走向IMO

数学奥林匹克试题集锦

（2003）

顾问　裘宗沪

2003年IMO中国国家集训队教练组　编

全国高中联赛

CMO（冬令营）

女子奥林匹克

西部奥林匹克

国家队集训

国家队选拔考

IMO

……

华东师范大学出版社

走向IMO

(2003)

数学奥林匹克试题集锦

2003年IMO中国国家集训队教练组　编

图书在版编目(CIP)数据

走向IMO：数学奥林匹克试题集锦：2003/2003年IMO中国国家集训队教练组编．—上海：华东师范大学出版社，2003.8
ISBN 7-5617-3430-1

Ⅰ.走… Ⅱ.2… Ⅲ.数学课-中学-试题 Ⅳ.G634.605

中国版本图书馆CIP数据核字(2003)第067351号

走向IMO
数学奥林匹克试题集锦(2003)

编　　者　2003年IMO中国国家集训队教练组
策划组稿　倪　明
责任编辑　陈信漪　徐惟简
封面设计　高　山
版式设计　蒋　克

出版发行　华东师范大学出版社
　　　　　市场部 电话 021-62865537
　　　　　　　　 传真 021-62860410
　　　　　门市(邮购)电话 021-62869887
http://www.ecnupress.com.cn
社　　址　上海市中山北路3663号
　　　　　邮编 200062

印 刷 者　如东印刷厂有限公司
开　　本　890×1240　32开
插　　页　2
印　　张　7
字　　数　156千字
版　　次　2003年8月第一版
印　　次　2003年8月第一次
书　　号　ISBN 7-5617-3430-1/O·143
定　　价　14.00元

出 版 人　朱杰人

前　言

本书以2003年国家集训队的测试题和国家队的培训题为主体，收集了2002年8月至2003年7月国内主要的数学竞赛及2003年国际数学奥林匹克的试题与解答，其中不少试题是从事数学奥林匹克教学和研究的专家们的精心创作，许多解答源自国家集训队和国家队队员的妙思.

2003年国家集训队教练组由浙江大学李胜宏教授、上海中学冯志刚特级教师、上海大学冷岗松教授、华东师范大学熊斌副教授、兰州大学王海明副教授和南京师范大学陈永高教授等组成. 应华东师范大学出版社倪明先生的提议，将2002～2003年度中国数学奥林匹克的一些主要活动的情况及试题与解答汇编成册，介绍给广大中学生和数学教练员朋友.

在过去一年的工作中，教练组得到了裘宗沪、王杰、黄玉民、潘承彪等专家们的鼓励和支持，对他们表示感谢.

这是一本倾注了许多专家和学者的心血的书，其读者对象是参加数学竞赛的广大中学生、从事数学竞赛教学的教练员及数学爱好者. 囿于作者的水平，加上编写时间仓促，不足与错误在所难免，请读者朋友批评指正.

2003年IMO中国国家集训队教练组

2003年7月

目　　录

2002年全国高中数学联赛

2002年全国高中数学联赛及加试由中国数学会普及工作委员会和吉林省数学会负责命题.

联赛试题由6个选择题、6个填空题和3个解答题组成,合计150分. 加试共3个大题,每题50分. 各省市总分成绩居前的同学获得一等奖(全国共1 000名),他们具有免试直升大学的资格.

全国各省市成绩优异的同学才能获得参加次年中国数学奥林匹克的资格,因此,它是我国中学生走向IMO需要跨过的第一步.

一、选择题(本题满分36分,每小题6分)

1 函数 $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}(x^2-2x-3)$ 的单调递增区间是(　　).

