XITONG YU KONGZHI ZHONG DE JUZHEN LILUN

系统与控制中的

矩阵理论

张　显　仲光苹　高翔宇◇编著

黑龍江大學出版社

XITONG YU KONGZHI
ZHONG
DE
JUZHEN LILUN

系统与控制中的

矩阵理论

张 显 仲光苹 高翔宇◇编著

黑龍江大學出版社

图书在版编目(CIP)数据

系统与控制中的矩阵理论／张显，仲光苹，高翔宇编著．--哈尔滨：黑龙江大学出版社，2011.6

ISBN 978-7-81129-403-3

Ⅰ.①系… Ⅱ.①张… ②仲… ③高… Ⅲ.①矩阵-理论 Ⅳ.①O151.21

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第057259号

书　　名	系统与控制中的矩阵理论
著作责任者	张　显　仲光苹　高翔宇 编著
出 版 人	李小娟
责任编辑	赵丽华
出版发行	黑龙江大学出版社(哈尔滨市学府路74号　150080)
网　　址	http://www.hljupress.com
电子信箱	hljupress@163.com
电　　话	(0451)86608666
经　　销	新华书店
印　　刷	黑龙江省委党校印刷厂
开　　本	787×1092　1/16
印　　张	13.75
字　　数	230千
版　　次	2011年8月第1版　2011年8月第1次印刷
书　　号	ISBN 978-7-81129-403-3
定　　价	25.00元

前　　言

本书的第一作者张显，曾连续五年为黑龙江大学数学科学学院的研究生讲授“矩阵代数”课程，本书是在其讲稿的基础上，进行增删、改写而成的. 书中详细、准确地介绍了矩阵的列空间与核空间、矩阵(对)分解与标准形、向量范数、矩阵序列的极限与矩阵级数、函数矩阵的微积分、矩阵特征值和奇异值的不等式、矩阵广义逆、线性矩阵不等式、代数Riccati矩阵方程等方面的内容. 力求做到论述严谨、深入浅出，能够体现矩阵的理论、思想和方法. 为了便于读者理解和消化内容，每章均配有适量的习题，较难的习题附有提示.

本书有两个特色：一是为了内容的连贯、衔接，方便读者阅读，作者给出了许多与原文献不同的证明；二是部分内容摘自近几年出版的控制方面的学术论文，其中有的是作者的科研成果.

全书共分十二章，第一至七章及附录A至D由仲光苹执笔，第八至十一章及附录E和F由高翔宇执笔，第十二章由张显执笔，最后由张显统稿.

本书适合作为系统与控制等相关专业的研究生教材，也可作为数学系本科生的选修课教材，还可供相关专业的高等学校教师、广大科技工作者、工程技术人员参考.

本书的部分内容摘自国内外的同类著作、相关文献以及黑龙江大学曹重光教授的讲稿，作者在此向这些作者表示衷心的感谢.

本书的出版得到了黑龙江省精品课程(近世代数)建设经费的资助，在此深表谢意，同时还要感谢黑龙江大学和东北石油大学的有关领导和同志的大力支持和帮助. 黑龙江大学数学科学学院的一些研究生参与了本书的打字和校对工作，在此一并致谢.

由于我们水平有限，本书可能有不当之处，甚至错误，热诚地欢迎各位同行专家和读者批评指正.

作者

2011年3月于哈尔滨

符号

如果没有特殊说明, 本书将使用下面的符号.

$\mathbb{R}$	实数集
$\mathbb{C}$	复数集
$\mathbb{F}$	$\mathbb{R}$或$\mathbb{C}$
$\mathbb{F}^n$	集合$\mathbb{F}$上所有n维列向量的集合
$\mathbb{F}^{m\times n}$	集合$\mathbb{F}$上所有$m\times n$矩阵的集合
$\mathbb{F}_k^{m\times n}$	集合$\mathbb{F}^{m\times n}$中所有秩为k矩阵的集合
$GL_n(\mathbb{F})$	集合$\mathbb{F}$上所有n阶可逆阵的集合
max	最大值
min	最小值
$\lambda_{\max}(\cdot)$	矩阵的最大特征值
$\lambda_{\min}(\cdot)$	矩阵的最小特征值
$\sigma_{\max}$	矩阵的最大奇异值
$\sigma_{\min}$	矩阵的最小奇异值
$\mathcal{R}(\cdot)$	矩阵的列空间
$\mathcal{N}(\cdot)$	矩阵的核空间
N_A	$\mathcal{N}(A)$的一组基作为列排成的矩阵
$\mathrm{span}\{\cdot\}$	生成子空间
$\mathrm{Im}\,(\cdot)$	线性变换的像空间
$\ker(\cdot)$	线性变换的核空间
E_{ij}	(i,j)位置元素为1而其余位置为0的矩阵
I_n或I	(n阶)单位阵
$0_{m\times n}$或0	($m\times n$阶)零矩阵
A_{ij}	矩阵A的(i,j)位置元素的代数余子式
$\mathrm{adj}(\cdot)$	伴随矩阵
$\det(\cdot)$	行列式
$\mathrm{rank}(\cdot)$	秩

