了与参考文献[2]不同的解法，以便活跃思路.

许多题的简单插图未另绘，留给读者思考或自绘草图，边读边想，以培养想象能力.

选编本书，得到出版社领导和编辑等的大力支持和指导；少部分题参考了参考文献[2]的解法，在此一并致谢！

由于我们水平有限，书中难免有不妥之处，恳请读者批评指正，以便再版时修改.

编　者

2006年5月

目　　录

第二篇 多变量函数

第五章　级　数

§1　数项级数、同号级数收敛性的判别法

内容提要

1. 一般概念

对于数项级数

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \qquad ①$$

若

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S \quad (S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$$

存在，则称级数 ① 为收敛的；反之，则称级数 ① 为发散的.

2. 柯西准则

级数 ① 收敛的充要的条件为对于任何的 $\varepsilon > 0$ 都存在 $N = N(\varepsilon)$，使得当 $n > N$ 和 $p > 0$ 时，不等式

$$|S_{n+p} - S_n| = \left|\sum_{i=n+1}^{n+p} a_i\right| < \varepsilon$$

成立.

特别是，若级数收敛，则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

3. 比较判别法 Ⅰ

设除级数 ① 外，还有级数

$$b_1 + b_2 + \cdots + b_n + \cdots \qquad ②$$

若当 $n \geqslant n_0$ 时，不等式 $0 \leqslant a_n \leqslant b_n$ 成立，则

(1) 从级数 ② 收敛可推得级数 ① 收敛；

(2) 从级数 ① 发散可推得级数 ② 发散.

特别是，当 $n \to \infty$ 时，若 $a_n \sim b_n$，则正项级数 ① 和 ② 同时收敛或同时发散.

4. 比较判别法 Ⅱ

设 $a_n = O^*\left(\frac{1}{n^p}\right)$[①]，则

(1) 当 $p > 1$ 时级数 ① 收敛；

(2) 当 $p \leqslant 1$ 时级数 ① 发散.

5. 达朗贝尔判别法

若 $a_n > 0\ (n = 1, 2, \cdots)$ 及 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$，则

(1) 当 $q < 1$ 时级数 ① 收敛；

(2) 当 $q > 1$ 时级数 ① 发散.

---

① 记号 O^* 的意义参阅第二章 §6.1.

6. 柯西判别法

若 $a_n \geqslant 0\ (n=1,2,\cdots)$ 及 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=q$,则

(1) 当 $q<1$ 时级数 ① 收敛;

(2) 当 $q>1$ 时级数 ① 发散.

7. 拉阿伯判别法

若 $a_n>0\ (n=1,2,\cdots)$ 及 $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=p$,则

(1) 当 $p>1$ 时级数 ① 收敛;

(2) 当 $p<1$ 时级数 ① 发散.

8. 高斯判别法

若 $a_n>0\ (n=1,2,\cdots)$ 及 $\dfrac{a_n}{a_{n+1}}=\lambda+\dfrac{\mu}{n}+\dfrac{\theta_n}{n^{1+\varepsilon}}$,其中,$|\theta_n|<C$ 而 $\varepsilon>0$,则

(1) 当 $\lambda>1$ 时级数 ① 收敛;

(2) 当 $\lambda<1$ 时级数 ① 发散;

(3) 当 $\lambda=1$ 时,若 $\mu>1$,则级数 ① 收敛;若 $\mu\leqslant 1$,则级数 ① 发散.

9. 柯西积分的判别法

若 $f(x)(x>0)$ 是非负的不增函数,则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f(n)$ 与积分 $\int_1^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 同时收敛或同时发散.

习 题 选 解

直接证明下列级数的收敛性并求它们的和:

【1—2548】 $\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2^2}+\dfrac{5}{2^3}+\cdots+\dfrac{2n-1}{2^n}+\cdots.$

解 记 $S_n=\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2^2}+\cdots+\dfrac{2n-1}{2^n}$,则

$$\frac{1}{2}S_n=\frac{1}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\cdots+\frac{2n-1}{2^{n+1}},$$

$$\frac{1}{2}S_n=S_n-\frac{1}{2}S_n=\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\cdots+\frac{2}{2^n}-\frac{2n-1}{2^{n+1}}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-2}}\right)-\frac{2n-1}{2^{n+1}},$$

所求
$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=1+\frac{1}{1-1/2}+0=3.$$

可见题设级数收敛.

