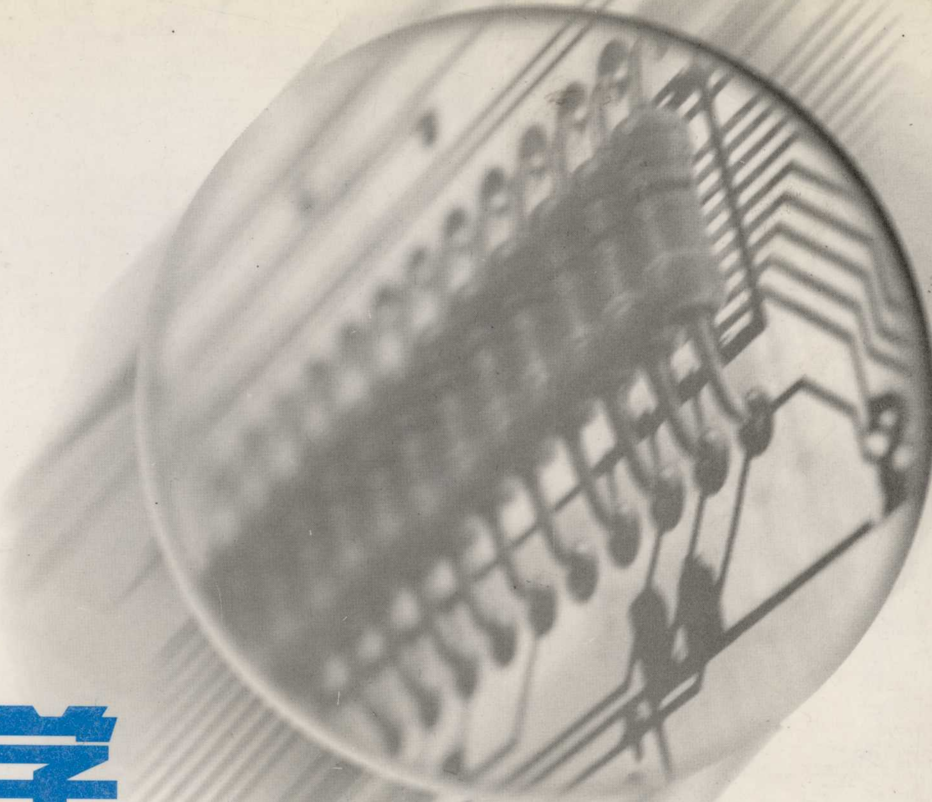

大学物理实验

DAXUE WULI SHIYAN

王永仓　戴慧莹　主编

西 北 大 学 出 版 社

大学物理实验

主　编　王永仓　戴慧莹
副主编　王斌科　李　斌
参　编　张武森　梁颖亮
　　　　耿道田　曾　华
　　　　张海防　高国棉
　　　　何长龙　李　晔
　　　　董秋霞　雷晓梅
　　　　郭进文　张　孟

西北大学出版社

内容简介

本书是根据国家教委《高等工业学校大学物理实验课程基本要求》和总参颁布的大学物理实验课程基本要求，在空军工程大学导弹学院和电讯工程学院大学物理实验讲义的基础上改编而成的。全书共分五部分，内容包括绪论、力学和热学实验、电磁学实验、光学和近代物理学实验以及附表等。全书列入实验 32 个。

本书可作为工科院校各专业（50 学时）的物理实验教材，也可供职工大学、函授大学及各类专科学校选用。

图书在版编目(CIP)数据

大学物理实验/王永仓,戴慧莹主编 .—西安:西北大学出版社,2001.2
ISBN 7-5604-1562-8

Ⅰ.大… Ⅱ.①王…②戴… Ⅲ.物理-实验-高等学校-教材 Ⅳ.04-33

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 09214 号

大学物理实验

王永仓 戴慧莹 主编

西北大学出版社出版发行

(西北大学校内 邮编 710069 电话 8302590)

新华书店经销 空军工程大学导弹学院印刷厂印刷

787 毫米×1092 毫米 1/16 开本 15 印张 365 千字

2001 年 3 月第 1 版 2001 年 3 月第 1 次印刷

印数: 1—2000

ISBN 7-5604-1562-8/O·99 定价:18.00 元

目　录

绪　论

力学和热学实验

电磁学实验

光学和近代物理学实验

附　表

绪　论

第一节　物理实验课的地位、作用和任务*

科学实验是科学理论的源泉，是工程技术的基础。作为培养德智体全面发展的高级工程技术人才的高等工业学校，不仅要使学生具备比较深广的理论知识，而且要使学生具有从事科学实验的较强能力，以适应科学技术不断进步和社会主义建设迅速发展的需要。

物理实验是对高等工业学校学生进行科学实验基本训练的一门独立的必修基础课程，是学生进入大学后受到系统实验技能训练的开端，是工科类专业对学生今后进行科学实验训练的重要基础知识。

