

● 教育部高校学生司推荐

全国各类成人高考复习指导丛书
高中起点升本、专科

数学

(理工农医类) (附解题指导) (第15版)
(根据2011年版考试大纲修订)

2011
最新版



孙成基 主编



高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

教育部高校学生司推荐

全国各类成人高考复习指导丛书

高中起点升本、专科

数 学(理工农医类)

Quanguo Gelei Chengren Gaokao Fuxi Zhidao Congshu

Gaozhong Qidian Sheng Ben - zhuanke

Shuxue(Li-gong-nong-yi Lei)

(附解题指导)

(第15版)



高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

图书在版编目(CIP)数据

全国各类成人高考复习指导丛书. 数学. 理工农医类/
孙成基主编. —15 版. —北京: 高等教育出版社, 2011. 3
高中起点升本、专科. 附解题指导
ISBN 978 - 7 - 04 - 027014 - 3

I. ①全… II. ①孙… III. ①数学课 - 成人教育:
高等教育 - 入学考试 - 自学参考资料 IV. ①G723.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 029194 号

策划编辑 李 宁 责任编辑 雷旭波 封面设计 张 志
责任校对 殷 然 责任印制 张福涛

出版发行 高等教育出版社
社 址 北京市西城区德外大街 4 号
邮政编码 100120

经 销 蓝色畅想图书发行有限公司
印 刷 北京市白帆印务有限公司

开 本 787 × 1092 1/16
印 张 19.00
字 数 460 000

购书热线 010 - 58581118
咨询电话 800 - 810 - 0598
400 - 810 - 0598
网 址 <http://www.hep.edu.cn>
<http://www.hep.com.cn>
网上订购 <http://www.landracom.com>
<http://www.landracom.com.cn>
畅想教育 <http://www.widedu.com>

版 次 1986 年 4 月第 1 版
2011 年 3 月第 15 版
印 次 2011 年 3 月第 1 次印刷
定 价 28.00 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题, 请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

物料号 27014 - 00

出版前言

高教版《全国各类成人高考（高中起点升本、专科）复习指导丛书》自1986年问世以来，一直受到广大读者的欢迎，在全国各类成人高考考生的复习备考中发挥着重要作用。20多年来，随着我国成人高等教育事业的发展和广大读者学习需求的变化，特别是全国各类成人高等学校招生复习考试大纲的多次修订，这套丛书也相应地进行了多次修订和完善，丛书的整体质量不断提高，结构更加科学、合理，成为具有广泛适用性的成人高考考生复习备考的主干教材，在全国享有良好声誉。

本丛书根据教育部最新修订颁布的《全国各类成人高等学校招生复习考试大纲（高中起点升本、专科）》在原有基础上进行了修订完善并具有如下特点：

1. 紧扣大纲、内容翔实、叙述准确、重点突出，注重基础知识复习和能力训练，题型与练习贴近考试实际，实用性、针对性强。

2. 题型设计以及叙述方式等各个方面，注重从知识立意向能力立意的转变；在注重学科基本能力训练的同时，注重考生综合运用知识的能力和应试水平的提高；适合成人学习特点的体系结构更加完善。

3. 注重吸收新知识、新成果，丛书的时代感更加鲜明。

《全国各类成人高考（高中起点升本、专科）复习指导丛书》（第15版）包括以下8本：

《语文 附解题指导》

《数学（文史财经类）附解题指导》

《数学（理工农医类）附解题指导》

《英语 附解题指导》

《历史地理综合科 历史分册 附解题指导》

《历史地理综合科 地理分册 附解题指导》

《物理化学综合科 物理分册 附解题指导》

《物理化学综合科 化学分册 附解题指导》

我们殷切地期望考生、专家和从事成人高考复习辅导的教师，能就本丛书的内容向我们提出意见和建议，以使本丛书更臻完善，更好地服务于读者。

高等教育出版社

2011年2月

目 录

代 数 (I)

第一章 集合	1	第三章 指数和对数	22
第二章 不等式和不等式组	6	第四章 函数	30

三 角

第五章 三角函数	56	第七章 解三角形	98
§ 1 任意角的三角函数	56	§ 1 反三角函数的符号	98
§ 2 三角函数的图像和性质	69	§ 2 解三角形	100
第六章 两角和与两角差的三角函数	80		

平面解析几何

第八章 直线与简易逻辑	109	§ 1 圆	143
§ 1 平面向量	109	§ 2 椭圆	153
§ 2 直线的方程	122	§ 3 双曲线	163
§ 3 两条直线的位置关系	131	§ 4 抛物线	172
第九章 圆锥曲线	143	§ 5 参数方程	180

代 数 (II)

第十章 数列	188	§ 1 函数的极限	232
第十一章 排列、组合与二项式定理	202	§ 2 函数的连续性	234
第十二章 概率与统计初步	215	§ 3 导数	236
第十三章 复数	224	§ 4 导数的应用	242
第十四章 导数	232		

立 体 几 何

第十五章 直线和平面	250	§ 5 空间向量	276
§ 1 平面	250	第十六章 多面体和旋转体	280
§ 2 空间两条直线	254	§ 1 多面体	280
§ 3 空间直线和平面	260	§ 2 球	287
§ 4 空间两个平面	270		

附录 2010 年成人高等学校招生全国统一考试数学(理工农医类)试题及参考答案	291
---	-----

代数(I)

第一章 集 合

【本章要求】

了解集合的意义及其表示法,了解空集、子集、交集、并集、全集、补集的概念及其表示法,了解符号 $\varnothing, \subseteq, =, \in, \notin$ 的含义,并能运用这些符号表示集合与集合、元素与集合的关系.