【2—2550】 $\dfrac{1}{1\cdot4}+\dfrac{1}{4\cdot7}+\cdots+\dfrac{1}{(3n-2)(3n+1)}+\cdots.$

解 因 $S_n=\dfrac{1}{3}\left[\left(1-\dfrac{1}{4}\right)+\left(\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{7}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{3n-2}-\dfrac{1}{3n+1}\right)\right]=\dfrac{1}{3}\left(1-\dfrac{1}{3n+1}\right),$

所以
$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=1/3.$$

【3—2551】 (1) $q\sin\alpha+q^2\sin2\alpha+\cdots+q^n\sin n\alpha+\cdots$;

(2) $q\cos\alpha+q^2\cos2\alpha+\cdots+q^n\cos n\alpha+\cdots.$

解 记(1)中级数和为 S_1,(2)中级数和为 S_2,则有

$$S_1=\sum_{n=1}^{\infty}q^n\sin[(n-1)\alpha+\alpha]=\sum_{n=1}^{\infty}q^n[\sin(n-1)\alpha\cos\alpha+\cos(n-1)\alpha\sin\alpha]=q\cos\alpha S_1+q\sin\alpha(1+S_2),$$

所以
$$(1-q\cos\alpha)S_1-q\sin\alpha S_2=q\sin\alpha;\qquad ①$$

同理
$$q\sin\alpha S_1+(1-q\cos\alpha)S_2=q\cos\alpha.\qquad ②$$

联立式 ①、②,解得

$$S_1=\frac{D_1}{D}=\frac{q\sin\alpha}{1-2q\cos\alpha+q^2},\quad S_2=\frac{D_2}{D}=\frac{q\cos\alpha-q^2}{1-2q\cos\alpha+q^2}.$$

其中，D 与 D_1、D_2 分别是方程组的系数行列式与“换列”行列式.

【4—2552】 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})$.

解 记 $a_n=\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n}$，$n\in\mathbf{N}^*$，则

$$a_n=(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1})-(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}},$$

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}-\frac{1}{\sqrt{2}+1},\quad S=\lim_{n\to\infty}S_n=0-\frac{\sqrt{2}-1}{2-1}=1-\sqrt{2}.$$

【5—2554】 证明：若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，则把该级数的项经过组合而不变更其先后次序所得的级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}A_n\quad\left(A_n=\sum_{i=p_n}^{p_{n+1}-1}a_i\quad(p_1=1,p_1<p_2<\cdots)\right)$$

也收敛且有相同的和. 反之不真. 举出例子.

证 记 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}A_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 的部分和分别为 S_n 与 s_n，则

$$S_n=\sum_{i=1}^{n}A_n=\sum_{i=1}^{p_{n+1}-1}=s_{p_{n+1}-1},$$

所以

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}s_{p_{n+1}-1}=s,$$

可见 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}A_n$ 收敛，且与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 有相同的和 s.

反之不真. 反例：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}$ 显然发散；但 $(1-1)+(1-1)+\cdots+(1-1)+\cdots$ 却显然收敛于 0.

【6—2555】 证明：若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 的各项是正的，而把这级数的项经过组合得到的级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}A_n$ 收敛，则原来的级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 也收敛.

证 仍记 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}A_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 的前 n 项之和分别为 S_n 与 s_n. 由于 $a_n>0$ $(n\in\mathbf{N}^*)$，所以 $A_n>0$，故部分和数列 $\{S_n\}$ 与 $\{s_n\}$ 都单调增加，且显然有 $0<s_n<S_n$. 又 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}A_n$ 收敛，故 $\{S_n\}$ 有界，从而 $\{s_n\}$ 亦有界，所以 $\{s_n\}$ 收敛，从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 也收敛.

研究下列级数的收敛性：

【7—2558】 $\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\cdots$.

解 因为 $0<a_n\triangleq\frac{1}{n!}\leqslant\frac{1}{n(n-1)}<\frac{1}{(n-1)^2}$ $(n>1)$，又级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-1)^2}$ 是 p- 级数($p=2>1$)，故它收敛. 由比较判别法知，$\sum\limits_{n=2}^{\infty}a_n$ 及题设级数收敛.

【8—2566】 证明：若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 及 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 皆收敛且 $a_n\leqslant c_n\leqslant b_n(n=1,2,\cdots)$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n$ 也收敛. 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 皆发散，问级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n$ 的收敛性如何？

证 由于 $a_n \leqslant c_n \leqslant b_n \Longrightarrow 0 \leqslant c_n - a_n \leqslant b_n - a_n \quad (n \in \mathbf{N}^*)$,

又级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 都收敛,知 $\sum_{n=1}^{\infty}(b_n - a_n)$ 收敛.由上式及比较判别法知,级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(c_n - a_n)$ 也收敛,而 $c_n = (c_n - a_n) + a_n$,所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 也收敛.