物理学是一门实验科学。物理实验教学和物理理论教学具有同等重要的地位。它们既有深刻的内在联系和配合，又有各自的任务和作用。

本课程应在中学物理实验的基础上，按照循序渐进的原则，学习物理实验知识、方法和技能，使学生了解科学实验的主要过程与基本方法，为今后的学习和工作奠定良好的实验基础。

本课程的具体任务是：

1. 通过对实验现象的观察、分析和对物理量的测量，学习物理实验知识，加深对物理学原理的理解。

2. 培养与提高学生的科学实验能力。其中包括：

(1) 能够自行阅读实验教材或资料，作好实验前的准备。

(2) 能够借助教材或仪器说明书正确使用常用仪器。

(3) 能够运用物理学理论对实验现象进行初步分析判断。

(4) 能够正确记录和处理实验数据，绘制曲线，说明实验结果，撰写合格的实验报告。

(5) 能够完成简单的设计性实验。

3. 培养与提高学生的科学实验素养。要求学生具有理论联系实际和实事求是的科学作风，严肃认真的工作态度，主动研究的探索精神和遵守纪律，爱护公共财产的优良品德。

实验课的基本程序及要求：

任何实验课的过程都应包括①课前预习，②课内操作与记录，③课后撰写实验报告。

一、课前预习

预习是完成实验的基础。预习时首先要认真阅读教材的有关章节，明白实验的目的和要求，正确理解实验所依据的原理和采用的方法，初步了解实验仪器的主要性能、使用方

---

* 本节摘自国家教委物理课程指导委员会制订的《高等工业学校物理实验课程教学基本要求》的第一节。

法和注意事项。要写出简要的预习记录，包括实验名称、原理简述（电学实验应画出电路图，光学实验应画出光路图）、主要仪器的名称和使用时的注意事项，画好记录数据的表格。

上课时，教员将首先检查学生的预习情况，把预习的好坏作为评定课内成绩的一项内容。对没有预习的，教员有权停止本次实验，且本次课成绩定为不及格。

二、课内操作

操作是完成实验的主要内容。进入实验室必须遵守实验室规则，服从教员的指导。

课内操作主要包括：

1. 仪器的安装和调整

使用仪器进行测量时，必需要满足仪器的正常工作条件（水平、铅直、工作电压、电流等），不注意耐心细致地去调整仪器，而忙于进行测量，这是初学者容易出现的毛病。使用仪器测量时，必须按操作规程进行，不是测量的需要，不明确操作规程，千万不要动用仪器。以下举出几点共同性的注意事项。

(1) 安排仪器时，应尽量做到便于观察、读数和记录。

(2) 灵敏度高的仪器（如分析天平、灵敏电流计）都有制动器，不进行测量时，应使仪器处于制动状态。

(3) 停表、水准仪、温度计等小件仪器，在用完之后要放到实验台中间的仪器盒中。

(4) 拧动仪器上的旋钮或转动部分时，不要用力过猛。

(5) 注意仪器的零点，必要时需进行调零。

(6) 砝码及各种光学元件，为了保持其测量精度和光洁，不许用手去摸，也不要随便用布去擦。

(7) 使用电学仪器要注意电源极性、电压、并经教员允许后方能接通电源。

(8) 不要动用别组的仪器，仪器不够用时要请示教员。

(9) 实验后要将仪器整理、恢复到实验前的状态。

2. 观察和记录

明确了实验目的和测量内容、步骤，并能正确使用仪器之后，可以进行观测。开始时可先粗略地观察一下实验过程和数据分布情况，若无异常现象，就可开始正式操作、观测和记录。若有异常情况，应认真思考，分析原因，并与教员讨论，待异常排除后再开始进行实验。当从各种仪器刻度尺上读数时，一定要估读到最小分度的1/10。

实验记录是以后计算与分析实验结果的依据。记录数据必须用钢笔或圆珠笔，不允许用铅笔。所记录的数据不得随意涂改。若确认记录的数据有错误，用一斜线将其划掉，把正确的数据写在其旁。出现异常数据时应增加测量次数。要做到如实及时记录数据和有关现象。同时，还应记录主要仪器的名称，型号和级别，以及与内容有关的环境条件（如室温、气压等）。

操作完成后，请教员审阅记录的数据，待教员签字后，再把仪器复原、整理好。

三、撰写实验报告

实验完成之后，应写出一份实验报告。报告是实验的简明总结，应该表达出做了些什么；依据的物理思想和规律是什么；实验的结果是什么；有哪些提高；有什么见解。注意

不应该把报告写成教材的缩写。

实验报告一般应包括下列几项内容：

1. 实验名称

2. 目的和任务

3. 原理简述

应简要叙述实验的物理思想和所依据的物理定律及主要公式。电学和光学实验应画出相应的电路图和光路图。

4. 列出实验数据和数据处理过程

把教员签字的原始数据* 如实地誊写在报告的正文中。简要写出计算过程和误差的估算过程。明确表达出实验结果。若用作图法处理数据，应严格按作图要求，画出合乎规定的图线。把有教员签名的原始数据附在报告正文之后。

