上海大学数学系　编

微积分

WEIJIFEN QIANGHUA XUNLIAN

强化训练

上海大学出版社

微积分强化训练

上海大学数学系　编

上海大学出版社
·上海·

图书在版编目(CIP)数据

微积分强化训练/上海大学数学系编. —上海:
上海大学出版社，2011.10
ISBN 978-7-81118-100-5

Ⅰ.①微… Ⅱ.①上… Ⅲ.①微积分—高等学校—习
题集 Ⅳ.①O172-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 182446 号

责任编辑 王悦生
封面设计 柯国富
技术编辑 金 鑫
章 斐

微积分强化训练
上海大学数学系 编
上海大学出版社出版发行
(上海市上大路 99 号 邮政编码 200444)
(http://www.shangdapress.com 发行热线 66135110)
出版人:郭纯生
*
南京展望文化发展有限公司排版
上海华业装潢印刷厂印刷 各地新华书店经销
开本 787×1092 1/16 印张 17.5 字数 448 000
2011 年 10 月第 1 版 2011 年 10 月第 1 次印刷
印数:1～5 100
ISBN 978-7-81118-100-5/O·005 定价:28.00 元

前　言

本书取名为《微积分强化训练》，是我校理工类、经管类本科学生微积分课程教材《高等数学》的配套训练习题集.

新版《高等数学》的编写构想与原先的教材有所不同，主要是对数学的概念、理论形成的历史轨迹进行还原，使学生在学习的过程中懂得数学不是事先安排好的，而是通过探索研究才逐渐发现形成的. 这种探索式的学习方式需要学生进行更多的课外辅助阅读与练习. 另外我校从今年开始进行大类招生与通识培养的改革，在这种改革模式下，微积分课程的课内教学时间有所减少，但要求学生需花更多的时间进行课外自学、探索和练习. 尽管《高等数学》教材中已经安排了基本与提高两种类型的习题，以及每一章最后的总复习题，但这些练习还是静态的. 我们希望为学生提供一套能动态更新的课外练习，使学生能够自由地、更有效地按照教育部高教司颁发的《工科类、经济管理类本科数学基础课程教学基本要求》有关《高等数学》课程要求掌握好微积分这门重要的大学基础课程.

本书由三个部分组成，每部分包含十套强化训练题，所有题目都给出了详细的解答过程.

第一部分十套强化训练题的知识范围为：函数的极限与连续；导数与微分；微分中值定理及导数的应用；不定积分.

第二部分十套强化训练题的知识范围为：定积分及其应用；微分方程；无穷级数.

第三部分十套强化训练题的知识范围为：向量代数与空间解析几何；多元函数微分学及其应用；重积分；曲线积分与曲面积分.

由于理工类和经管类的学生在学习"微积分"课程时的要求有所不同，所以有"*"号标记的题目对经管类学生不作要求（这些题目只在第二、第三部分强化训练题中会涉及）.

本书由王培康老师根据近几年全校的高等数学试题经过精心选择、整理编写而成，部分解答还配上插图便于阅读者理解. 在编写过程中采纳了杨建生老师一些有益的建议，丁洋和杨建生两位老师对全书进行了仔细的校对.

本书的编写出版是在上海大学数学系两个重点学科（上海市第三期重点学科"运筹学与控制论"（S30104）、上海市教委第五期重点学科"数学科学与技术"（J50101））以及科技部创新方法专项项目（项目编号：2009IM010400）和上海大学重点教材建设项目的资助下完成的，同时还得到了上海大学、上海大学教务处以及理学院各级领导的关怀和支持，上海大学出版社为本书的出版提供了高效优质的服务，在此一并表示衷心的感谢. 书中的不妥与错误，敬请老师和同学们不吝指出，以期在次年的版本中得以更正.

上海大学数学系
2011 年 6 月

目　录

第一部分

第二部分

第 三 部 分

第一部分

微积分强化训练题一

一、单项选择题

1. 若 $f(x)$ 为奇函数，$\varphi(x)$ 为偶函数，且 $\varphi(f(x))$ 有意义，则 $\varphi(f(x))$ 是(　　).

A. 偶函数　　B. 奇函数　　C. 非奇非偶函数　　D. 不能确定

2. 若极限 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 存在，下列条件中能够推出 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ 存在的是(　　).

A. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n$ 存在　　B. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n}$ 存在

C. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n)$ 存在　　D. $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n + b_n|$ 存在

3. 当 $x\to 0$ 时，与 x 等价的无穷小量是(　　).

A. $1-\cos x$　　B. $x-\sin x$　　C. $x^2-\tan x$　　D. $\tan x - x^2$

4. 设函数 $f(x)$ 可导，$g(x)=\sin f(x)$，则 $g'(x)=$(　　).

A. $f(x)\cos f(x)$　　B. $f'(x)\cos f'(x)$

C. $f'(x)\cos f(x)$　　D. $f(x)\cos f'(x)$

5. 函数 $y=x^2(x-2)^2$ 在区间 $(0,2)$ 中(　　).

A. 不增不减　　B. 有增有减　　C. 单调递增　　D. 单调递减

二、填空题

6. 函数 $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-x-6}}+\ln(3x+8)$ 的定义域为__________.

7. 极限 $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{2x}=$__________.

8. 设 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导，则 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+ah)-f(x_0-bh)}{\sin 3h}=$__________.

9. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，则 $\mathrm{d}\left[\int f(x)\mathrm{d}x\right]=$__________.

10. 已知 $f'\left(\dfrac{1}{x}\right)=x^2$，则 $f(x)=$__________.

三、计算题

11. $\lim\limits_{x\to 0}\cot x\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x}\right)$.

12. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+e^x}{2}\right)^{\cot x}$.

13. 已知 $y=x\arcsin x-\dfrac{\ln x}{x}+\cos\dfrac{\pi}{4}$，求 $\mathrm{d}y$.

14. 已知 $y=x\cos 2x$，求 $y^{(10)}$.

15. 设$\begin{cases} x = f(t) - \pi, \\ y = f(e^t - 1). \end{cases}$ 其中 f 可导，且 $f'(0) \neq 0$. 求 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=0}$.

16. $\displaystyle\int \frac{1}{e^{2x} - e^{-2x}} dx$.

17. $\displaystyle\int \sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{x(1+\sqrt{x})}} dx$.

18. $\displaystyle\int \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2} dx$.

四、应用题

19. 在半径为 R 的球体内作内接正圆锥. 问此圆锥的高 h 为何值时，其体积最大；并求出体积的最大值.

20. 求经过原点且与曲线 $y = \dfrac{x+9}{x+5}$ 相切的直线方程.

五、证明和讨论题

21. 当 $x > 0$ 时，试证：$\ln(1+x)[\ln(1+x)+2] < 2x$.

22. 讨论方程 $x^3 - px + q = 0$ 有三个不同实根的条件.

微积分强化训练题一参考解答

一、单项选择题

1. 选 A.

理由： $\varphi(f(-x)) \xlongequal{f(-x)=-f(x)} \varphi(-f(x)) \xlongequal{\varphi(-u)=\varphi(u)} \varphi(f(x))$.

2. 选 C.

理由： $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty}[a_n-(a_n-b_n)] = \lim\limits_{n\to\infty} a_n - \lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)$.

注：当 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n$ 存在时，并不能推出 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ 存在，例如 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n}\sin n$，其中 $a_n=\dfrac{1}{n}$，$b_n=\sin n$，有 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sin n=0$，但 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin n$ 不存在；

当 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}$ 存在时，同样不能推出 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ 存在，例如 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}$，其中 $a_n=\dfrac{1}{n}$，$b_n=n$，有 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}=0$，但 $\lim\limits_{n\to\infty} n=\infty$ 不存在；

对于 $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n+b_n|$ 存在的情况，如果取 $b_n=-a_n+(-1)^n$，有 $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n+b_n|=\lim\limits_{n\to\infty}1=1$，但 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ 不存在.

3. 选 D.

理由： $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-x^2}{x}=\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\tan x}{x}-x\right)=1-0=1$.

注：本题必须通过计算才能确定哪个选择是正确的.

设无穷小量 $f(x)$ 满足 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=1$，则称在 $x\to0$ 时 $f(x)$ 为与 x 等价的无穷小量.