【内容提要】

1. 集合的基本概念

集合的意义 把某些指定的对象集中在一起,就成为一个集合(简称集).常用大写拉丁字母 $A, B, C, \dots$ 表示集合.

元素 集合中的每个对象叫做集合的**元素**.常用小写拉丁字母 $a, b, c, \dots$ 表示集合的元素.

有限集 含有有限个元素的集合叫做**有限集**.

无限集 含有无限个元素的集合叫做**无限集**.

对于一个给定的集合 A 和确定的元素 a ,它们之间有且只有以下两种关系:

1) 若 a 是 A 的元素,则称 a 属于 A ,记为 $a \in A$.

2) 若 a 不是 A 的元素,则称 a 不属于 A ,记为 $a \notin A$.

空集 不含任何元素的集合叫做**空集**,记为 $\varnothing$.

2. 集合的表示法

列举法 把集合的元素一一列举出来,并写在大括号“ $\{ \}$ ”内的方法,叫做**列举法**.

描述法 用确定的条件表示某些对象是否属于这个集合,并将该条件写在大括号“ $\{ \}$ ”内的方法,叫做**描述法**.如不等式 $x - 5 > 2$ 的解集可表示为 $\{x | x - 5 > 2\}$ 或 $\{x: x - 5 > 2\}$.

常见的几种数集的表示符号:

$\mathbf{N}^*$ (或 $\mathbf{N}_+$)表示正整数集.

$\mathbf{N}$ 表示非负整数集,即自然数集.

$\mathbf{Z}$ 表示整数集.

$\mathbf{Q}$ 表示有理数集.

$\mathbf{R}$ 表示实数集.

说明 根据国家标准,“0”是自然数.

3. 集合与集合的关系

子集 如果集合 A 的任何一个元素都是集合 B 的元素,则称 A 是 B 的**子集**,记为 $A \subseteq B$ 或 $B \supseteq A$,读作“ A 包含于 B ”或“ B 包含 A ”.

相等的集合 若 $A \subseteq B$,且 $B \subseteq A$,则称 $A = B$.

真子集 若 $A \subseteq B$ 且 $A \neq B$, 则称 A 是 B 的真子集, 记作 $A \subsetneq B$ (或 $B \supsetneq A$).

说明 在国家标准中, 用符号 $\subsetneq$ (或 $\supsetneq$) 表示集合间的真子集关系; 用符号 $\subseteq$ (或 $\supseteq$) 表示集合间的子集关系, 这个关系也可用符号 $\subset$ (或 $\supset$) 表示.

规定 空集是任何集合的子集. 可见, 空集是任何非空集合的真子集.

注意: $A \subseteq A$.

交集 由所有属于集合 A 且属于集合 B 的元素所组成的集合, 叫做 A 与 B 的交集, 记作 $A \cap B$.

交集的性质: 1) $A \cap A = A$; 2) $A \cap \emptyset = \emptyset$.

并集 由所有属于集合 A 或属于集合 B 的元素所组成的集合, 叫做 A 与 B 的并集, 记作 $A \cup B$.

并集的性质: 1) $A \cup A = A$; 2) $A \cup \emptyset = A$.

补集 对于集合 S , 若集合 $A \subseteq S$, 那么由 S 中所有不属于 A 的元素组成的集合, 叫做 S 中子集 A 的补集 (或余集), 记作 $\complement_S A$, 或简记作 $\complement A$.

注意: $\complement_S A \cup A = S$; $\complement_S A \cap A = \emptyset$.

全集 若一个集合含有所要研究的各个集合的全部元素, 那么这个集合就可以看做一个全集, 全集记作 U .

【例题与解题指导】

例1 选择题

(1) 已知集合 $A = \{0, 3\}$, $B = \{0, 3, 4\}$, $C = \{1, 2, 3\}$, 则 $(B \cup C) \cap A =$

(A) $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ (B) $\emptyset$ (C) $\{0, 3\}$ (D) $\{0\}$

(2) 设集合 $M = \{x \mid -1 \leq x \leq 3\}$, $N = \{x \mid 2 \leq x \leq 4\}$, 则 $M \cup N =$

(A) $\{x \mid 2 \leq x \leq 3\}$ (B) $\{x \mid 2 < x < 3\}$
(C) $\{x \mid -1 < x < 4\}$ (D) $\{x \mid -1 \leq x \leq 4\}$

(3) 设集合 $M = \{x \mid -1 \leq x \leq 10\}$, $N = \{x \mid x > 7 \text{ 或 } x < 1\}$, 则 $M \cap N =$

(A) $\{x \mid 7 < x \leq 10\}$ (B) $\{x \mid -1 \leq x < 1 \text{ 或 } 7 < x \leq 10\}$
(C) $\{x \mid -1 \leq x < 1\}$ (D) $\{x \mid 1 < x \leq 10\}$

(4) 已知全集 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, 集合 $M = \{1, 3, 5\}$, $N = \{2, 4, 6\}$, 则 $\complement_U M \cap N =$

(A) $\emptyset$ (B) U (C) N (D) M

(5) 下列关系中, 正确的是

(A) $\{0\} = \emptyset$ (B) $\emptyset \in \{0\}$ (C) $\emptyset \subsetneq \{0\}$ (D) $0 \subsetneq \emptyset$