5. 小结

小结包括回答讲义后思考题及实验讨论。实验的讨论是培养我们分析能力的非常重要的部分，应当努力去做。实验后可供讨论的问题是多方面的，以下提示几点供参考：

(1) 实验的原理、方法、仪器给你留下什么印象？实验的目的完成得如何？

(2) 实验的系统误差表现在哪些地方？怎样改进测量方法或装置，可以减少误差？对实验的改进有何设想？

(3) 实验步骤怎样安排更好？

(4) 观察到什么反常现象，遇到过什么困难，能否提出可供以后实验人员借鉴的东西？

(5) 测量结果是否满意，如果未达到可能达到的结果，是何缘故？

(6) 对实验的安排（目的、要求、方法和仪器的配置等）和教员的指导有何希望？

第二节 测量与误差的基本知识

一、测量与误差

物理实验大致可以包括两方面的内容：定性地观察物理现象和定量地测量物理量的大小，进而用实验的方法研究各种物理规律。

所谓测量，就是将被测量与作为单位的标准量进行比较的认识过程。从获得测量结果的方法来分类，测量可以分为直接测量和间接测量两大类。

使被测物理量与作为标准的单位量直接比较，此种测量称为直接测量。例如，用米尺测量长度，用温度计测量温度，用天平称物体的质量，用安培表测量电流等。另外还有许多物理量，它们不是用仪器直接测得，而是需要先直接测量另外一些相关的物理量，然后通过这些量间的数学关系运算，才能得到结果，如测量某作匀速运动物体的运动速率，是直接测量路程及通过这段路程所用的时间，然后通过关系式

$$v = s/t$$

计算得到的。这种测量叫间接测量。显然，直接测量是间接测量的基础。

* 原始数据是指从仪器上直接读出的，未经任何运算的数值。

每一个物理量都是客观存在的，在一定时刻，一定位置或一定状态条件下，具有不依人的意志为转移的固定大小。这个客观大小称为该物理量的真值。

任何测量过程都是通过一定的人，在一定的环境条件下，使用一定的测量仪器进行的。由于测量仪器不可能制造得无限精确，测试人的操作，调整和读数不可能完全准确，环境条件的变化，如温度的波动、振动、电磁辐射的随机变化等，也将不可避免地会造成各种干扰，因此，任何测量都不可能做到绝对准确。这就使得被测量的真值与测量值之间总是存在着差异。用 N 表示被测量的测量值，N_0 表示被测量的真值，测量误差定义为

$$\Delta N = N - N_0 \tag{0-1}$$

测量结果误差的大小，反映了我们认识接近于客观真实的程度，反映了测量结果的可靠程度。由于测量不可能进行得无限精确，测量所得的一切数据，毫无例外地都包含有一定的误差，可以说，误差存在于一切测量之中，而且贯穿于测量过程的始终。

ΔN 又称为绝对误差。它的单位与被测物理量的单位相同。绝对误差是一个代数量，其正负反映了测量值偏离真值的方向。

要比较对不同大小的物理量，或者要比较对同一物理量在不同条件下的测量工作的质量，仅用测量结果的绝对误差 ΔN 的数值来衡量是不够完善的，还应考虑到测量值本身的大小，因而引入测量结果的相对误差 E。相对误差就是绝对误差 ΔN 与真值 N_0（或测量值 N）之间的比值

$$E = \frac{\Delta N}{N_0} \simeq \frac{\Delta N}{N} \tag{0-2}$$

通常相对误差 E 用百分数的形式表示

$$E = \frac{|\Delta N|}{N_0} \times 100\% \approx \frac{|\Delta N|}{N} \times 100\% \tag{0-3}$$

在误差必然存在的情况下，测量的任务是①设法将测量值中的误差减至最小；②求出在一定测量条件下被测物理量的最佳值；③估计此最佳值的可靠程度。

二、误差的分类

根据测量过程中所产生误差的性质，将测量误差分为系统误差和偶然误差两大类。

1. 系统误差

在同一条件下多次测量同一物理量时，测量结果出现固定的偏差，即误差的大小和符号始终保持恒定，或者按某种确定的规律变化，这种误差就称为“系统误差”。系统误差按照产生原因的不同可分为：

(1) 仪器误差　是指由于测量所用的工具、仪器本身的缺陷所造成的误差。例如，千分尺的零点不准，使长度的测量值产生恒定误差。用受热膨胀的钢质米尺测量长度时，其示值就恒小于该长度的真值，并且这种误差的大小随着长度成正比地增加，具有积累性。如图 0-1 所示，秒表指针的转轴 O 与表盘中心 O' 不重合。显然，秒针在不同位置时系统误差数值不同，它是周期性变化的。