对于其他三个函数对应的极限是：

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x}\xlongequal{\frac{0}{0}}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{1}=0$（利用洛必达法则），此时 $1-\cos x$ 是 x 的高阶无穷小；

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\sin x}{x}\xlongequal{\frac{0}{0}}\lim\limits_{x\to0}\left(1-\dfrac{\sin x}{x}\right)=0$（利用重要极限），此时 $x-\sin x$ 是 x 的高阶无穷小；

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2-\tan x}{x}\xlongequal{\frac{0}{0}}\lim\limits_{x\to0}\left(x-\dfrac{\tan x}{x}\right)=-1$（利用重要极限），此时 $x^2-\tan x$ 是 x 的同阶无穷小.

4. 选 C.

理由： $g(x)=\sin f(x)$ 可由 $g(x)=\sin u$，$u=f(x)$ 复合而得，则

$$g'(x)=\frac{\mathrm{d}(\sin u)}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}=\cos u\cdot f'(x)=f'(x)\cos f(x).$$

5. 选 B.

理由： 因为 $y'=2x(x-2)^2+x^2\cdot2(x-2)=4x(x-1)(x-2)$，当 $x\in(0,1)$ 时，$y'>$

0，y 单调增加；当 $x \in (1, 2)$ 时，$y' < 0$，y 单调减少.

二、填空题

6. 填 $\left(-\frac{8}{3}, -2\right) \cup (3, +\infty)$.

理由： 由 $\begin{cases} x^2 - x - 6 > 0, \\ 3x + 8 > 0, \end{cases}$ 得 $\begin{cases} (x+2)(x-3) > 0, \\ x > -\frac{8}{3}, \end{cases}$ 故 $\begin{cases} x < -2 \text{ 或 } x > 3, \\ x > -\frac{8}{3}, \end{cases}$ 则 $-\frac{8}{3} < x < -2$ 或 $x > 3$.

7. 填 e^{-2}.

理由： $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{2x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \left[\left(1 - \frac{1}{x}\right)^{-x}\right]^{-2} = \left[\lim\limits_{x \to -\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{-x}\right]^{-2} = e^{-2}$.

8. 填 $\frac{1}{3}(a+b)f'(x_0)$.

理由：
$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+ah) - f(x_0-bh)}{\sin 3h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+ah) - f(x_0-bh)}{3h}$$
$$= \frac{1}{3} \lim_{h \to 0} \left[\frac{f(x_0+ah) - f(x_0)}{h} - \frac{f(x_0-bh) - f(x_0)}{h}\right]$$
$$= \frac{1}{3} \lim_{h \to 0} \left[a \cdot \frac{f(x_0+ah) - f(x_0)}{ah} + b \cdot \frac{f(x_0-bh) - f(x_0)}{-bh}\right]$$
$$= \frac{1}{3}[af'(x_0) + bf'(x_0)] = \frac{1}{3}(a+b)f'(x_0).$$

9. 填 $f(x)\mathrm{d}x$.

理由： 不定积分的基本性质：
$$\int f'(x)\mathrm{d}x = f(x) + C \text{ 或} \int \mathrm{d}f(x) = f(x) + C;$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\int f(x)\mathrm{d}x\right] = f(x) \text{ 或 } \mathrm{d}\left[\int f(x)\mathrm{d}x\right] = f(x)\mathrm{d}x.$$

10. 填 $-\frac{1}{x} + C$.

理由： 由 $f'\left(\frac{1}{x}\right) = x^2$ 可得 $f'(x) = \frac{1}{x^2}$，所以
$$f(x) = \int f'(x)\mathrm{d}x = \int \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x = -\frac{1}{x} + C.$$

三、计算题

11. $\lim\limits_{x \to 0} \cot x \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}\right)$.

解：
$$\lim_{x \to 0} \cot x \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}\right) = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{\sin x} \cdot \frac{x - \sin x}{x \sin x} = \lim_{x \to 0} \cos x \cdot \lim_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$$
$$= \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{x^2}{2}}{3x^2} = \frac{1}{6}. \left(\text{利用等价无穷小：} x \to 0\text{：} \frac{x^2}{2} \sim 1 - \cos x\right)$$

12. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1+e^x}{2}\right)^{\cot x}$.