(6) 设集合 $M = \{(x, y) \mid xy > 0\}$, $N = \{(x, y) \mid x > 0 \text{ 且 } y > 0\}$, 则

(A) $M \cup N = M$ (B) $M \cup N = N$ (C) $M \cap N = M$ (D) $M \cap N = \emptyset$

(7) 设集合 $A = \{1, 2\}$, 则满足条件 $A \cup B = \{1, 2, 3\}$ 的集合 B 的个数是

(A) 1 (B) 3 (C) 4 (D) 8

(8) 设集合 $A = \{0, 2, 4, 6\}$, $B = \{-1, 0, 2\}$, $\complement_U A = \{-3, -1, 1, 3\}$, 则 $\complement_U B =$

(A) $\{-3, 1, 3\}$ (B) $\{-3, 1, 3, 4, 6\}$
(C) $\{4, 6\}$ (D) $\{-3, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 6\}$

解 (1) $B \cup C = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $(B \cup C) \cap A = \{0, 3\}$. 选(C).

说明 求两个集合的并集, 相同的元素只写一个, 如 $B \cup C$ 中的元素 3.

在集合的运算中, 如有小括号应先算小括号内的.

(2) $M \cup N = \{x \mid -1 \leq x \leq 4\}$. 选(D).

说明 由不等式指定的集合运算,可利用数轴直观地求解.

(3) $M \cap N = \{x \mid -1 \leq x < 1 \text{ 或 } 7 < x \leq 10\}$. 选(B).

(4) $\complement_U M = \{2, 4, 6\}$, $\complement_U M \cap N = \{2, 4, 6\}$. 选(C).

(5) $\{0\}$ 是只含有一个元素 0 的单元素集合,而 $\emptyset$ 是空集,所以(A) 不正确;符号“ $\in$ ”用于元素与集合的关系,故(B) 也不正确;因为空集是任何非空集合的真子集,所以(C) 正确.

(6) M 与 N 都是点的集合.

由 $xy > 0$ 知,点 (x, y) 的横、纵坐标同号,集合 $M = \{\text{第一或第三象限的点}\}$.

由 $x > 0$ 且 $y > 0$ 知,点 (x, y) 的横、纵坐标的值均为正,集合 $N = \{\text{第一象限的点}\}$.

因此, $M \cup N = M$. 选(A).

(7) 集合 B 可以是下列集合: $\{3\}$, $\{1, 3\}$, $\{2, 3\}$, $\{1, 2, 3\}$ 之一. 选(C).

(8) $U = \complement_U A \cup A = \{-3, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 6\}$, 则 $\complement_U B = \{-3, 1, 3, 4, 6\}$, 选(B).

例 2 填空题

(1) 若 $A = \{x \mid x = 2k + 1, k \in \mathbf{Z}\}$, $B = \{x \mid x = k + 3, k \in \mathbf{Z}\}$, 则 $A \cap B = \underline{\hspace{2cm}}$, $A \cup B = \underline{\hspace{2cm}}$.

(2) 若 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A \cap B = \{1, 3, 5\}$, $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, 则 $B = \underline{\hspace{2cm}}$.

(3) 若 $A \subseteq C$, 化简 $(A \cup B) \cup (B \cup C) = \underline{\hspace{2cm}}$.

(4) 若 $M = \{x \mid 2x + a = 0\}$, $P = \{x \mid 1 < x < 4, \text{ 且 } x \in \mathbf{N}_+\}$, 且 $M \cap P$ 为非空集合, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$.

解 (1) A 为奇数集合, 而 B 为整数集合, 则 $A \cap B = A$, $A \cup B = B$.

(2) 由 A 及 $A \cap B$ 知, $1, 3, 5 \in B$ 且 $2, 4 \notin B$; 由 A 及 $A \cup B$ 知, $0, 6 \in B$. 故 $B = \{1, 3, 5, 0, 6\}$.

(3) 由于 $A \subseteq C$, 所以 $A \cup B \subseteq B \cup C$, 则 $(A \cup B) \cup (B \cup C) = B \cup C$.

(4) 由已知, $P = \{2, 3\}$, 把 $x = 2, 3$ 分别代入 $2x + a = 0$ 中, 得 $a = -4$ 或 $a = -6$.

例 3 设 $A = \{2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4, 5\}$, $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, 求集合 $\complement_U A \cap \complement_U B$ 的所有的子集.

解 因为 $\complement_U A = \{0, 1, 4, 5\}$, $\complement_U B = \{0, 1\}$,

所以 $\complement_U A \cap \complement_U B = \{0, 1\}$.

因此 $\complement_U A \cap \complement_U B$ 的所有的子集为: $\{0\}$, $\{1\}$, $\{0, 1\}$, $\emptyset$.

例 4 设全集 $U = \mathbf{R}$, 集合 $A = \{x \mid -5 < x < 5\}$, $B = \{x \mid 0 \leq x \leq 7\}$. 求 $\complement_U A$, $\complement_U B$, $\complement_U (A \cap B)$, $\complement_U A \cup \complement_U B$.

解 由已知, 得 $\complement_U A = \{x \mid x \leq -5 \text{ 或 } x \geq 5\}$, $\complement_U B = \{x \mid x < 0 \text{ 或 } x > 7\}$,

所以 $\complement_U A \cup \complement_U B = \{x \mid x < 0 \text{ 或 } x \geq 5\}$.

因为 $A \cap B = \{x \mid 0 \leq x < 5\}$, 所以 $\complement_U (A \cap B) = \{x \mid x < 0 \text{ 或 } x \geq 5\}$.