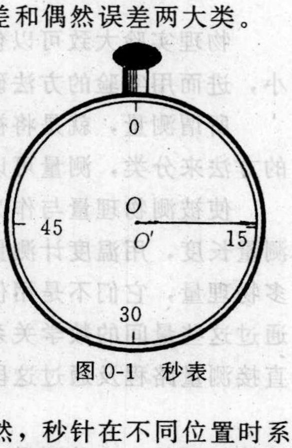

图 0-1　秒表

(2) 方法误差　是指由于实验所依据的原理不够完善，或者测量所依据的理论公式带

有近似性，或者实验达不到理论公式所规定的要求所形成的误差。例如，单摆的周期计算公式 $T=2\pi\sqrt{l/g}$ 成立的条件是摆角趋于零，而在实验测定周期 T 时，又必然要求有一定的摆角，再加上公式中没有考虑空气浮力和摆线质量影响等因素，这就决定了测量结果必然存在误差。

(3) 个人误差　是指由于测试者感觉器官的不完善或者个人有不正确习惯所造成的误差。例如，有的人按秒表总提前，有的人总落后。这种误差往往因人而异，并与测试者当时的心理、生理状况有关。

(4) 环境误差　是指由于外界环境因素发生变化，或者测量仪器规定的使用条件没有得到满足所造成的误差。例如，规定应当水平放置的电表，让它直立着测量读数时所造成的误差。

由此可见，系统误差产生的原因往往是可知的，它的出现一般也是有规律的，因此在实验前，应该对测量中可能产生的系统误差加以充分分析和估计，并采取必要的措施尽量消除其影响。测量后应该设法估计未能消除的系统误差之值，对测量结果加以修正。

应该指出，系统误差经常是一些实验测量的主要误差来源。但是，发现、减小和消除系统误差却是比较困难的问题。有目的地改变实验条件中的某个因素，或者改变测量方法，分析测量结果的变化规律，才有可能发现系统误差。深入研究整个实验所依据的原理和测量过程中每一个步骤，以及所用的仪器，找出产生系统误差的各个原因之后，方能得到减小和消除系统误差的有效方法。

2. *偶然误差*

偶然误差的特点是具有随机性，即在相同的条件下多次重复测量同一量时，发现每次测量结果都不一样，测量误差或大，或小，或正，或负，完全是偶然的。若测量次数足够多，偶然误差就显示出明显的统计规律性。*

偶然误差的来源，一方面是由于实验时难以控制的因素引起，如空气的流动、温度的起伏、电压的波动等；另一方面是由于人们感觉器官的分辨能力的限制所引起，同一实验条件下测量同一物理量，各次结果常有不同，这是因为调节仪器和估计读数时实验者的判断不可能完全正确所致。

3. *仪器误差*

测量过程必须使用测量仪器。测量仪器是指单独地或连同其它设备一起用于测量的装置，例如，砝码、电流表、电位差计等。这些仪器在制造过程中难免有缺陷，如各类有指针的仪表，由于轴承的磨擦，游丝的不均匀老化，磁场和分度盘刻度的不均匀，都会使其指示值含有误差。仪器误差是指在正确使用仪器的条件下，测量值和被测量的真值之间的最大误差，用 Δ 表示。

仪器误差的数值是由制造工厂或计量机关用精度更高的仪器或量具经过严格的校验给出的，一般都标明在仪器的铭牌上或写在说明书中。电表的仪器误差没有直接给出，需要根据其精度级别通过计算得到。例如，一个量程为 2.00 V 的电压表，经校准它的最大绝对误差为 0.02 V，那么，电压表的精度为 $\dfrac{\text{最大绝对误差}}{\text{量　程}}=\dfrac{0.02}{2.00}=1\%$，精度级别为 1 级，仪

* 见第三节（一），偶然误差的正态分布规律。

器误差为 $\Delta=0.02\ \mathrm{V}$，需要指出，级别一定的电表，其仪器误差是个确定值，不随示值的不同而改变。用上述电压表测量一个电压为 2.00 V，则相对误差为 1%；若测量另一个电压，示值为 1.00 V，因 $\Delta=0.02\ \mathrm{V}$，测量结果应为 $1.00\pm0.02\ \mathrm{V}$，仪器误差对测量结果的影响达 2%。正是因为仪器误差的存在，当选择电表时，不仅要考虑精度级别，还要考虑该电表的量程，一般应使示值大于量程的三分之二。

第三节　实验结果的误差估算

本节重点讨论系统误差已经被减弱到足以被忽略的情况下，偶然误差的数学处理过程和测量结果的正确表示方法。

一、偶然误差的正态分布规律

对某一物理量 N 进行多次重复测量，由于偶然误差的存在，测量结果 $N_1, N_2, \cdots, N_n$ 一般都存在着一定的差异。如果该物理量的真值为 N_0，则根据误差的定义，各次测量的误差