$\lambda(\cdot)$	矩阵的所有特征根的集合
$\{\cdot\}_{o.n.}$	标准正交向量组
$A > B$或$B < A$	矩阵$A - B$是实对称(复Hermite)正定矩阵
$A \geqslant B$或$B \leqslant A$	矩阵$A - B$是实对称(复Hermite)半正定矩阵
$\rho(\cdot)$	谱半径
$\mathrm{tr}(\cdot)$	迹
$(\cdot)^{-1}$	逆
$(\cdot)^T$	转置
$(\cdot)^*$	共轭转置
$\overline{(\cdot)}$	共轭
$\lvert\cdot\rvert$	复数的模长
dim	维数
$\int$	积分
lim	极限
diag	对角矩阵
$(\cdot)^{\perp}$	正交补
$\lVert\cdot\rVert$	范数
$\lVert\cdot\rVert_1$	1-范数
$\lVert\cdot\rVert_2$	2-范数或谱范数
$\lVert\cdot\rVert_\infty$	∞-范数或H_∞范数
$\lVert\cdot\rVert_F$	Frobenius范数
$\mathrm{Cond}_{\lVert\cdot\rVert}$或Cond	条件数
sup	上确界
inf	下确界
$\mathrm{Ind}(\cdot)$	矩阵的指标
$(\cdot)_d$	矩阵的Draizin逆
$(\cdot)_g$	矩阵的群逆
$(\cdot)^{(1)}$	矩阵的$\{1\}$-逆
$(\cdot)^{\{1\}}$	矩阵的所有$\{1\}$-逆的集合
$(\cdot)^{(1,2)}$	矩阵的$\{1,2\}$-逆
$(\cdot)^{\{1,2\}}$	矩阵的所有$\{1,2\}$-逆的集合
$(\cdot)^{(1,3)}$	矩阵的$\{1,3\}$-逆
$(\cdot)^{\{1,3\}}$	矩阵的所有$\{1,3\}$-逆的集合
$(\cdot)^{(1,4)}$	矩阵的$\{1,4\}$-逆
$(\cdot)^{\{1,4\}}$	矩阵的所有$\{1,4\}$-逆的集合

$(\cdot)^+$	矩阵的Moore-Penrose逆
$\mu_{\|\cdot\|}(\cdot)$或$\mu(\cdot)$	矩阵测度
$\mathrm{Vec}(\cdot)$	拉直运算
M/A	矩阵M关于主子阵A的Schur补
$\widehat{M/A}$	矩阵M关于主子阵A的广义Schur补
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}A$或$A'(x)$	变量A对变量x求导数
$\frac{\partial}{\partial x}A$	变量A对变量x求偏导数
$C_{k,X,Y}$	矩阵$\begin{bmatrix} Y & XY & \cdots & X^{k-1}Y \end{bmatrix}$
$P^{L,M}$	从子空间M到子空间L的投影算子
P^L	$P^{L,L}$
$P_{L,M}$	投影算子$P^{L,L}$在给定基下的矩阵
P_L	$P_{L,L}$
C_n^m	从n个元素中任取m个的组合数
$\mathbb{F}[x]_n$	$\mathbb{F}$上所有次数小于n的多项式和零多项式的集合
$\sum$	求和
$\prod$	乘积
$\otimes$	Kronecker积
$A^{[k]}$	$A \otimes A \otimes \cdots \otimes A$ (k个A)
$\circ$	Hadamard积
e_i	单位矩阵的第i列
$\mathrm{Re}(\cdot)$	实部
$\mathrm{Im}(\cdot)$	虚部
$\mathbb{C}^-$	左半开复平面
$\overline{\mathbb{C}^+}$	右半闭复平面
$:=$	定义
$\Leftrightarrow$	等价于
$\Rightarrow$	推出
$\forall$	任意的
$\subseteq$	包含于
$\supseteq$	包含
$\in$	属于
$\notin$	不属于
$\square$	结束符

目录

第1章　矩阵的列空间与核空间

矩阵的列空间和核空间是矩阵理论中的基本概念. 本章主要讨论矩阵的列空间和核空间的定义、性质以及它们的和是直和的充要条件.