(A) $(-\infty,\ -1)$　　(B) $(-\infty,\ 1)$

(C) $(1,\ +\infty)$　　(D) $(3,\ +\infty)$

解 先求 $f(x)$的定义域. 由 $x^2-2x-3>0$,得 $x<-1$ 或 $x>3$,故 $f(x)$的定义域为$(-\infty,\ -1)\cup(3,\ +\infty)$. 而 $u=x^2-2x-3=(u-1)^2-4$ 在$(-\infty,\ -1)$上单调递减,在$(3,\ +\infty)$上单调递增,所以,$f(x)=\log_{\frac{1}{2}}(x^2-2x-3)$ 在$(-\infty,\ -1)$上单调递增,在$(3,\ +\infty)$上单调递减,故选(A).

2 若实数 x、y 满足 $(x+5)^2+(y-12)^2=14^2$，则 x^2+y^2 的最小值为（　　）.

(A) 2　　(B) 1　　(C) $\sqrt{3}$　　(D) $\sqrt{2}$

解　设 $x+5=14\cos\theta$, $y-12=14\sin\theta$, $\theta\in[0, 2\pi)$，于是

$$\begin{aligned}x^2+y^2&=(14\cos\theta-5)^2+(14\sin\theta+12)^2\\&=14^2+5^2+12^2-140\cos\theta+336\sin\theta\\&=365+28(12\sin\theta-5\cos\theta)\\&=365+28\times13\sin(\theta-\varphi)\\&=365+364\sin(\theta-\varphi),\end{aligned}$$

其中 $\tan\varphi=\frac{5}{12}$.

所以，当 $\theta=\frac{3\pi}{2}+\arctan\frac{5}{12}$ 时，即 $x=\frac{5}{13}$, $y=-\frac{12}{13}$ 时，x^2+y^2 取最小值 1. 故选(B).

评注　本题的几何意义是：$(x+5)^2+(y-12)^2=14^2$ 是以点 $C(-5, 12)$ 为圆心，半径为 14 的圆. 在此圆周上找一点 P，使 $|PO|^2$ 最小(O 为坐标原点). 连结 CO，并延长 CO 与圆交于点 P，则 $|OP|^2$ 即为 x^2+y^2 的最小值.

3 函数 $f(x)=\frac{x}{1-2^x}-\frac{x}{2}$（　　）.

(A) 是偶函数但不是奇函数

(B) 是奇函数但不是偶函数

(C) 既是偶函数又是奇函数

(D) 既不是偶函数也不是奇函数

解 易知 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,\ 0)\cup(0,\ +\infty)$. 当 $x\in(-\infty,\ 0)\cup(0,\ +\infty)$ 时，有

$$f(-x)=\frac{-x}{1-2^{-x}}-\frac{-x}{2}=\frac{-x\cdot 2^{x}}{2^{x}-1}+\frac{x}{2}$$

$$=\frac{x}{1-2^{x}}-x+\frac{x}{2}$$

$$=\frac{x}{1-2^{x}}-\frac{x}{2}=f(x),$$

所以，$f(x)$ 是偶函数，又 $f(x)$ 显然不是奇函数，故选(A).

4 直线 $\frac{x}{4}+\frac{y}{3}=1$ 与椭圆 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ 相交于 A、B 两点，该椭圆上有点 P，使得 $\triangle PAB$ 面积等于 3. 这样的点 P 共有(　　).

(A) 1 个　　(B) 2 个　　(C) 3 个　　(D) 4 个

解 设椭圆上的一点为 $P(4\cos\alpha,\ 3\sin\alpha)$. 当它与原点 O 在 AB 的异侧时，它到 AB 的距离为

$$\frac{3(4\cos\alpha)+4(3\sin\alpha)-12}{5}$$

$$=\frac{12}{5}(\cos\alpha+\sin\alpha-1)\leqslant\frac{12}{5}(\sqrt{2}-1)$$

$$<\frac{6}{5},$$

而 $AB=5$，所以，$S_{\triangle PAB}<\frac{1}{2}\times5\times\frac{6}{5}=3$.

故当$\triangle PAB$ 的面积为 3 时，点 P 与 O 在 AB 同侧，这样的点有 2 个，于是选(B).