$$x_i = N_i - N_0 \quad i=1,2,\cdots,n \tag{0-4}$$

大量实践证明，偶然误差 x_i 的出现是服从一定的统计分布规律——正态分布（高斯分布）规律的，亦即对大多数物理测量，它具有以下的性质：

(1) 绝对值小的误差出现的机会（概率）大，绝对值大的误差出现的机会小。

(2) 大小相等、符号相反的误差出现的概率相等。

(3) 非常大的正、负误差出现的概率都趋近于零。

(4) 当测量次数非常多时，由于正负误差互相抵消，各个误差的代数和为零。

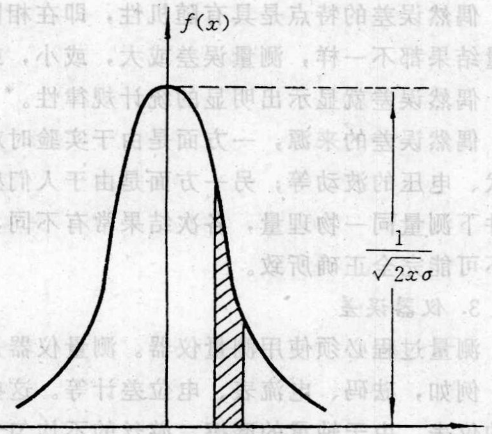

图 0-2　偶然误差的正态分布曲线

偶然误差正态分布的这些性质在图 0-2 正态分布曲线上可以看得非常清楚。该曲线横坐标为误差 x，纵坐标 $f(x)$，为概率密度分布函数。它的意义是，单位误差范围内出现的误差概率。曲线下阴影线包含的面积元 $f(x)\,\mathrm{d}x$，就是误差出现在 x 至 $x+\mathrm{d}x$ 区间内的概率（可能性）。

根据统计理论可以证明函数

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \tag{0-5}$$

式中，σ 是一个取决于具体测量条件的常数，称为标准误差。由误差分布曲线可见，曲线的中部曲率向下，曲线两侧曲率向上，因此曲线上必有转折点。容易证明，该转折点的横坐

标值 $x=\pm\sigma$。

当 $x=0$ 时，由 (0-5) 式可见，某次测量若标准误差很小；则必有 $f(0)$ 很大，分布曲线中部将上升较高，两旁下降就越快*，表示测量离散性小，精密度高。相反，如果 σ 很大，则 $f(0)$ 就较小，误差分布的范围就较宽，说明测量的离散性大，精密度低（如图 0-3）。

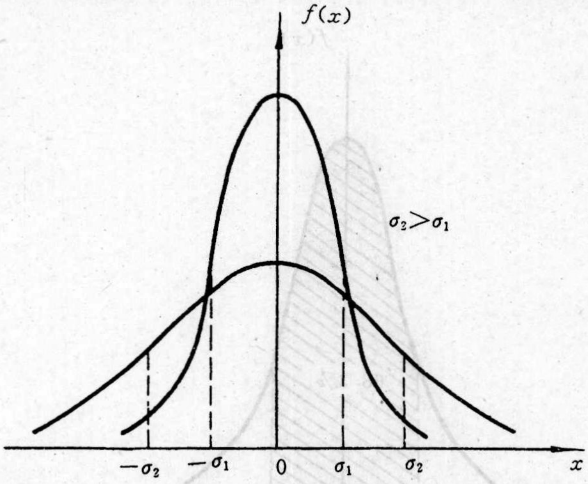

图 0-3　误差分布曲线

二、误差的表示方法

常用下面两种形式来估计一系列测量结果偶然误差的大小。

1. 标准误差 (σ)

由一列测量数据 $N_1, N_2, \cdots, N_n$ 求取它的标准误差，只需将各个误差的平方取平均值再开方即得

$$\sigma=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(N_i-N_0)^2}{n}} \tag{0-6}$$

标准误差又称为均方根误差。

2. 算术平均误差 (δ)

取各个误差的绝对值的算术平均值，即

$$\delta=\frac{\sum_{i=1}^{n}|N_i-N_0|}{n} \tag{0-7}$$

称为算术平均误差。

3. σ 和 δ 的物理意义

标准误差和算术平均误差反映的都是同一组测量数据的精密程度，因此就这个意义来说，不论用哪一种方法来表示误差的大小都是可以的。由于算术平均误差具有计算比较简单的特点，易为初学者掌握，而标准误差能较好地反映测量数据离散程度，它对测量值中较大误差或较小误差的出现，感觉比较灵敏，因此在一般科学文献报告中，通用的是标准误差。

误差本身是按一定统计规律分布的。用标准误差 $\pm\sigma$（或平均误差 $\pm\delta$）来表示，并不意味着任一测量数据的误差都是 $\pm\sigma$（$\pm\delta$），或者不会比 $\pm\sigma$（或 $\pm\delta$）更大。按概率理论，可以计算误差出现在 $\pm\sigma$ 内的概率为

$$\int_{-\sigma}^{\sigma}f(x)\mathrm{d}x=0.683 \tag{0-8}$$

* 按概率论，误差出现在 $-\infty\leqslant x\leqslant\infty$ 是必然事件，所以 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x=1$，即曲线与横轴间包围的面积为恒量，等于 1

即对一组测量数据来说，标准误差 σ 表示这组数据的误差有 68.3% 的概率是在 $-\sigma$ 到 $+\sigma$ 的范围内（图 0-4A）。同样可以算出，误差在 $-\delta$ 到 $+\delta$ 范围内的概率为 57.5%（图 0-4B）。