例 5 设集合 $M = \left\{x \mid x = \frac{1}{2}k\pi + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbf{Z}\right\}$, $N = \left\{x \mid x = \frac{1}{4}k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}\right\}$, 试确定集合 M 与 N 的关系.

解 $M = \left\{x \mid x = \frac{2k+1}{4}\pi, k \in \mathbf{Z}\right\}$,

$$N = \left\{ x \mid x = \frac{k+2}{4}\pi, k \in \mathbf{Z} \right\}.$$

N 中, $k+2$ 是整数集合; M 中, $2k+1$ 是奇数集合, 因此, $M \not\subseteq N$.

说明 本例也可用图解法, 即分别画出集合 M, N 中角的终边, 直观求解.

练 习 一

1. 选择题

(1) 已知集合 $S = \{0, -1, -2, -3, -4\}$, 集合 $M = \{0, -1, -2\}$, $N = \{0, -3, -4\}$, 则 $\complement_S M \cap N =$

- (A) $\{0\}$ (B) $\{-3, -4\}$ (C) $\{-1, -2\}$ (D) $\emptyset$

(2) 设集合 $M = \{x \mid x \geq -4\}$, $N = \{x \mid x < 6\}$, 则 $M \cup N =$

- (A) $\mathbf{R}$ (B) $\{x \mid -4 \leq x < 6\}$ (C) $\emptyset$ (D) $\{x \mid -4 < x < 6\}$

(3) 设全集 $U = \mathbf{R}$, $a, b \in \mathbf{R}$, $\complement_U P = \{x \mid x \geq a\}$, $\complement_U Q = \{x \mid x \geq b\}$, 若 $P \cap Q = P$, 则

- (A) $a \geq b$ (B) $b \geq a$ (C) $a > b$ (D) $b > a$

(4) 设 $M = \{x \mid x \leq \sqrt{10}\}$, $a = 3$, 下列各式正确的是

- (A) $a \not\subseteq M$ (B) $a \notin M$ (C) $\{a\} \in M$ (D) $\{a\} \not\subseteq M$

(5) 已知集合 M 满足条件: $\{1, 2\} \subseteq M \subsetneq \{1, 2, 3, 4, 5\}$, 那么这样的集合 M 有

- (A) 6 个 (B) 7 个 (C) 8 个 (D) 9 个

(6) 若 M, P 为非空集合, 且 $M \subsetneq P, P \subsetneq U, U$ 为全集, 则下列集合中为空集的是

- (A) $M \cap P$ (B) $\complement_U M \cap \complement_U P$ (C) $\complement_U M \cap P$ (D) $M \cap \complement_U P$

2. 填空题

(1) 若 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 4, 6\}$, 则 $A \cap B =$ _____, $A \cup B =$ _____.

(2) 若 $A = \{\text{正数}\}$, $B = \{\text{非负数}\}$, 则 $A \cap B =$ _____, $A \cup B =$ _____.

(3) 若 $A = \{x \mid x > -1\}$, $B = \{x \mid x > -3\}$, 则 $A \cap B =$ _____, $A \cup B =$ _____.

(4) 若 $A = \{x \mid x \geq -2\}$, $B = \{x \mid -1 < x \leq 4\}$, 则 $A \cap B =$ _____, $A \cup B =$ _____.

(5) 若 $A = \{x \mid 1 < x \leq 5\}$, $B = \{\text{小于 } 10 \text{ 的自然数}\}$, 则 $A \cap B =$ _____.

(6) 若 $A = \{\text{等边三角形}\}$, $B = \{\text{等腰三角形}\}$, 则 $A \cap B =$ _____, $A \cup B =$ _____.

(7) 若 $U = \mathbf{R}, A = \{x \mid x > -1\}$, 则 $\complement_U A =$ _____.

(8) 若 $U = \{\text{三角形}\}$, $A = \{\text{直角三角形}\}$, 则 $\complement_U A =$ _____.

(9) 若 $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 3\}$, $C = \{3, 4, 5\}$, 则 $(A \cap B) \cup C =$ _____, $(A \cup B) \cap C =$ _____, $(A \cap B) \cap C =$ _____, $A \cap (B \cup C) =$ _____, $B \cap (A \cup C) =$ _____.

(10) 若 $A = \{x \mid x = 2k, k \in \mathbf{Z}\}$, $B = \{x \mid x = 2k+1, k \in \mathbf{Z}\}$, 则 $A \cap B =$ _____, $A \cup B =$ _____.

3. 在下列各题横线上填写适当的符号($\in, \notin, =, \neq, \subsetneq$):

(1) $\emptyset$ _____ $\{a\}$; (2) a _____ $\{a\}$; (3) $\{a\}$ _____ $\{a\}$; (4) $\{a\}$ _____ $\{a, b\}$;

(5) 6 _____ $\{0, 1, 2\}$; (6) 0.5 _____ $\mathbf{Q}$; (7) $\mathbf{R}$ _____ $\mathbf{Q}$; (8) $\mathbf{N}$ _____ $\mathbf{Z}$.

4. 写出集合 $A = \{0, 1, 2\}$ 的所有子集, 并指出其中哪个集合不是集合 A 的真子集.

练习一解题指导

1. 解 (1) $\complement_S M = \{-3, -4\}$, $\complement_S M \cap N = \{-3, -4\}$. 选(B).

(2) $M \cup N = \mathbf{R}$. 选(A).