5 已知两个实数集合 $A=\{a_1, a_2, \cdots, a_{100}\}$ 与 $B=\{b_1, b_2, \cdots, b_{50}\}$，若从 A 到 B 的映射 f 使得 B 中每个元素都有原象，且

$$f(a_1)\leqslant f(a_2)\leqslant\cdots\leqslant f(a_{100})$$

则这样的映射共有(　　)个.

(A) C_{100}^{50}　　(B) C_{99}^{50}　　(C) C_{100}^{49}　　(D) C_{99}^{49}

解 不妨设 $b_1<b_2<\cdots<b_{50}$，将 A 中元素 $a_1, a_2, \cdots, a_{100}$ 按顺序分为非空的 50 组. 定义映射 $f: A\to B$，使第 i 组的元素在 f 之下的象都是 $b_i(i=1, 2, \cdots, 50)$. 易知这样的 f 满足题设要求，而所有这样的分组与满足条件的映射一一对应，于是满足题设要求的映射 f 的个数与 A 按下标顺序分为 50 组的分法数相等，而 A 的分法数为 C_{99}^{49}，则这样的映射共有 C_{99}^{49}(个)，故选(D).

评注 本题(B)也对，因为 $C_{99}^{50}=C_{99}^{49}$，这可能是命题时的一个疏忽.

6 由曲线 $x^2=4y$, $x^2=-4y$, $x=4$, $x=-4$ 围成的图形绕 y 轴旋转一周所得旋转体的体积为 V_1；满足 $x^2+y^2\leqslant16$, $x^2+(y-2)^2\geqslant4$, $x^2+(y+2)^2\geqslant4$ 的点(x, y)组成的图形绕 y 轴旋转一周所得旋转体的体积为 V_2，则(　　).

(A) $V_1=\frac{1}{2}V_2$ (B) $V_1=\frac{2}{3}V_2$

(C) $V_1=V_2$ (D) $V_1=2V_2$

解 如图，两图形绕 y 轴旋转所得旋转体夹在两个相距为 8 的平行平面之间. 用任意一个与 y 轴垂直的平面截这两个旋转体，设截面与原点距离为 $|y|(|y|\leqslant 4)$，则所得截面面积

$$S_1=\pi(4^2-4|y|),$$

$$S_2=\pi(4^2-y^2)-\pi[4-(2-|y|)^2]=\pi(4^2-4|y|),$$

所以，$S_1=S_2$.

由祖暅原理知，两几何体体积相等，即 $V_1=V_2$，故选(C).

二、填空题(本题满分 54 分，每小题 9 分)

7 已知复数 Z_1、Z_2 满足 $|Z_1|=2$，$|Z_2|=3$. 若它们所对应向量的夹角为 60°，则 $\left|\frac{Z_1+Z_2}{Z_1-Z_2}\right|=$________.

解 由余弦定理得

$$|Z_1+Z_2|=\sqrt{|Z_1|^2+|Z_2|^2-2|Z_1||Z_2|\cos 120^\circ}=\sqrt{19},$$

$$|Z_1-Z_2|=\sqrt{|Z_1|^2+|Z_2|^2-2|Z_1||Z_2|\cos 60^\circ}=\sqrt{7},$$

所以 $$\frac{|Z_1+Z_2|}{|Z_1-Z_2|}=\frac{\sqrt{19}}{\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{133}}{7}.$$

8 将二项式$\left(\sqrt{x}+\dfrac{1}{2\sqrt[4]{x}}\right)^n$的展开式按 x 的降幂排列，若前三项系数成等差数列，则该展开式中 x 的幂指数是整数的项共有________个.