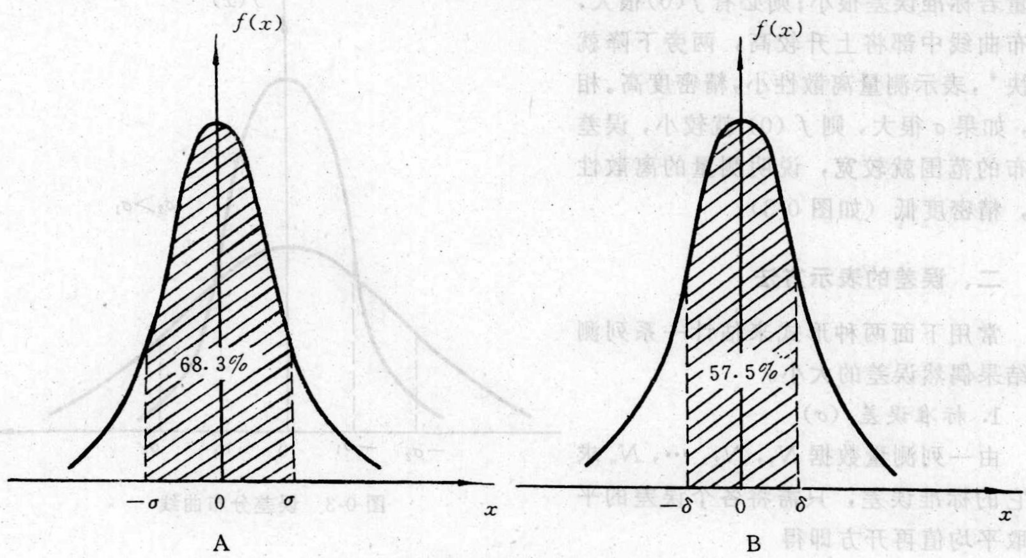

图 0-4　标准误差与平均误差比较图

三、测量结果的表示方法

由于测量误差的存在，真值实际上是无法测得的，因此我们前面说的误差只有理论上的意义。下面将讨论测量误差的实际处理方法。

1. 算术平均值

设在相同的条件下，对同一物理量进行了 n 次无系统误差的测量，测得值为 N_1，N_2，…，N_n，则其平均值

$$\overline{N}=\frac{N_1+N_2+\cdots+N_n}{n}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}N_i \tag{0-9}$$

由偶然误差的抵偿性可知，当 $n\to\infty$ 时，$\overline{N}\to$ "真值"。但在实际测量工作中，测量的次数总是有限的，那么如何根据这 n 次测量值去估算真值呢？误差理论（最小二乘法原理）可以证明，各次测量值的算术平均值是真值的最佳近似值。

2. 标准偏差与平均偏差

由于平均值 $\overline{N}$ 最接近真值 N_0，因此实际中用残差

$$\Delta N_i = N_i-\overline{N}\qquad i=1,2,3,\cdots,n \tag{0-10}$$

来进行计算每次测量的误差。

可以证明，当测量次数 n 有限，而用残差来表示误差时，

$$\sigma=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(N_i-\overline{N})^2}{n-1}} \tag{0-11}$$

称为测量列* 的标准偏差。而

$$\delta = \frac{\sum_{i=1}^{n}|N_i - \overline{N}|}{\sqrt{n(n-1)}} \tag{0-12}$$

称为测量列的平均偏差，但此式通常不用，而用近似式

$$\delta = \frac{\sum_{i=1}^{n}|N_i - \overline{N}|}{n} \tag{0-13}$$

平均值的标准偏差和平均偏差分别为

$$\sigma_{\overline{N}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(N_i - \overline{N})^2}{n(n-1)}} \tag{0-14}$$

$$\delta_{\overline{N}} = \frac{\delta}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}\,n}\sum_{i=1}^{n}|N_i - \overline{N}| \tag{0-15}$$

必须严格区分 $\sigma_{\overline{N}}$和 σ（或 δ 和 $\delta_{\overline{N}}$）两个概念。标准偏差 σ（或 δ）反映了一组测量数据的精密程度，它只取决于具体测量的条件，当测量次数足够多时，σ（或 δ）将趋于一个稳定的数值，而与测量次数无关。它告诉我们，在这组测量数据中，任选一个数据，它的误差落在 $-\sigma$ 到 $+\sigma$ 范围内的概率约为 68.3%。而平均值的标准偏差反映了算术平均值 $\overline{N}$ 接近真值的程度，它表示了在 $\overline{N}-\sigma_{\overline{N}}$到 $\overline{N}+\sigma_{\overline{N}}$范围内包含真值的概率为 68.3%。由 (0-14) 和 (0-15) 式可见，$\sigma_{\overline{N}}$和 $\delta_{\overline{N}}$是测量次数 n 的函数，测量次数越多，平均值的误差越小，由此可见，多次测量提高了测量的精度。