1.1　矩阵的列空间与核空间的定义

若映射$\sigma : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m$满足

$$\sigma(ka + lb) = k\sigma(a) + l\sigma(b),\ \forall a, b \in \mathbb{F}^n,\ \ k, l \in \mathbb{F},$$

则称σ是从$\mathbb{F}^n$到$\mathbb{F}^m$的线性映射.

设ε_1, ε_2, $\cdots$, ε_n是$\mathbb{F}^n$的基, η_1, η_2, $\cdots$, η_m是$\mathbb{F}^m$的基, $\sigma : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m$是线性映射, 则$\sigma(\varepsilon_j) \in \mathbb{F}^m$, $j = 1, 2, \cdots, n$, 于是

$$\sigma(\varepsilon_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\eta_i,\ j = 1, 2, \cdots, n,$$

其中$a_{ij} \in \mathbb{F}$. 任取$x = \sum\limits_{j=1}^{n} x_j\varepsilon_j \in \mathbb{F}^n$, 则

$$\begin{aligned}\sigma(x) = &\ \sum_{j=1}^{n}\left(x_j\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\eta_i\right) \\ = &\ \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} x_j a_{ij}\right)\eta_i \\ = &\ \begin{bmatrix} \eta_1 & \eta_2 & \cdots & \eta_m \end{bmatrix} A_\sigma \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},\ \forall x \in \mathbb{F}^n,\end{aligned} \tag{1.1.1}$$

其中

$$A_\sigma = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

由此容易得到下面的定理:

定理 1.1.1 对于给定的$\mathbb{F}^n$和$\mathbb{F}^m$的基, 映射$\sigma : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m$与$\mathbb{F}^{m\times n}$中的矩阵$A_\sigma$一一对应.

对于一个线性映射$\sigma : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m$, 称$\{x \in \mathbb{F}^n : \sigma(x) = 0\}$为映射$\sigma$的核空间, 记作$\ker\sigma$; 称$\{\sigma(x) : x \in \mathbb{F}^n\}$为映射$\sigma$的像空间, 记作$\mathrm{Im}\sigma$. 若取前面的$\eta_i$为单位矩阵$I_m$的第$i$列, ε_j为单位矩阵I_n的第j列, 则式(1.1.1)简化为

$$\sigma(x) = A_\sigma x,\ \forall x \in \mathbb{F}^n,$$

于是

$$\ker\sigma = \{x \in \mathbb{F}^n : A_\sigma x = 0\}, \quad \mathrm{Im}\,\sigma = \{A_\sigma x : x \in \mathbb{F}^n\}. \tag{1.1.2}$$

因而, 给出下面关于矩阵的核空间、列空间的定义是必要的.

定义 1.1.1 对于$A \in \mathbb{F}^{m\times n}$, 称$\{x \in \mathbb{F}^n : Ax = 0\}$ 为矩阵A的核空间, 记作$\mathcal{N}(A)$; 称$\{Ax : x \in \mathbb{F}^n\}$为矩阵$A$的列空间, 记作$\mathcal{R}(A)$.

从上面的定义易见, $\mathcal{N}(A)$和$\mathcal{R}(A)$分别是$\mathbb{F}^n$和$\mathbb{F}^m$的子空间, 并且

$$\dim\mathcal{N}(A) = n - \mathrm{rank}A,\ \dim\mathcal{R}(A) = \mathrm{rank}A.$$

这和式(1.1.2)一起可推出

$$\dim\ker\sigma = n - \mathrm{rank}A_\sigma,$$

$$\dim\mathrm{Im}\,\sigma = \mathrm{rank}A_\sigma.$$

1.2 列空间与核空间的性质和应用

本节介绍矩阵的列空间和核空间的一些常用的性质, 并给出它们在证明矩阵秩的不等式中的应用.

性质 1.2.1 设$A \in \mathbb{F}^{m\times n}$, $x_1, \cdots, x_r$是$\mathcal{N}(A)$的基, 将其扩充为$\mathbb{F}^n$的基$x_1, \cdots, x_r, x_{r+1}, \cdots, x_n$, 则$Ax_{r+1}, \cdots, Ax_n$是$\mathcal{R}(A)$的基.