解 前三项系数为 1、$\frac{1}{2}C_n^1$、$\frac{1}{2^2}C_n^2$，由题设，

$$2\cdot\frac{1}{2}C_n^1=1+\frac{1}{2^2}C_n^2,$$

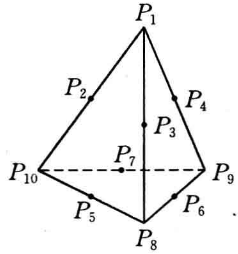
即 $$n=1+\frac{1}{8}n(n-1),$$

解得 $n=8$ 和 $n=1$(舍去).

当 $n=8$ 时，$T_{r+1}=C_8^r\left(\frac{1}{2}\right)^r x^{\frac{16-3r}{4}}$，$r=0, 1, 2, \cdots, 8$. 而 r 应满足 $4|16-3r$，所以 $4|r$，故 r 只能是 0, 4, 8. 于是，展开式中 x 的幂指数是整数的项共有 3 个.

9 如图，点 P_1, P_2, $\cdots$, P_{10} 分别是四面体顶点或棱的中点，那么在同一平面上的四点组 (P_1, P_i, P_j, P_k) $(1<i<j<k\leqslant 10)$ 有________个.

解 在四面体的每一个侧面上，除了点 P_1 外，尚有 5 个点，其中任意 3 点组添加点 P_1 后，组成的 4 点组都在同一个平面，这样的 3 点组有 C_5^3 个，三个侧面共有 $3C_5^3$ 个.



另外，含点 P_1 的每条棱上的三点组添加底面上与它异面的那条棱的中点组成的 4 点组也在一个平面上，这样的 4 点组有 3 个.

综上所述，共有 $3C_5^3+3=33$ 个 4 点组在同一平面上.

10 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数，$f(1)=1$ 且对任意 $x\in\mathbf{R}$ 都有

$$f(x+5)\geqslant f(x)+5,$$

$$f(x+1)\leqslant f(x)+1.$$

若 $g(x)=f(x)+1-x$，则 $g(2\,002)=$ ___2002___ +1-2002

=1

分析 先由已知条件定出 $f(2\,002)$，然后便可求得 $g(2\,002)$.

解 由题设条件可得

$$\begin{aligned}f(x)+5&\leqslant f(x+5)\leqslant f(x+4)+1\\&\leqslant f(x+3)+2\leqslant f(x+2)+3\\&\leqslant f(x+1)+4\leqslant f(x)+5,\end{aligned}$$

所以，其中所有等号均成立，从而

$$f(x+1)=f(x)+1.$$

于是由 $f(1)=1$，得 $f(2)=2$，$f(3)=3$，…，$f(2\,002)=2\,002$，所以

$$g(2\,002)=f(2\,002)+1-2\,002=1.$$

11 若 $\log_4(x+2y)+\log_4(x-2y)=1$，则 $|x|-|y|$ 的最小值是________.

解 首先，由

$$\begin{cases}x+2y>0,\\x-2y>0,\\(x+2y)(x-2y)=4\end{cases}\quad 得 \quad \begin{cases}x>2|y|\geqslant 0,\\x^2-4y^2=4.\end{cases}$$

由对称性，不妨考虑 $y\geqslant 0$ 时情形. 因为 $x>0$，故只须求 $x-y$ 的最小值.

令 $u=x-y$，代入 $x^2-4y^2=4$，得

$$3y^2-2uy+(4-u^2)=0, \qquad (*)$$

关于 y 的方程（$*$）有实数解，故有

$$\Delta=4u^2-12(4-u^2)\geqslant 0,$$

所以

$$u\geqslant\sqrt{3}.$$

又当 $x=\frac{4}{3}\sqrt{3}$，$y=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 时，$u=\sqrt{3}$.

所以，$|x|-|y|$ 的最小值为 $\sqrt{3}$.

12 使不等式

$$\sin^2 x+a\cos x+a^2\geqslant 1+\cos x$$

对一切 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立的负数 a 的取值范围是________.

解 当 $x=0$ 时，$a+a^2\geqslant 2$，所以 $a\leqslant -2$（因为 $a<0$）.