四、实验数据的处理步骤与测量结果的正确表达

在实际测量过程中，估计误差一般按下列程序进行：

(1) 对被测物理量进行多次测量，获得一组数据，将它们列成表格。

(2) 按 (0-9) 式算出被测值的算术平均值 $\overline{N}$。

(3) 按 (0-10) 式计算各次测量的残差 ΔN_i，并填入表格。

(4) 由 (0-11) 式求得测量列的标准偏差 σ。

(5) 由误差理论可知，绝对值大的偶然误差出现的概率小。可以算出，测量误差在 $-3\sigma \sim 3\sigma$ 范围内出现的概率为 99.7%，即绝对值大于 3σ 的误差出现的概率仅为 0.3%。因此，一般认为，在测量次数 n 有限时，不会出现大于 3σ 的误差。

算出 3σ 的值，并将它与各次测量的残差 ΔN_i 比较，如果发现某残差 $\Delta N_i > 3\sigma$，则它所对应的测量值 N_m 在测量过程中似有过失误差存在，应予舍弃。舍弃 N_m 后，再重复步骤 (2)，(3)，(4)，(5)。

(6) 由 (0-14) 式计算平均值的标准偏差 $\sigma_{\overline{N}}$。

(7) 计算相对误差

---

* 测量列是指在同一测量条件下进行多次测量所得到的一组测量值，如某物理量为 N，其测量列 N_1，N_2，N_3，…，N_n

$$E=\frac{\sigma_{\overline{N}}}{\overline{N}}\times 100\% \tag{0-16}$$

（8）最后实验结果应表为

$$\begin{cases} N=\overline{N}\pm\sigma_{\overline{N}} \\ E=\dfrac{\sigma_{\overline{N}}}{\overline{N}}\times 100\% \end{cases} \tag{0-17}$$

【数据处理举例】

（1）用天平称一物体质量，共进行 $n=11$ 次，结果列于表 0-1 中。

表 0-1

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
N_i/g	187.9	187.2	187.5	187.1	187.0	187.3	187.8	187.6	187.7	187.0	187.1
ΔN_i/g	0.5	−0.2	0.1	−0.3	−0.4	−0.1	0.4	0.2	0.3	−0.4	−0.3

（2）算术平均值 $\overline{N}=187.4$ g。

（3）算出残差 ΔN_i，列于表 0-1 中。

（4）求得

$$\sigma=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(\Delta N_i)^2}{n-1}}=0.33\text{ g}$$

（5）$3\sigma=0.99$ g。经检查，各次测量残差均小于 3σ，故各测量值均为有效。

（6）$\sigma_{\overline{N}}=\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}=0.1$ g

（7）相对误差

$$E=\frac{\sigma_{\overline{N}}}{\overline{N}}\times 100\%=0.05\%$$

（8）测量结果为

$$N=187.4\pm 0.1\text{ g}$$
$$E=0.05\%$$

五、间接测得量的误差估算方法

间接测得量的数值是把直接测得量的数值代入已知函数关系而求出的，由于直接测得量存在误差，使间接测得量也必然存在误差。这种由直接测得量及其误差去估算间接测得量的误差问题叫作误差传递问题。

1. 误差传递公式

设间接测得量 N 和彼此相互独立的直接测得量 x，y，z，…的函数关系是

$$N=f(x,y,z,\cdots)$$

$$x=\overline{x}\pm\Delta x\qquad y=\overline{y}\pm\Delta y\qquad z=\overline{z}\pm\Delta z\cdots$$

$\overline{x}$，$\overline{y}$，$\overline{z}$，…为各直接测得量的算术平均值或真值的近似值，Δx，Δy，Δz，…是相应的标准偏差或算术平均偏差。该函数的全微分

$$\mathrm{d}N=\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial f}{\partial z}\mathrm{d}z+\cdots \tag{0-18}$$

此式表明，当 $\overline{x}$，$\overline{y}$，$\overline{z}$ 各量有微小变化 $\mathrm{d}x$，$\mathrm{d}y$，$\mathrm{d}z\cdots$时，N 的改变量为 $\mathrm{d}N$。通常 Δx，Δy，$\Delta z\cdots$远小于 $\overline{x}$，$\overline{y}$，$\overline{z}\cdots$，因此只要把式中 $\mathrm{d}x$，$\mathrm{d}y$，$\mathrm{d}z$，…理解为各量相应的误差，上式就是间接测得量的误差计算公式，叫做误差的传递公式。式中$\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x$，$\frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y$，$\frac{\partial f}{\partial z}\mathrm{d}z$，…各项是直接测得量分别引起的分误差，$\frac{\partial f}{\partial x}$，$\frac{\partial f}{\partial y}$，$\frac{\partial f}{\partial z}$，…称为分误差的传递系数。

2. 偶然误差的合成

由各个直接测得量的分误差合成间接测得量的总误差的方法，称误差的合成。因对各直接测得量的偶然误差估算方法不同，间接测得量的总误差也有相应的不同合成方法。常用的有算术合成法与方和根合成法两种。