若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 都发散,则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 可能收敛也可能发散.例如,$a_n = -1, b_n = 1$,$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 都发散,取 $c_n = 0$,则有 $a_n < c_n < b_n$,但 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 收敛于 0.另取 $\bar{c}_n = 1/k(k > 1)$,也有 $a_n < \bar{c}_n < b_n$,但 $\sum_{n=1}^{\infty} \bar{c}_n = \frac{1}{k}\sum_{n=1}^{\infty} 1$ 是发散的.

【9—2567】 设已知两发散级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 的各项不为负数.问下列两级数收敛性如何:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \min(a_n, b_n)$ 及(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \max(a_n, b_n)$?

答 (1) 可能收敛也可能发散.各举一例如下.

设 $a_n = n, b_n = 1/n(n \in \mathbf{N}^*)$,显然 $\sum_{n=1}^{\infty} n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 都发散,且 $\sum_{n=1}^{\infty} \min(a_n, b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 是发散的.

又设

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + n + \frac{1}{2^n} + \cdots, \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \frac{1}{3} + 1 + \cdots + \frac{1}{3^n} + n + \cdots,$$

显然 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 都发散,但 $\sum_{n=1}^{\infty} \min(a_n, b_n) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3^n} + \frac{1}{2^n}\right)$ 却是收敛的.

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \max(a_n, b_n)$ 一定也发散.这是因为 $\max(a_n, b_n) \geqslant a_n > 0$,由 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散和比较判别法知,$\sum_{n=1}^{\infty} \max(a_n, b_n)$ 也发散.

【10—2569】 证明:若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ 收敛,则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n|$, $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)^2$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n}$ 也收敛.

证 (1) 因为 $\quad |a_n b_n| \leqslant 2|a_n b_n| \leqslant |a_n|^2 + |b_n|^2 = a_n^2 + b_n^2$,

由题设知 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$ 收敛,再由上式和比较判别法知,$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n|$ 也收敛.

(2) $$(a_n + b_n)^2 = a_n^2 + b_n^2 + 2a_n b_n \leqslant 2(a_n^2 + b_n^2),$$

由题设和比较判别法知,$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)^2$ 也收敛.

(3) $$\frac{|a_n|}{n} = \frac{1}{n} \cdot |a_n| \leqslant 2 \cdot \frac{1}{n} \cdot |a_n| \leqslant \frac{1}{n^2} + a_n^2,$$

由 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 都收敛和比较判别法知,$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n}$ 也收敛.

【11—2571】 证明:若各项为正且其值单调减少的级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛,则 $\lim_{n\to\infty} n a_n = 0$.

证 由题设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛,知 $\forall \varepsilon > 0$,存在充分大的 n,使

$$a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{2n} < \varepsilon,$$

又

$$a_{n+1} > a_{n+2} > \cdots > a_{2n},$$

所以 $$na_{2n} < a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{2n} < \varepsilon,$$
即有 $$\lim_{n\to\infty} na_{2n} = 0 \quad 及 \quad \lim_{n\to\infty} 2na_{2n} = 0. \qquad ①$$
又 $$0 < (2n+1)a_{2n+1} < (2n+1)a_{2n} = \frac{2n+1}{2n} \cdot 2na_{2n},$$
所以 $$\lim_{n\to\infty}(2n+1)a_{2n+1} = 0. \qquad ②$$
由式 ①、② 知 $$\lim_{n\to\infty} na_n = 0.$$

利用柯西准则,证明下列正项级数的收敛性:

【12—2575】 $\dfrac{\cos x - \cos 2x}{1} + \dfrac{\cos 2x - \cos 3x}{2} + \cdots + \dfrac{\cos nx - \cos(n+1)x}{n} + \cdots.$

证 $$\left|\sum_{k=1}^{p} \frac{\cos(n+k)x - \cos(n+k+1)x}{n+k}\right|$$
$$= \left|\frac{\cos(n+1)x}{n+1} + \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1}\right)\cos(n+2)x + \cdots + \left(\frac{1}{n+p} - \frac{1}{n+p-1}\right)\cos(n+p)x - \frac{\cos(n+p+1)x}{n+p}\right|$$
$$\leqslant \frac{1}{n+1} + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n+p-1} - \frac{1}{n+p}\right) + \frac{1}{n+p} = \frac{2}{n+1} < \varepsilon,$$
这只需 $\forall \varepsilon > 0$,取 $n > \left[\dfrac{2}{\varepsilon} - 1\right] \triangleq N$(不妨设 $\varepsilon < 2$) 即可,所以题设级数收敛.