解：设 $y=\left(\frac{1+e^x}{2}\right)^{\cot x}$，则

$$\ln y=\cot x\cdot\ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right)=\frac{\ln(1+e^x)-\ln 2}{\tan x},$$

因为

$$\lim_{x\to 0}\ln y=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+e^x)-\ln 2}{\tan x}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+e^x)-\ln 2}{x}$$

$$\overset{\frac{0}{0}}{=\!=}\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+e^x}\cdot e^x=\frac{1}{2},$$

所以

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+e^x}{2}\right)^{\cot x}=\lim_{x\to 0}y=\lim_{x\to 0}e^{\ln y}=e^{\frac{1}{2}}.$$

13. 已知 $y=x\arcsin x-\frac{\ln x}{x}+\cos\frac{\pi}{4}$，求 dy.

解：因为

$$y'=\arcsin x+x\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln x\cdot 1}{x^2}+0$$

$$=\arcsin x+\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{1-\ln x}{x^2},$$

所以

$$dy=\left(\arcsin x+\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{1-\ln x}{x^2}\right)dx.$$

14. 已知 $y=x\cos 2x$，求 $y^{(10)}$.

解：因为

$$(x)^{(k)}=0,\quad k\geqslant 2,$$

$$(\cos 2x)^{(k)}=2^k\cos\left(2x+\frac{k}{2}\pi\right),\quad k\in\mathbf{N}.$$

所以由莱布尼茨(Leibniz)公式得

$$y^{(10)}=x^{(0)}\cdot(\cos 2x)^{(10)}+C_{10}^1x'\cdot(\cos 2x)^{(9)}+C_{10}^2x''\cdot(\cos 2x)^{(8)}+\cdots+C_{10}^{10}x^{(10)}\cdot(\cos 2x)^{(0)}$$

$$=x\cdot 2^{10}\cdot\cos\left(2x+\frac{10}{2}\pi\right)+10\cdot 2^9\cdot\cos\left(2x+\frac{9}{2}\pi\right)$$

$$=-2^{10}(x\cos 2x+5\sin 2x).$$

15. 设$\begin{cases} x = f(t) - \pi, \\ y = f(e^t - 1). \end{cases}$ 其中 f 可导,且 $f'(0) \neq 0$. 求 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=0}$.

解: 因为

$$\frac{dx}{dt} = f'(t),\ \frac{dy}{dt} = f'(e^t - 1) \cdot (e^t)' = e^t f'(e^t - 1),$$

所以

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{e^t f'(e^t - 1)}{f'(t)},$$

则

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=0} = 1.$$

16. $\int \frac{1}{e^{2x} - e^{-2x}} dx.$

解:
$$\begin{aligned}\int \frac{1}{e^{2x} - e^{-2x}} dx &= \int \frac{e^{2x}}{e^{4x} - 1} dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{(e^{2x} - 1)(e^{2x} + 1)} d(e^{2x}) \\ &= \frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{e^{2x} - 1} - \frac{1}{e^{2x} + 1}\right) d(e^{2x}) \\ &= \frac{1}{4}\left(\ln|e^{2x} - 1| - \ln|e^{2x} + 1|\right) + C \\ &= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}\right| + C.\end{aligned}$$

17. $\int\sqrt{\frac{1 - \sqrt{x}}{x(1 + \sqrt{x})}} dx.$

解: 令 $t = \sqrt{x} \geqslant 0$, 则 $x = t^2$, $dx = 2t dt$, 所以

$$\begin{aligned}\int\sqrt{\frac{1 - \sqrt{x}}{x(1 + \sqrt{x})}} dx &= \int \frac{1}{t}\sqrt{\frac{1 - t}{1 + t}} \cdot 2t dt = 2\int\sqrt{\frac{1 - t}{1 + t}} dt = 2\int \frac{1 - t}{\sqrt{1 - t^2}} dt \\ &= 2\left[\int \frac{1}{\sqrt{1 - t^2}} dt + \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1 - t^2}} d(1 - t^2)\right] \\ &= 2(\arcsin t + \sqrt{1 - t^2}) + C \\ &= 2(\arcsin\sqrt{x} + \sqrt{1 - x}) + C.\end{aligned}$$

18. $\int \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2} dx.$

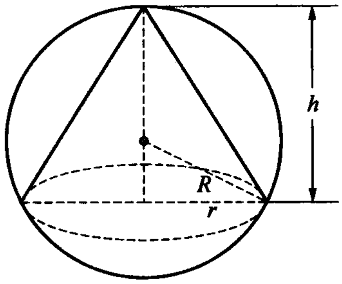
解: $\int \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2} dx = \int \frac{1}{\ln x} dx - \int \frac{1}{(\ln x)^2} dx = \frac{1}{\ln x} \cdot x - \int x d\left(\frac{1}{\ln x}\right) - \int \frac{1}{(\ln x)^2} dx$

$$= \frac{x}{\ln x} + \int \frac{1}{(\ln x)^2} dx - \int \frac{1}{(\ln x)^2} dx = \frac{x}{\ln x} + C.$$

四、应用题

19. 在半径为 R 的球体内作内接正圆锥. 问此圆锥的高 h 为何值时，其体积最大；并求出体积的最大值.