(3) $P = \{x \mid x < a\}$, $Q = \{x \mid x < b\}$.

由 $P \cap Q = P$ 知, $P \subsetneq Q$ 或 $P = Q$.

当 $P \subsetneq Q$ 时, 由图 1-1 知 $b > a$;

当 $P = Q$ 时, $a = b$.

从而 $b \geq a$. 选(B).

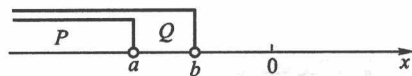


图 1-1

(4) 符号“ $\subsetneq$ ”用于表示集合与集合的关系, 而 a 是元素, 可排除(A); 因为 $3 < \sqrt{10}$, 故可排除(B); 符号“ $\in$ ”用于表示元素与集合的关系, 而 $\{a\}$, M 都是集合, 可排除(C). 故(D)正确.

(5) 有集合 $\{1, 2\}$ 及它分别与下列集合: $\{3\}$, $\{4\}$, $\{5\}$, $\{3, 4\}$, $\{3, 5\}$, $\{4, 5\}$ 的并集, 共 7 个. 故选(B).

(6) 由 $M \cap P = M$ 可排除(A); 由 $\complement_U M \cap \complement_U P = \complement_U P$ 可排除(B); 由 $M \subsetneq P$ 知 $\complement_U M \cap P$ 是由集合 P 中除去 M 中所有元素组成的非空集合(图 1-2 中阴影部分), 所以可排除(C). 故(D)正确.

2. 解 (1) $A \cap B = \{2, 4\}$, $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6\}$.

(2) $A \cap B = A$, $A \cup B = B$.

(3) $A \cap B = A$, $A \cup B = B$.

(4) $A \cap B = B$, $A \cup B = A$.

(5) $A \cap B = \{2, 3, 4, 5\}$.

(6) $A \cap B = A$, $A \cup B = B$.

(7) $\complement_U A = \{x \mid x \leq -1\}$.

(8) $\complement_U A = \{\text{斜三角形}\}$.

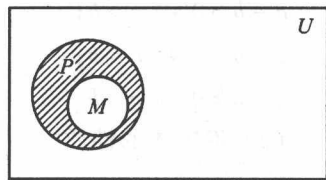


图 1-2

(9) $(A \cap B) \cup C = \{2, 3, 4, 5\}$, $(A \cup B) \cap C = \{3\}$, $(A \cap B) \cap C = \emptyset$, $A \cap (B \cup C) = \{2\}$, $B \cap (A \cup C) = B$.

(10) $A = \{\text{偶数}\}$, $B = \{\text{奇数}\}$, 则 $A \cap B = \emptyset$, $A \cup B = \mathbf{Z}$.

3. 解 (1) $\subsetneq$ (2) $\in$ (3) $=$ (4) $\subsetneq$ (5) $\notin$ (6) $\in$ (7) $\subsetneq$ (8) $\subsetneq$

4. 解 集合 A 的所有子集为: $\{0\}$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{0, 1\}$, $\{0, 2\}$, $\{1, 2\}$, $\{0, 1, 2\}$ 及 $\emptyset$. 其中 $\{0, 1, 2\}$ 不是集合 A 的真子集.

第二章 不等式和不等式组

【本章要求】

(1) 理解不等式的性质. 会用不等式的性质和基本不等式 $a^2 + b^2 \geq 2ab$ ($a, b \in \mathbf{R}$), $|a+b| \leq |a| + |b|$ ($a, b \in \mathbf{R}$) 解决一些简单问题.

(2) 会解一元一次不等式、一元一次不等式组和可化为一元一次不等式组的不等式, 会解一元二次不等式. 会表示不等式或不等式组的解集.

(3) 了解绝对值不等式的性质, 会解形如 $|ax+b| \geq c$ 和 $|ax+b| \leq c$ 的绝对值不等式.

【内容提要】

1. 不等式的意义和性质

(1) 不等式的意义

若 $a, b \in \mathbf{R}$, 有

$$a - b > 0 \Leftrightarrow a > b;$$

$$a - b = 0 \Leftrightarrow a = b;$$

$$a - b < 0 \Leftrightarrow a < b.$$

(2) 不等式的性质

$$1) \quad a > b \Leftrightarrow b < a.$$

$$2) \quad a > b, b > c \Rightarrow a > c.$$

$$3) \quad a > b \Rightarrow a + c > b + c.$$

$$4) \quad a > b, c > d \Rightarrow a + c > b + d.$$

$$5) \quad a > b, c > 0 \Rightarrow ac > bc.$$

$$6) \quad a > b, c < 0 \Rightarrow ac < bc.$$

$$7) \quad a > b > 0, c > d > 0 \Rightarrow ac > bd.$$

$$8) \quad a > b > 0 \Rightarrow a^n > b^n \quad (n \in \mathbf{N}_+, \text{且 } n > 1).$$

$$9) \quad a > b > 0 \Rightarrow \sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b} \quad (n \in \mathbf{N}_+, \text{且 } n > 1).$$

$$10) \quad |a+b| \leq |a| + |b| \quad (a, b \in \mathbf{R}, \text{且当 } a, b \text{ 同号时取等号}).$$

2. 解不等式

(1) 不等式的解集和解不等式

在含有未知数的不等式中, 能使不等式成立的未知数的所有可能取到的值的集合, 叫做这个不等式的解的集合. 求不等式的解集的过程, 叫做解不等式.