证明 设$l_{r+1}Ax_{r+1}+\cdots+l_nAx_n=0$, 则$A(l_{r+1}x_{r+1}+\cdots+l_nx_n)=0$, 于是

$$l_{r+1}x_{r+1}+\cdots+l_nx_n\in\mathcal{N}(A).$$

因为$x_1,\cdots,x_r$是$\mathcal{N}(A)$的基, 所以存在$l_1,\cdots,l_r\in\mathbb{F}$, 使得

$$l_{r+1}x_{r+1}+\cdots+l_nx_n=l_1x_1+\ldots+l_rx_r.$$

由$x_1,\cdots,x_r,x_{r+1},\cdots,x_n$是$\mathbb{F}^n$的基推出

$$l_{r+1}=\cdots=l_n=0,$$

因而$Ax_{r+1},\cdots,Ax_n$线性无关.

任取$y\in\mathcal{R}(A)$, 则存在$z\in\mathbb{F}^n$, 使得

$$y=Az.$$

既然$x_1,\cdots,x_r,x_{r+1},\cdots,x_n$是$\mathbb{F}^n$的基, 可设$z=k_1x_1+\cdots+k_rx_r+k_{r+1}x_{r+1}+\cdots+k_nx_n$, 其中$k_i\in\mathbb{F}$, $i=1,2,\cdots,n$, 于是

$$\begin{aligned}y=Az&=k_1Ax_1+\cdots+k_rAx_r+k_{r+1}Ax_{r+1}+\cdots+k_nAx_n\\&=k_{r+1}Ax_{r+1}+\cdots+k_nAx_n,\end{aligned}$$

即y可由$Ax_{r+1},\cdots,Ax_n$线性表出.

总之, $Ax_{r+1},\cdots,Ax_n$是$\mathcal{R}(A)$的基. □

性质 1.2.2 若$A\in\mathbb{F}^{n\times n}$, 则$\mathcal{N}(A)$和$\mathcal{R}(A)$均是$A$的不变子空间.

性质 1.2.3 设$A,B\in\mathbb{F}^{m\times n}$, 则

$$\mathcal{R}([A\quad B])=\mathcal{R}(A)+\mathcal{R}(B),\ \mathcal{R}(A+B)\subseteq\mathcal{R}([A\quad B]).$$

性质 1.2.4 设$A,B\in\mathbb{F}^{m\times n}$, 满足$\mathcal{N}(A)+\mathcal{N}(B)=\mathbb{F}^n$, 则

$$\mathcal{R}(\begin{bmatrix}A & B\end{bmatrix})\subseteq\mathcal{R}(A+B).$$

证明 任取$z\in\mathcal{R}(\begin{bmatrix}A & B\end{bmatrix})$, 则存在$x,y\in\mathbb{F}^n$, 使得$z=Ax+By$. 由$\mathcal{N}(A)+\mathcal{N}(B)=\mathbb{F}^n$可设

$$x=x_1+x_2,\ y=y_1+y_2,\ x_1,y_1\in\mathcal{N}(A),\ x_2,y_2\in\mathcal{N}(B),$$

于是$z=A(x_1+x_2)+B(y_1+y_2)=Ax_2+By_1=(A+B)x_2+(A+B)y_1\in\mathcal{R}(A+B)$. 故$\mathcal{R}(\begin{bmatrix}A & B\end{bmatrix})\subseteq\mathcal{R}(A+B)$. □

命题 1.2.1 设$A, B \in \mathbb{F}^{m\times n}$, 则

$$\operatorname{rank}(A+B) \leqslant \operatorname{rank}A + \operatorname{rank}B - \dim(\mathcal{R}(A) \cap \mathcal{R}(B)).$$

证明 由性质1.2.3得

$$\begin{aligned}
& \operatorname{rank}(A+B) \\
= \; & \dim \mathcal{R}(A+B) \\
\leqslant \; & \dim \mathcal{R}\left(\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix}\right) \\
= \; & \dim(\mathcal{R}(A) + \mathcal{R}(B)) \\
= \; & \dim \mathcal{R}(A) + \dim \mathcal{R}(B) - \dim(\mathcal{R}(A) \cap \mathcal{R}(B)) \\
= \; & \operatorname{rank}A + \operatorname{rank}B - \dim(\mathcal{R}(A) \cap \mathcal{R}(B)).
\end{aligned} \tag{1.2.1}$$

□

命题 1.2.2 设$A, B \in \mathbb{F}^{m\times n}$满足$\operatorname{rank}(A+B) = \operatorname{rank}A + \operatorname{rank}B$, 则

(i) $\mathcal{R}(A) \cap \mathcal{R}(B) = \{0\}$;

(ii) $\mathcal{N}(A) \cap \mathcal{N}(B) = \mathcal{N}(A+B)$;

(iii) $\mathcal{N}(A) + \mathcal{N}(B) = \mathbb{F}^n$.