解： 设圆锥底半径为 r，则



$$r = \sqrt{R^2 - (h-R)^2}.$$

正圆锥体积为

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{\pi}{3}[R^2 - (h-R)^2]h$$

$$= \frac{\pi}{3}(2Rh^2 - h^3), \quad 0 < h < 2R.$$

令 $\frac{dV}{dh} = \frac{\pi}{3}(4Rh - 3h^2) = 0$，得 $h_1 = 0$（舍去），$h_2 = \frac{4}{3}R$（唯一驻点）.

由 $\left.\frac{d^2V}{dh^2}\right|_{h=\frac{4}{3}R} < 0$，知 V 在唯一驻点处取得极大值，即取得最大值.

则当球体内接正圆锥的高 $h = \frac{4}{3}R$ 时，其体积最大，最大值为

$$V\left(\frac{4}{3}R\right) = \frac{32}{81}\pi R^3.$$

20. 求经过原点且与曲线 $y = \frac{x+9}{x+5}$ 相切的直线方程.

解： $y' = -\frac{4}{(x+5)^2}$，

设直线与曲线相切于点 (x, y)，则直线方程为

$$Y - y = -\frac{4}{(x+5)^2}(X - x),$$

切点应在曲线上，则

$$y = \frac{x+9}{x+5}.$$

又直线过原点，所以

$$-y = \frac{4x}{(x+5)^2},$$

联立上述两等式，解得 $x_1 = -15$，$x_2 = -3$. 此时 $y_1 = \frac{3}{5}$，$y_2 = 3$.

则所求直线为

$$Y = -\frac{1}{25}X \text{ 或 } Y = -X,$$

即

$$y=-\frac{1}{25}x \text{ 或 } y=-x.$$

五、证明和讨论题

21. 当 $x>0$ 时,试证:$\ln(1+x)[\ln(1+x)+2]<2x$.

证明: 设 $f(x)=\ln^2(1+x)+2\ln(1+x)-2x$,则 $f(0)=0$,且

$$f'(x)=2\ln(1+x)\cdot\frac{1}{1+x}+2\cdot\frac{1}{1+x}-2$$

$$=\frac{2}{1+x}[\ln(1+x)-x],$$

再设 $F(x)=\ln(1+x)-x$,则 $F(0)=0$,且

当 $x>0$ 时,$F'(x)=\frac{1}{1+x}-1=-\frac{x}{1+x}<0$,所以 $F(x)$ 单调减少.

即 $x>0$ 时,$F(x)<F(0)=0$,故

$$\ln(1+x)<x,$$

因此 $x>0$ 时,$f'(x)=\frac{2}{1+x}[\ln(1+x)-x]<0$,所以 $f(x)$ 也单调减少.

即 $x>0$ 时,$f(x)<f(0)=0$,所以

$$\ln(1+x)[\ln(1+x)+2]<2x.$$

22. 讨论方程 $x^3-px+q=0$ 有三个不同实根的条件.

解: 设 $f(x)=x^3-px+q$ 有三个不同的零点,则 $f'(x)=3x^2-p$ 必有两个不同的零点,即必须 $p>0$.