(2) 一元一次不等式及其解法

1) 一元一次不等式的一般形式为 $ax > b$.

2) 解的讨论:

(i) 当 $a \neq 0$ 时

如果 $a > 0$, 那么解集是 $\left\{x \mid x > \frac{b}{a}\right\}$, 也可写成 $x > \frac{b}{a}$, 下面也有类似写法.

如果 $a < 0$, 那么解集为 $x < \frac{b}{a}$.

(ii) 当 $a = 0$ 时

如果 $b \geq 0$, 那么 $ax > b$ 无解, 即解的集合是空集 $\emptyset$; 如果 $b < 0$, 那么 $ax > b$ 的解为全体实数, 即解的集合是 $\mathbf{R}$.

(3) 一元二次不等式及其解法

1) 一般形式为 $ax^2 + bx + c > 0$, 这里 $a \neq 0$.

2) 解的讨论:

设 $\Delta = b^2 - 4ac$, x_1, x_2 (为讨论方便, 不妨设 $x_1 < x_2$) 是方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的两个根.

(i) 当 $\Delta < 0$ 时

如果 $a > 0$, 不等式的解集是 $\mathbf{R}$;

如果 $a < 0$, 不等式的解集是 $\emptyset$.

(ii) 当 $\Delta = 0$ 时

如果 $a > 0$, 不等式的解集是 $x \neq -\frac{b}{2a}$;

如果 $a < 0$, 不等式无解.

(iii) 当 $\Delta > 0$ 时

如果 $a > 0$, 不等式的解集是 $x < x_1$ 或 $x > x_2$;

如果 $a < 0$, 不等式的解集是 $x_1 < x < x_2$.

注意: 一元二次不等式的解法, 应结合二次函数的图像来理解.

(4) 含有绝对值的不等式的解法

1) 若 $a > 0$, $|x| < a$ 的解集是 $-a < x < a$.

2) 若 $a > 0$, $|x| > a$ 的解集是 $x > a$ 或 $x < -a$.

(5) 不等式组的解

不等式组的解, 即不等式组中每一个不等式解集的交集.

3. 基本不等式

1) 若 $a \in \mathbf{R}$, 则 $a^2 \geq 0$.

2) 如果 $a, b \in \mathbf{R}$, 那么 $a^2 + b^2 \geq 2ab$ (当 $a = b$ 时取等号).

4. 关于区间的概念

设 a 与 b 是两个实数, 且 $a < b$.

1) 满足不等式 $a < x < b$ 的一切实数 x 的集合叫做开区间, 记作 (a, b) .

2) 满足不等式 $a \leq x \leq b$ 的一切实数 x 的集合叫做闭区间, 记作 $[a, b]$.

3) 满足不等式 $a \leq x < b$ 或 $a < x \leq b$ 的一切实数 x 的集合叫做半开半闭区间, 分别记作 $[a, b)$, $(a, b]$.

特别地, $\mathbf{R}$ 可记为 $(-\infty, +\infty)$, 符号“ $+\infty$ ”读作“正无穷大”, “ $-\infty$ ”读作“负无穷大”, 它

们不是数,只是记号. $[a, +\infty)$, $(a, +\infty)$, $(-\infty, b]$, $(-\infty, b)$ 分别表示 $x \geq a$, $x > a$, $x \leq b$, $x < b$ 的一切实数 x 的集合.

【例题与解题指导】

例1 解不等式组

$$\begin{cases} \frac{x}{2} - \frac{x}{3} > -1, & \text{①} \\ 2(x-3) - 3(x-2) < 0, & \text{②} \end{cases}$$

并用数轴表示其解集.

解 由①,得

$$x > -6;$$

由②,得

$$x > 0.$$

所以,原不等式组化成

$$\begin{cases} x > -6, \\ x > 0, \end{cases}$$

即原不等式组的解集为

$$x > 0.$$

此解集在数轴上表示为图 2-1 中 x 轴上粗实线部分.

例2 解不等式 $-8 < \frac{-3x-2}{4} - 5 < -5$.

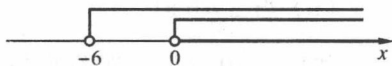


图 2-1

解 不等式各方同乘以 4,得

$$-32 < -3x - 2 - 20 < -20, \text{即 } -32 < -3x - 22 < -20.$$

不等式各方同时加 22,得

$$-10 < -3x < 2,$$

再同时除以 -3 ,得

$$\frac{10}{3} > x > -\frac{2}{3}.$$

所以原不等式的解集为 $-\frac{2}{3} < x < \frac{10}{3}$.

说明 本例中的不等式,也可化为不等式组

$$\begin{cases} \frac{-3x-2}{4} - 5 > -8, \\ \frac{-3x-2}{4} - 5 < -5 \end{cases}$$

来解.

例3 解不等式 $12x^2 - 5x - 3 > 0$.

解 方程 $12x^2 - 5x - 3 = 0$ 的根是 $x_1 = -\frac{1}{3}$, $x_2 = \frac{3}{4}$.

又因为 x^2 的系数是 $12 > 0$, 所以原不等式的解集是 $x < -\frac{1}{3}$ 或 $x > \frac{3}{4}$.

例4 解不等式 $-2x^2 \geq 3x - 4$.

解 原不等式可化成 $2x^2 + 3x - 4 \leq 0$.