【13—2575.1】 $\dfrac{\cos x}{1^2} + \dfrac{\cos x^2}{2^2} + \cdots + \dfrac{\cos x^n}{n^2} + \cdots.$

提示:利用不等式:$\dfrac{1}{n^2} < \dfrac{1}{n(n-1)} = \dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n} (n = 2,3,\cdots)$.

解　用柯西准则证之.由
$$|S_{n+m} - S_n| = \left|\frac{\cos x^{n+1}}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{\cos x^{n+m}}{(n+m)^2}\right| \leqslant \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+m)^2}$$
$$< \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots + \frac{1}{(n+m-1)(n+m)}$$
$$= \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n+m-1} - \frac{1}{n+m}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+m} < \frac{1}{n},$$
于是 $\forall \varepsilon > 0$,取 $N = \left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$,当 $n > N$, $\forall m \in \mathbf{N}^*$,有 $\dfrac{1}{n} < \varepsilon$,即有
$$|S_{n+m} - S_n| < \varepsilon,$$
所以该级数收敛.

利用柯西准则,证明下列级数的发散性:

【14—2576】 $1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{n} + \cdots.$

证　取 $p = n$,因为
$$\left|\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}\right| > \frac{n}{2n} = \frac{1}{2} (\not< \varepsilon),$$
所以题设级数发散.

【15—2577.1】 $\dfrac{1}{\sqrt{1 \cdot 2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2 \cdot 3}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{n(n+1)}} + \cdots.$

解　任取 ε_0 使 $0 < \varepsilon_0 < 1/2$,由
$$|S_{2n+1} - S_n| = \frac{1}{\sqrt{(n+1)(n+2)}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{(2n+1)(2n+2)}} > \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n+2}$$
$$> \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+2} + \cdots + \frac{1}{2n+2}(共\ n+1\ 项) = \frac{n+1}{2(n+1)} = \frac{1}{2} > \varepsilon_0, n \in \mathbf{N}^*,$$

于是,由柯西准则,知该级数发散.

运用达朗贝尔、柯西或比较判别法,研究下列级数的收敛性:

【16—2578】 $\frac{1000}{1!}+\frac{1000^2}{2!}+\frac{1000^3}{3!}+\cdots+\frac{1000^n}{n!}+\cdots$.

解 【这类 a_n 含有阶乘或乘幂因子的式子,宜用比值判别法化简.】

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1000^{n+1}}{(n+1)!}\Big/\frac{1000^n}{n!}\right]=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1000}{n+1}=0<1$,

所以题设级数收敛.

【17—2585.2】 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx\prod\limits_{k=1}^{n}\frac{\sin^2 k\alpha}{1+x^2+\cos^2 k\alpha}$.

解 当 $x=0$ 时,级数显然收敛.当 $x>0$ 时,级数为正项级数,记其通项

$$a_n=nx\prod_{k=1}^{n}\frac{\sin^2 k\alpha}{1+x^2+\cos^2 k\alpha}\leqslant\frac{nx}{(1+x^2)^n}\triangleq b_n(>0),$$

而 $$\lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{(n+1)x}{(1+x^2)^{n+1}}\Big/\frac{nx}{(1+x^2)^n}\right]=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\cdot\frac{1}{1+x^2}\right)=\frac{1}{1+x^2}<1,$$

由比值审敛法知,级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛,再由比较法知,级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

当 $x<0$ 时,记 $y=-x>0$,同上证法知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.或由

$$\sum_{n=1}^{\infty}nx\prod_{k=1}^{n}\frac{\sin^2 k\alpha}{1+x^2+\cos^2 k\alpha}=-\sum_{n=1}^{\infty}n|x|\frac{\sin^2 k\alpha}{1+x^2+\cos^2 k\alpha}$$

($|x|>0$) 及已证,可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

总之,不论参数 x 和 α 为何实数值,题设级数皆收敛.

【18—2586】 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(2+1/n)^n}$.

解 【这类 a_n 含有乘幂因子的式子,宜用根值判别法开方化简.这里应改原习题集中分母 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 为 $\left(2+\frac{1}{n}\right)^n$ 才能判别.】

因为 $$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n^2}{(2+1/n)^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt[n]{n})^2}{2+1/n}=1/2<1,$$

所以题设级数收敛.