证明 (i) 由命题1.2.1及$\operatorname{rank}(A+B) = \operatorname{rank}A + \operatorname{rank}B$推出$\dim(\mathcal{R}(A) \cap \mathcal{R}(B)) = 0$, 于是$\mathcal{R}(A) \cap \mathcal{R}(B) = \{0\}$.

(ii) 任取$x \in \mathcal{N}(A) \cap \mathcal{N}(B)$, 则$x \in \mathcal{N}(A)$且$x \in \mathcal{N}(B)$, 于是$Ax = 0$且$Bx = 0$, 从而$(A+B)x = 0$, 即$x \in \mathcal{N}(A+B)$. 故$\mathcal{N}(A) \cap \mathcal{N}(B) \subseteq \mathcal{N}(A+B)$.

任取$y \in \mathcal{N}(A+B)$, 则$(A+B)y = 0$, 于是$Ay = -By$. 由(i)推出$Ay = By = 0$, 进而$y \in \mathcal{N}(A)$且$y \in \mathcal{N}(B)$, 即$y \in \mathcal{N}(A) \cap \mathcal{N}(B)$. 故$\mathcal{N}(A) \cap \mathcal{N}(B) \supseteq \mathcal{N}(A+B)$.

(iii) 由(ii)推出

$$\begin{aligned}
& \mathcal{N}(A) + \mathcal{N}(B) = \mathbb{F}^n \\
\Leftrightarrow \; & \dim(\mathcal{N}(A) + \mathcal{N}(B)) = n \\
\Leftrightarrow \; & \dim \mathcal{N}(A) + \dim \mathcal{N}(B) - \dim(\mathcal{N}(A) \cap \mathcal{N}(B)) = n \\
\Leftrightarrow \; & n - \dim \mathcal{R}(A) - \dim \mathcal{R}(B) - \dim \mathcal{N}(A+B) = 0 \\
\Leftrightarrow \; & \dim \mathcal{R}(A) + \dim \mathcal{R}(B) = \dim \mathcal{R}(A+B) \\
\Leftrightarrow \; & \operatorname{rank}(A+B) = \operatorname{rank}A + \operatorname{rank}B.
\end{aligned}$$

□

定理 1.2.1 设$A,B\in\mathbb{F}^{m\times n}$, 则

$$\operatorname{rank}(A+B)\leqslant \operatorname{rank}A+\operatorname{rank}B. \tag{1.2.2}$$

进而, 不等式(1.2.2)的等号成立的充要条件是

$$\mathcal{R}(A)\cap\mathcal{R}(B)=\{0\},\ \mathcal{N}(A)+\mathcal{N}(B)=\mathbb{F}^n. \tag{1.2.3}$$

证明 由命题1.2.1知式(1.2.2)成立. 注意到命题1.2.2, 只需证: 若式(1.2.3)成立, 则$\operatorname{rank}(A+B)=\operatorname{rank}A+\operatorname{rank}B$. 使用式(1.2.1)和性质1.2.4得证. □

设$A\in\mathbb{F}^{m\times n}, B\in\mathbb{F}^{n\times p}$, 则$AB\in\mathbb{F}^{m\times p}$, 若将$B$和$A$分别看成映射$B:\mathbb{F}^p\to\mathbb{F}^n$, $A:\mathbb{F}^n\to\mathbb{F}^m$, 则$AB$可看成映射$AB:\mathbb{F}^p\to\mathbb{F}^m$, 且$A$在$\mathcal{R}(B)$上的限制映射为$A|_{\mathcal{R}(B)}:\mathcal{R}(B)\to\mathbb{F}^m$, 从而

$$\begin{aligned}
\dim\operatorname{Im}(AB) &= \dim\operatorname{Im}(A|_{\mathcal{R}(B)})\\
&= \dim\operatorname{Im}(B)-\dim(\operatorname{Im}(B)\cap\ker(A))\\
&\geqslant \dim\operatorname{Im}(B)-\dim\ker(A)\\
&= \dim\operatorname{Im}(B)-(n-\dim\operatorname{Im}(A))\\
&= \dim\operatorname{Im}(B)+\dim\operatorname{Im}(A)-n.
\end{aligned}$$

由此易见下面的定理成立.