因为方程 $2x^2 + 3x - 4 = 0$ 的根是 $x_1 = \frac{-3 + \sqrt{41}}{4}$, $x_2 = \frac{-3 - \sqrt{41}}{4}$, 又 x^2 的系数是 $2 > 0$, 所以, 原不等式的解集是 $\frac{-3 - \sqrt{41}}{4} \leq x \leq \frac{-3 + \sqrt{41}}{4}$.

例 5 解不等式 $\frac{3x+6}{5x-15} < 0$.

分析 只需分式的分子、分母异号即可, 即 $3x+6$ 与 $5x-15$ 异号, 从而 $(3x+6) \cdot (5x-15) < 0$, 即转化为解一元二次不等式.

解 原不等式同解于

$$(3x+6)(5x-15) < 0,$$

所以原不等式的解为 $-2 < x < 3$.

说明 原不等式两边不能直接同乘以 $5x-15$, 因为 $5x-15$ 的值正、负未定.

想一想, 不等式 $\frac{3x+6}{5x-15} \leq 0$ 的解是什么?

例 6 解不等式 $\frac{3x+2}{x-3} > 1$.

解 移项, 得

$$\frac{3x+2}{x-3} - 1 > 0,$$

整理化简, 得

$$\frac{2x+5}{x-3} > 0,$$

其同解不等式为

$$(2x+5)(x-3) > 0.$$

方程 $(2x+5)(x-3) = 0$ 的根是 $x_1 = -\frac{5}{2}$, $x_2 = 3$, 且 $(2x+5)(x-3)$ 中含 x^2 项的系数是 $2 > 0$,

因此, 原不等式的解集为 $x > 3$ 或 $x < -\frac{5}{2}$.

说明 解此类型不等式可先移项后通分化成例 5 的类型再解.

以上两例介绍了分式不等式的解法, 请留意.

例 7 解不等式 $|3-2x| - 5 > 0$.

分析 经过移项, 原不等式化为 $|3-2x| > 5$, 它属于绝对值不等式中的类型 2), 进而去掉绝对值符号解之.

如果注意到 $|3-2x| = |2x-3|$, 解之较方便.

解 原不等式化为 $|2x-3| > 5$, 则

$$2x-3 > 5 \text{ 或 } 2x-3 < -5,$$

所以 $x > 4$ 或 $x < -1$ 为所求不等式的解.

例 8 解不等式 $8 - |3x+5| \geq 0$.

分析 经移项, 原不等式化为 $|3x+5| \leq 8$, 它属于绝对值不等式中的类型 1), 进而去掉绝

对值符号解之.

解 原不等式化为 $|3x+5| \leq 8$, 则

$$-8 \leq 3x+5 \leq 8, -13 \leq 3x \leq 3,$$

所以 $-\frac{13}{3} \leq x \leq 1$ 为所求不等式的解.

说明 解含绝对值的不等式, 应先判断它是两种类型中的哪一种, 再去掉绝对值符号解之.

例 9 若不等式 $ax^2 + bx + 2 > 0$ 的解为 $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{3}$, 求 a, b 的值.

分析 从解一元二次不等式的过程考虑.

解 由已知, $-\frac{1}{2}$ 和 $\frac{1}{3}$ 是方程 $ax^2 + bx + 2 = 0$ 的两根, 则

$$\begin{cases} -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{a}, \\ -\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = -\frac{b}{a}. \end{cases}$$

解之, 得 $a = -12, b = -2$.

例 10 解不等式 $2 < |3x-2| < 3$.

解 原不等式同解于不等式组

$$\begin{cases} |3x-2| > 2, \\ |3x-2| < 3. \end{cases}$$

①

②

由①, 得 $3x-2 > 2$ 或 $3x-2 < -2$, 则

$$x > \frac{4}{3} \text{ 或 } x < 0.$$

③

由②, 得 $-3 < 3x-2 < 3$, 则

$$-\frac{1}{3} < x < \frac{5}{3}.$$

④

使③, ④同时成立, 得 $-\frac{1}{3} < x < 0$ 或 $\frac{4}{3} < x < \frac{5}{3}$, 此为原不等式的解.

例 11 解不等式 $\sqrt{4x^2 + 4x + 1} < 3$.

解法一 原不等式同解于不等式组

$$\begin{cases} 4x^2 + 4x + 1 \geq 0, \\ 4x^2 + 4x + 1 < 9. \end{cases}$$

①

②

由①, 得 $(2x+1)^2 \geq 0$, 故该不等式的解为全体实数.

由②, 得 $(x+2)(x-1) < 0$, 即 $-2 < x < 1$.

故原不等式的解为 $-2 < x < 1$.

解法二 原不等式可化为 $\sqrt{(2x+1)^2} < 3$, 则

$$|2x+1| < 3,$$

$$-3 < 2x+1 < 3,$$

$$-2 < x < 1.$$

所以

故原不等式的解为

例 12 已知 $A = \{x \mid x^2 - 2x - 8 < 0\}$, $B = \{x \mid x - a < 0\}$.

(1) 若 $A \cap B = \emptyset$, 求 a 的取值范围;

(2) 若 $A \subsetneq B$, 求 a 的取值范围.

解 由 $x^2 - 2x - 8 < 0$, 解得 $-2 < x < 4$,

所以

$$A = \{x \mid -2 < x < 4\}.$$

由已知,

$$B = \{x \mid x < a\}.$$

(1) 由 $A \cap B = \emptyset$, 得 $a \leq -2$.

(2) 由 $A \subsetneq B$, 得 $a \geq 4$.

例 13 已知 $x > 0, y > 0, 2x + y = 3$, 求 xy 的最大值, 并求相应的 x, y 的值.