此时 $f(x)$ 有驻点 $x_{1,2}=\pm\sqrt{\frac{p}{3}}$;

列表得

x	$\left(-\infty,-\sqrt{\frac{p}{3}}\right)$	$\left(-\sqrt{\frac{p}{3}},\sqrt{\frac{p}{3}}\right)$	$\left(\sqrt{\frac{p}{3}},+\infty\right)$
$f'(x)$	+	−	+
$f(x)$	单调增加	单调减少	单调增加

因为

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty,\ \lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty,$$

所以必须要求

$$\begin{cases} f\left(-\sqrt{\frac{p}{3}}\right)>0, \\ f\left(\sqrt{\frac{p}{3}}\right)<0. \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} f\left(-\sqrt{\dfrac{p}{3}}\right)=\dfrac{2p}{3}\sqrt{\dfrac{p}{3}}+q>0, \\ f\left(\sqrt{\dfrac{p}{3}}\right)=-\dfrac{2p}{3}\sqrt{\dfrac{p}{3}}+q<0. \end{cases}$$

解得

$$-\frac{2p}{3}\sqrt{\frac{p}{3}}<q<\frac{2p}{3}\sqrt{\frac{p}{3}},$$

因此,当 $p>0$ 且 $|q|<\dfrac{2p}{3}\sqrt{\dfrac{p}{3}}$ 时,方程有三个不同实根.

微积分强化训练题二

一、单项选择题

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\dfrac{1}{x}}{\sin x}$ 的值为(　　).

A. 1　　B. ∞　　C. 不存在　　D. 0

2. 当 $x\to 0$ 时 $f(x)=\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}$ 与 x 是(　　).

A. 等价无穷小　　B. 同阶无穷小

C. 高阶无穷小　　D. 无法比较

3. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x-x^2}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$ 则 $f(x)$ 的间断点个数为(　　).

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

4. $f(x)$ 在 $x=0$ 的某个邻域内有定义，$f(0)=0$ 且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=2$，则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处为(　　).

A. 不连续　　B. 连续，但不可导

C. 可导且导数为 0　　D. 可导且导数为 2

5. 若 $f(x)$ 的导数是 $\cos x$，则 $f(x)$ 有一个原函数为(　　).

A. $1+\cos x$　　B. $1-\cos x$

C. $1+\sin x$　　D. $1-\sin x$

二、填空题

6. 已知 $f(x)=e^{x^2}$，$f(\varphi(x))=1-x$，且 $\varphi(x)\geqslant 0$，则函数 $\varphi(x)$ 的定义域为__________.

7. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0,\\ a, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则 $a=$__________.

8. 曲线 $\begin{cases}x=\cos^3 t,\\ y=\sin^3 t\end{cases}$ 对应 $t=\dfrac{\pi}{6}$ 点处的切线方程是__________.

9. 设 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2a}{x-a}\right)^x=8$，则 $a=$__________.

10. 曲线 $f(x)=e^{-x^2}$ 的向上凸区间是__________.

三、计算题

11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^3}$.

12. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$.

13. 已知 $f(x)=\begin{cases}\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{1}{x}}, & x>0,\\ a, & x=0,\\ \dfrac{\sin kx}{x}, & x<0,\end{cases}$ 其中 $k\neq 0$. 当 a, k 为何值时，$f(x)$ 在 $x=0$ 处连续？

14. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\cot^2 x\right)$.

15. $y=2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)$，求 y''.

16. $y=x[\cos(\ln x)+\sin(\ln x)]$，求 y'.

17. 设 $y=y(x)$ 由方程 $xy^2+e^y=\cos(x+y^2)$ 所确定，求 dy.

18. 设 $y=x\ln x$，求 $y^{(n)}(1)$ $(n\geqslant 2)$.

19. $\displaystyle\int\frac{x+1}{\sqrt{x^2-2x+3}}dx$.

20. $\displaystyle\int\frac{x^2\arctan x}{1+x^2}dx$.

21. $\displaystyle\int\frac{x+\sin x}{1+\cos x}dx$.

四、应用和讨论题

22. 设 $f(x)=x+\dfrac{1}{x-1}$，完成下表填空，并作草图：

$f(x)$ 极值点	
$f(x)$ 拐点	
$f(x)$ 水平、垂直渐近线	

23. 设 $f(x)=\begin{cases}x^n\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$ 问当 n 为何值时，在 $x=0$ 处(1) $f(x)$ 连续；(2) $f'(x)$ 存在；(3) $f'(x)$ 连续.

五、证明题

24. 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续，在 $(0, 1)$ 内可导，且 $f(0)=f(1)=0$，$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=1$. 试证：至少存在点 $\xi\in(0, 1)$，使得 $f'(\xi)=1$.

25. 设 $0<a<b$，证明不等式 $\dfrac{\ln b-\ln a}{b-a}<\dfrac{1}{\sqrt{ab}}$.