(1) 算术合成法　把各直接测得量的偶然误差用算术平均偏差估算，误差传递公式中各项分误差取绝对值相加。

$$\delta N=\left|\frac{\partial f}{\partial x}\delta x\right|+\left|\frac{\partial f}{\partial y}\delta y\right|+\left|\frac{\partial f}{\partial z}\delta z\right|+\cdots \tag{0-19}$$

得到总误差的方法叫算术合成法。显然，由于各项分误差的正负号出现的机会是相互独立的，偶然的，存在着正负相消的可能性，故取其绝对值相加，导致对总误差估算结果偏大，因此这是一种较保守的估算方法。表 0-2 列出了常用函数误差的算术合成公式。

表 0-2　常用函数误差的算术合成公式

函数表达式	误差合成公式
$N=x+y$	$\delta_N=\delta_x+\delta_y$
$N=x-y$	$\delta_N=\delta_x+\delta_y$
$N=xy$	$\frac{\delta_N}{N}=\frac{\delta_x}{x}+\frac{\delta_y}{y}$
$N=x/y$	$\frac{\delta_N}{N}=\frac{\delta_x}{x}+\frac{\delta_y}{y}$
$N=\frac{x^k y^m}{Z^n}$	$\frac{\delta_N}{N}=k\frac{\delta_x}{x}+m\frac{\delta_y}{y}+n\frac{\delta_z}{z}$
$N=kx$	$\delta_N=k\delta_x$
$N=\sqrt[n]{x}$	$\frac{\delta_N}{N}=\frac{1}{n}\frac{\delta_x}{x}$

公式中每一项都取正值。加减法时，用误差的绝对值相加；乘除法时，用相对误差相加。然后再由 $\delta N=EN$ 得到 δN 较简便。

(2) 方和根合成法　把各个直接测得量的误差用标准偏差估算，误差传递公式中各项分误差平方和之后再开方即，

$$\sigma_N=\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2\sigma_x^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\sigma_y^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2\sigma_z^2+\cdots} \tag{0-20}$$

误差理论证明，系统误差消除后的各个直接测得量，如果用标准偏差估算它们的偶然误差，间接测得量的标准偏差的计算方法即为（0-20）式。常用函数误差的方和根合成公式列于表 0-3 中。从这些公式中可以看出，加减时用标准偏差的方和根，乘除时用相对误差的方和根。

表 0-3　　常用函数的标准偏差合成公式

函数表达式	标准偏差合成公式
$N=x+y$	$\sigma_N=\sqrt{\sigma_x^2+\sigma_y^2}$
$N=x-y$	$\sigma_N=\sqrt{\sigma_x^2+\sigma_y^2}$
$N=xyz$	$\frac{\sigma_N}{N}=\sqrt{(\frac{\sigma_x}{x})^2+(\frac{\sigma_y}{y})^2+(\frac{\sigma_z}{z})^2}$
$N=x/y$	$\frac{\sigma_N}{N}=\sqrt{(\frac{\sigma_x}{x})^2+(\frac{\sigma_y}{y})^2}$
$N=kx$	$\sigma_N=k\sigma_x$
$N=\sqrt[k]{x}$	$\frac{\sigma_N}{N}=\frac{1}{k}\frac{\sigma_x}{x}$
$N=\sin x$	$\sigma_N=\lvert\cos x\rvert\sigma_x$
$N=\ln x$	$\sigma_N=\frac{\sigma_x}{x}$

比较上述两种方法，可以看出算术合成法是极端条件下的合成，各项分误差都是同方向相加，因而 δ_N 的估算值偏大。方和根合成法考虑了各项分误差抵偿的可能性，使 σ_N 的估算比较符合实际。精度较高的实验和学术论文的交流中通常采用这种方法。

3. 关于间接测量量算术平均值的计算方法

间接测量量 $N=f(x, y, z, \cdots)$ 是由直接测量量 $x, y, z, \cdots$ 所确定，当多次测量时，有两种可能性：①各直接测量量值是分别独立进行的，且测量条件变化幅度很小。②每次都是在差不多同时或同一条件下对各量测量一遍，而各次测量之间都是相互独立的。

对于情况①，各直接测量值 $x, y, z, \cdots$ 是相互独立测量的。首先分别求出它们各自的算术平均值 $\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}\cdots$，然后将其代入函数关系式 $N=f(x, y, z, \cdots)$ 中求得 N 的平均值。

$$\overline{N}=f(\overline{x},\overline{y},\overline{z},\cdots) \tag{0-21}$$

对于情况②，每一次测量，得一组 $x_i, y_i, z_i\cdots$ $(i=1, 2, \cdots, n)$，相应地有 $N_i=f(x_i, y_i, z_i, \cdots)$ 而以其多次测量的算术平均值 $\overline{N}$ 作为测量值。

$$\overline{N}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}N_i=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f(x_i,y_i,z_i,\cdots) \tag{0-22}$$

通常，当测量条件没有大幅度变化时，两种计算方法所得结果都是极相近的，所以除非测量条件变化幅度过大采用（0-22）式外，一般情况都可以用较简便的（0-21）式计算。