定理 1.2.2 设$A\in\mathbb{F}^{m\times n}$, $B\in\mathbb{F}^{n\times p}$, 则

$$\operatorname{rank}(AB)\geqslant \operatorname{rank}A+\operatorname{rank}B-n. \tag{1.2.4}$$

进而, 不等式(1.2.4)的等号成立的充要条件是

$$\dim(\mathcal{R}(B)\cap\mathcal{N}(A))=\dim\mathcal{N}(A)(\text{即}\mathcal{N}(A)\subseteq\mathcal{R}(B)).$$

注记 1.2.1 参考文献[1]从矩阵分解的角度给出了式(1.2.2)和(1.2.4)中等号成立的充要条件, 具体内容见3.4.

1.3 列空间与核空间的和是直和的条件

对于$A\in\mathbb{F}^{n\times n}$, 前面已经提到$\mathcal{N}(A)$和$\mathcal{R}(A)$均是$A$的不变子空间. 设$x_1$, x_2, $\cdots$, x_r是$\mathcal{R}(A)$的基, x_{r+1}, $\cdots$, x_n是$\mathcal{N}(A)$的基. 若$\mathcal{N}(A)\oplus\mathcal{R}(A)=\mathbb{F}^n$, 则$x_1$, x_2, $\cdots$, x_r, x_{r+1}, $\cdots$, x_n是$\mathbb{F}^n$的基, 于是

$$P^{-1}AP=\operatorname{diag}(A_1,0),$$

其中$A_1 \in \mathbb{F}^{r\times r}$可逆, $P = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix}$. 总之, 当$\mathcal{N}(A) \oplus \mathcal{R}(A) = \mathbb{F}^n$时, 矩阵$A$将相似于一个形式较简单的矩阵, 这给处理问题带来很多方便. 因而我们关心$\mathcal{N}(A) \oplus \mathcal{R}(A) = \mathbb{F}^n$成立的条件.

命题 1.3.1 设$A \in \mathbb{F}^{n\times n}$, 则$\mathcal{N}(A) \oplus \mathcal{R}(A) = \mathbb{F}^n$的充要条件是

$$\mathcal{N}(A) + \mathcal{R}(A) = \mathbb{F}^n. \tag{1.3.1}$$

证明 必要性是显然的; 充分性由$\dim \mathcal{N}(A) + \dim \mathcal{R}(A) = n$得到. □

上面的命题表明要使矩阵A相似于一个较简单的形式, 只需式(1.3.1)成立. 然而, 下面的例子表明式(1.3.1)并不是对$\mathbb{F}^{n\times n}$ 中的所有矩阵都成立.

例 1.3.1 记$\mathbb{F}[x]_n$为$\mathbb{F}$上的所有次数小于n的多项式和零多项式的集合. 定义从$\mathbb{F}[x]_n$到$\mathbb{F}[x]_n$的线性映射$\sigma : f(x) \mapsto f'(x)$, $\forall f(x) \in \mathbb{F}[x]_n$. 取$\mathbb{F}[x]_n$的基$1, x, \dfrac{x^2}{2!}, \cdots, \dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!}$, 则$\sigma$在这组基下的矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{F}^{n\times n}.$$

易见

$$\mathcal{N}(A) = \left\{ \begin{bmatrix} x & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}^T : x \in \mathbb{F} \right\},$$

$$\mathcal{R}(A) = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_{n-1} & 0 \end{bmatrix}^T : x_i \in \mathbb{F}, i = 1, 2, \cdots, n-1 \right\},$$

从而$\mathcal{N}(A) + \mathcal{R}(A) \neq \mathbb{F}^n$.

下面的定理给出了式(1.3.1)成立的充要条件.

定理 1.3.1 设$A \in \mathbb{F}^{n\times n}$, 则下列说法等价:

(i) $\mathcal{N}(A) \oplus \mathcal{R}(A) = \mathbb{F}^n$;

(ii) 存在可逆阵P和B使得$P^{-1}AP = \mathrm{diag}(0, B)$;

(iii) $\mathrm{rank}A = \mathrm{rank}A^2$;