又当 $a\leqslant -2$ 时，有

$$a^2+a\cos x\geqslant a^2+a\geqslant 2\geqslant \cos^2 x+\cos x$$

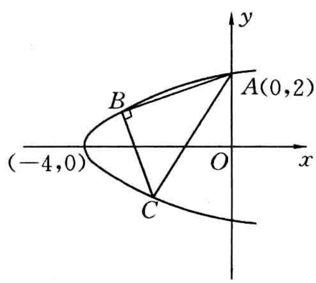
$$=1+\cos x-\sin^2 x,$$

即
$$\sin^2 x+a\cos x+a^2\geqslant 1+\cos x.$$

于是，a 的取值范围是 $a\leqslant -2$.

三、解答题（本题满分 60 分，每小题 20 分）

13 已知点 $A(0,\ 2)$ 和抛物线 $y^2=x+4$ 上两点 B、C 使得 $AB\perp BC$，求点 C 的纵坐标的取值范围.



解 设点 B 坐标为 $(y_1^2-4,\ y_1)$，点 C 坐标为 $(y^2-4,\ y)$，显然 $y_1^2-4\neq 0$，故 $k_{AB}=\dfrac{y_1-2}{y_1^2-4}=\dfrac{1}{y_1+2}$.

由于 $AB\perp BC$，所以 $k_{BC}=-(y_1+2)$，从而

$$y-y_1=-(y_1+2)[y^2-4-(y_1^2-4)].$$

注意到 $y\neq y_1$，可得

$$(2+y_1)(y+y_1)+1=0,$$

即
$$y_1^2+(2+y)y_1+(2y+1)=0.$$

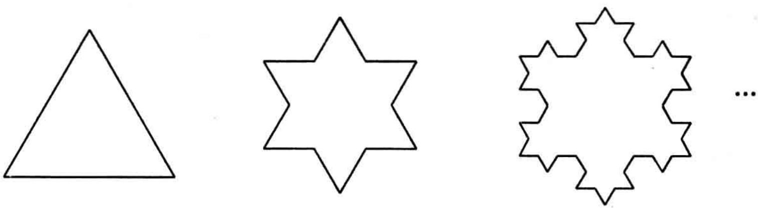
由 $\Delta\geqslant 0$ 解得：$y\leqslant 0$ 或 $y\geqslant 4$.

当 $y=0$ 时，点 B 的坐标为 $(-3,\ -1)$；当 $y=4$ 时，点 B 的坐标为 $(5,\ -3)$，均满足题意. 故点 C 的纵坐标的取值范围是

$y \leqslant 0$ 或 $y \geqslant 4$.

14 如图,有一列曲线 P_0, P_1, P_2, ⋯. 已知 P_0 所围成的图形是面积为 1 的等边三角形, P_{k+1} 是对 P_k 进行如下操作得到:将 P_k 的每条边三等分,以每边中间部分的线段为边,向外作等边三角形,再将中间部分的线段去掉($k = 0, 1, 2, \cdots$). 记 S_n 为曲线 P_n 所围成图形的面积.

(1) 求数列 $\{S_n\}$ 的通项公式; (2) 求 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$.



P_0 P_1 P_2

解 (1) 对 P_0 进行操作,容易看出 P_0 的每条边变成 P_1 的 4 条边,故 P_1 的边数为 $3 \cdot 4$;同样,对 P_1 进行操作, P_1 的每条边变成 P_2 的 4 条边,故 P_2 的边数为 $3 \cdot 4^2$,从而不难得到 P_n 的边数为 $3 \cdot 4^n$.

已知 P_0 的面积为 $S_0 = 1$, 比较 P_1 与 P_0. 容易看出 P_1 在 P_0 的每条边上增加了一个小等边三角形,其面积为 $\frac{1}{3^2}$,而 P_0 有 3 条边,故 $S_1 = S_0 + 3 \cdot \frac{1}{3^2} = 1 + \frac{1}{3}$.