【19—2590】 $\sqrt{2}+\sqrt{2-\sqrt{2}}+\sqrt{2-\sqrt{2-\sqrt{2}}}+\sqrt{2-\sqrt{2-\sqrt{2-\sqrt{2}}}}+\cdots$.

解 $$a_1=\sqrt{2}=2\cos\frac{\pi}{4}=2\sin\frac{\pi}{2^{1+1}},$$

$$a_2=\sqrt{2-2\sin\frac{\pi}{2^{1+1}}}=\sqrt{2}\sqrt{1-\cos\frac{\pi}{4}}=2\sin\frac{\pi}{2^{2+1}},$$

设 $a_k=2\sin\frac{\pi}{2^{k+1}}$,则

$$a_{k+1}=\sqrt{2-\sqrt{2-\cdots-\sqrt{2+2\cos\frac{\pi}{4}}}}\quad(k+1\text{ 重根号,递推})$$

$$=\sqrt{2-2\cos\frac{\pi}{2^{k+1}}}=2\sin\frac{\pi}{2^{k+2}},$$

所以 $$a_n=2\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}\quad(n\in\mathbf{N}^*).$$

而
$$|a_n| = 2\left|\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}\right| \leqslant \frac{\pi}{2^n},$$
且
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{2^n} = \pi\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n \triangleq \pi\sum_{n=1}^{\infty}r^n \quad \left(r = \frac{1}{2} < 1\right)$$
收敛，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n| = \sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛（本题 $a_n > 0$，$|a_n| = a_n$）.

【20—2591.1】 令对于正号级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\,(a_n > 0)$ 的各项，当 $n \geqslant n_0$ 时，$\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \rho < 1$ 成立. 证明：对于级数的余项 $R_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots$，若 $n \geqslant n_0$，则估算为 $R_n \leqslant a_{n_0}\cdot\dfrac{\rho^{n-n_0+1}}{1-\rho}$.

证　因为当 $n \geqslant n_0$ 时，$\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \rho < 1$，于是
$$a_{n+1} \leqslant \rho a_n,$$
$$a_{n+2} \leqslant \rho a_{n+1} \leqslant \rho^2 a_n,$$
$$\vdots$$
$$a_{n+p} \leqslant \rho^p a_n, \quad \forall p \in \mathbf{N}^*,$$
一般地
$$a_n \leqslant \rho^{n-n_0}a_{n_0},$$
所以
$$a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p} \leqslant a_n(\rho + \rho^2 + \cdots + \rho^p),$$
于是
$$R_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots \leqslant a_n(\rho + \rho^2 + \cdots) = a_n\cdot\frac{\rho}{1-\rho} \leqslant a_{n_0}\cdot\frac{\rho^{n-n_0+1}}{1-\rho}.$$

【21—2593】 证明：若对于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\,(a_n > 0)$，极限
$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = q \qquad ①$$
存在，则
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = q \qquad ②$$
也存在.

相反的结论不真：若极限 ② 存在，则极限 ① 可以不存在. 研究例子
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3+(-1)^n}{2^{n+1}}.$$

证　由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{a_{n-1}} = q$ 存在，于是
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1\cdot\frac{a_2}{a_1}\cdot\frac{a_3}{a_2}\cdot\cdots\cdot\frac{a_n}{a_{n-1}}}\ \text{（几何平均值的极限）} = \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}} = q$$
也存在. 但反之不真，如题中反例，由
$$\frac{1}{2^n} \leqslant a_n = \frac{3+(-1)^n}{2^{n+1}} \leqslant \frac{4}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^{n-1}} \Longrightarrow \frac{1}{2} \leqslant \sqrt[n]{a_n} \leqslant \frac{\sqrt[n]{2}}{2}，\text{而}\frac{\sqrt[n]{2}}{2} \to \frac{1}{2} \quad (n\to\infty),$$
所以
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = 1/2;$$
但
$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{3-(-1)^n}{3+(-1)^n} = \frac{1}{16}\lim_{n\to\infty}[9+1-2\times3(-1)^n] = \frac{1}{16}\lim_{n\to\infty}[10-6(-1)^n]$$
随 n 取奇、偶数有不同的值，故 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ 不存在.

注　此题说明，虽然比值判别法用起来很方便，但根值判别法的适用范围更广.

利用拉阿伯和高斯判别法，研究下列级数的收敛性：

【22—2598】 $\left(\dfrac{1}{2}\right)^p + \left(\dfrac{1\cdot3}{2\cdot4}\right)^p + \left(\dfrac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\right)^p + \cdots.$

解　由拉阿伯判别法，对本题，$a_n > 0$，且