分析 注意到 $2x + y$ 是一个常数, 可考虑用基本不等式求解.

解 由已知, $2x > 0, y > 0$, 则

$$2x + y \geq 2\sqrt{2xy}.$$

又 $2x + y = 3$, 于是

$$2\sqrt{2xy} \leq 3,$$

$$xy \leq \frac{9}{8}.$$

因此, 当 $2x = y$, 即 $x = \frac{3}{4}, y = \frac{3}{2}$ 时, xy 取得最大值 $\frac{9}{8}$.

例 14 已知 $x \neq 0$, 求 $1 - x^2 - \frac{16}{x^2}$ 的最大值, 并求相应的 x 的值.

分析 原式可化为 $1 - \left(x^2 + \frac{16}{x^2}\right)$, 故只需求 $x^2 + \frac{16}{x^2}$, 即 $x^2 + \left(\frac{4}{x}\right)^2$ 的最小值. 注意到 x 与 $\frac{4}{x}$ 的积是一个常数, 可用基本不等式求解.

解 原式 $= 1 - \left(x^2 + \frac{16}{x^2}\right)$.

因为

$$x^2 + \frac{16}{x^2} \geq 2x \cdot \frac{4}{x} = 8,$$

所以, 当 $x = \frac{4}{x}$, 即 $x = \pm 2$ 时, $\left(x^2 + \frac{16}{x^2}\right)_{\min} = 8$.

故原式的最大值为 $1 - 8 = -7$.

说明 应用 $a^2 + b^2 \geq 2ab$ ($a, b \in \mathbf{R}$) 或其推论, 即当 $a > 0, b > 0$ 时, $a + b \geq 2\sqrt{ab}$, 求某一式子的最值, 需满足 $a + b$ 或 ab 是一个常数.

例 15 求函数 $y = 3x^2 + \frac{12}{x^2 + 1}$ 的最小值, 并求相应的 x 的值.

分析 由 $3x^2$ 配出含 $x^2 + 1$ 的因式的项, 以便应用基本不等式的推论求之.

解

$$y = 3(x^2 + 1) + \frac{12}{x^2 + 1} - 3.$$

因为 $3(x^2 + 1) > 0, \frac{12}{x^2 + 1} > 0$, 所以

$$3(x^2 + 1) + \frac{12}{x^2 + 1} \geq 2\sqrt{3(x^2 + 1) \cdot \frac{12}{x^2 + 1}} = 12,$$

则 $y \geq 12 - 3 = 9$.

因此, 当 $3(x^2 + 1) = \frac{12}{x^2 + 1}$, 即 $(x^2 + 1)^2 = 4$, $x = \pm 1$ 时, $y_{\min} = 9$.

例 16 已知 $|x| < \frac{\varepsilon}{3}$, $|y| < \frac{\varepsilon}{12}$, 求证: $|2x + 4y| < \varepsilon$.

分析 直接应用不等式的性质 $|a + b| \leq |a| + |b|$ 及 $|ab| = |a| \cdot |b|$ 即可.

证 $|2x + 4y| \leq |2x| + |4y| = 2|x| + 4|y| < 2 \cdot \frac{\varepsilon}{3} + 4 \cdot \frac{\varepsilon}{12} = \varepsilon,$

即 $|2x + 4y| < \varepsilon$.

说明 本例证明过程用到了“放缩法”, 这里 $|x|$, $|y|$ 分别用 $\frac{\varepsilon}{3}$, $\frac{\varepsilon}{12}$ 替换, 乃放大.

例 17 求证: (1) $|a + b| + |a - b| \geq 2|a|$;

(2) $|a + b| - |a - b| \leq 2|b|$.

(1) **分析** 由 $|x| + |y| \geq |x + y|$ 即得. 这里 $a + b$ 相当于 x , $a - b$ 相当于 y .

证 $|a + b| + |a - b| \geq |a + b + a - b| = |2a| = 2|a|,$

即 $|a + b| + |a - b| \geq 2|a|$.

(2) **分析** 只需证 $|a + b| \leq |a - b| + 2|b|$ 即可.

证 由于 $|a - b| + 2|b| = |a - b| + |2b| \geq |a - b + 2b| = |a + b|,$

即 $|a + b| \leq |a - b| + 2|b|,$

于是 $|a + b| - |a - b| \leq 2|b|$.

说明 本例(2)是用变更论证形式的方法.

例 18 已知 $|a - b| < 1$, 求证: $|a| < |b| + 1$.

分析 将 $|a|$ 化为 $|a - b + b|$, 再用已知条件可得证.

证 $|a| = |(a - b) + b| \leq |a - b| + |b|$.

已知 $|a - b| < 1,$

于是 $|a| < 1 + |b|$.

例 19 求证: $\frac{|a| + |b|}{1 + |a| + |b|} \geq \frac{|a + b|}{1 + |a + b|}$.

分析一 可用“分析法”即“执果找因”方法探索.

证法一 记 $x = |a| + |b|$, $y = |a + b|$, 则 $x \geq y \geq 0$,

于是只需证 $\frac{x}{1 + x} \geq \frac{y}{1 + y}$ 即可.

由于

$$1 + x > 0, 1 + y > 0,$$

故只要证

$$x(1 + y) \geq y(1 + x),$$

即要证

$$x + xy \geq y + xy,$$

$$x \geq y.$$

由于 $x \geq y$ 成立, 且以上过程可逆, 得证.