再比较 P_2 与 P_1,可知 P_2 在 P_1 的每条边上增加了一个小等边三角形,其面积为 $\frac{1}{3^2} \cdot \frac{1}{3^2}$,而 P_1 有 $3 \cdot 4$ 条边,故

$$S_2=S_1+3\cdot4\cdot\frac{1}{3^4}=1+\frac{1}{3}+\frac{4}{3^3}.$$

类似地有 $S_3=S_2+3\cdot4^2\cdot\frac{1}{3^6}=1+\frac{1}{3}+\frac{4}{3^3}+\frac{4^2}{3^5}$,

于是有

$$\begin{aligned}S_n&=1+\frac{1}{3}+\frac{4}{3^3}+\frac{4^2}{3^5}+\cdots+\frac{4^{n-1}}{3^{2n-1}}\\&=1+\sum_{k=1}^{n}\frac{4^{k-1}}{3^{2k-1}}=1+\frac{3}{4}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{4}{9}\right)^k\\&=1+\frac{3}{4}\cdot\frac{\frac{4}{9}\left[1-\left(\frac{4}{9}\right)^n\right]}{1-\frac{4}{9}}\\&=1+\frac{3}{5}\left[1-\left(\frac{4}{9}\right)^n\right]\\&=\frac{8}{5}-\frac{3}{5}\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^n.\end{aligned}\qquad(*)$$

下面利用数学归纳法证明(*)式.

$n=1$ 时,由上面已知(*)式成立.

假设 $n=k$ 时,有 $S_k=\frac{8}{5}-\frac{3}{5}\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^k$.

当 $n=k+1$ 时,易知第 $k+1$ 次操作后,比较 P_{k+1} 与 P_k,P_{k+1} 在 P_k 的每条边上增加了一个小等边三角形,其面积为 $\frac{1}{3^{2(k+1)}}$,而 P_k 有 $3\cdot4^k$ 条边,故

$$\begin{aligned}S_{k+1}&=S_k+3\cdot4^k\cdot\frac{1}{3^{2(k+1)}}\\&=S_k+\frac{4^k}{3^{2k+1}}=\frac{8}{5}-\frac{3}{5}\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^{k+1}.\end{aligned}$$

综上，由数学归纳法，(*)式得证.

(2) 由(1)得 $S_n=\frac{8}{5}-\frac{3}{5}\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^n$，所以

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{8}{5}-\frac{3}{5}\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^n\right]=\frac{8}{5}.$$

15 设二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c$ $(a, b, c\in\mathbf{R}, a\neq 0)$ 满足条件：

(1) 当 $x\in\mathbf{R}$ 时，$f(x-4)=f(2-x)$，且 $f(x)\geqslant x$；

(2) 当 $x\in(0, 2)$ 时，$f(x)\leqslant\left(\frac{x+1}{2}\right)^2$；

(3) $f(x)$在 $\mathbf{R}$ 上的最小值为 0.

求最大的 $m(m>1)$，使得存在 $t\in\mathbf{R}$，只要 $x\in[1, m]$，就有$f(x+t)\leqslant x$.

分析 先由已知条件求出 $f(x)$的解析式，然后对 m 和 t 进行讨论，最终确定 m 的最大值.

解 因为 $f(x-4)=f(2-x)$，$x\in\mathbf{R}$，可知二次函数 $f(x)$ 的对称轴为 $x=-1$. 由(3)知 $f(x)$的开口向上，即 $a>0$，于是有

$$f(x)=a(x+1)^2\,(a>0).$$

由(1)得 $f(1)\geqslant 1$，由(2)得 $f(1)\leqslant\left(\frac{1+1}{2}\right)^2=1$，从而 $f(1)=1$，即 $a(1+1)^2=1$，所以

$$a=\frac{1}{4},$$