

XITONG YU KONGZHI
ZHONG
DE
JUZHEN LILUN

系统与控制中的

矩阵理论

张 显 仲光苹 高翔宇◇编著

XITONG YU KONGZHI
ZHONG
DE
JUZHEN LILUN

系统与amp;控制中的
矩阵理论

张 显 仲光苹 高翔宇◇编著

图书在版编目(CIP)数据

系统与控制中的矩阵理论 / 张显, 仲光苹, 高翔宇
编著. -- 哈尔滨: 黑龙江大学出版社, 2011.6

ISBN 978 - 7 - 81129 - 403 - 3

I. ①系… II. ①张… ②仲… ③高… III. ①矩阵 -
理论 IV. ①O151.21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 057259 号

书 名	系统与控制中的矩阵理论
著作责任者	张 显 仲光苹 高翔宇 编著
出 版 人	李小娟
责 任 编 辑	赵丽华
出版发行	黑龙江大学出版社(哈尔滨市学府路 74 号 150080)
网 址	http://www.hljupress.com
电 子 信 箱	hljupress@163.com
电 话	(0451)86608666
经 销	新华书店
印 刷	黑龙江省委党校印刷厂
开 本	787 × 1092 1/16
印 张	13.75
字 数	230 千
版 次	2011 年 8 月第 1 版 2011 年 8 月第 1 次印刷
书 号	ISBN 978 - 7 - 81129 - 403 - 3
定 价	25.00 元

本书如有印装错误请与本社联系更换。

版权所有 侵权必究

前 言

本书的第一作者张显,曾连续五年为黑龙江大学数学科学学院的研究生讲授“矩阵代数”课程,本书是在其讲稿的基础上,进行增删、改写而成的.书中详细、准确地介绍了矩阵的列空间与核空间、矩阵(对)分解与标准形、向量范数、矩阵序列的极限与矩阵级数、函数矩阵的微积分、矩阵特征值和奇异值的不等式、矩阵广义逆、线性矩阵不等式、代数Riccati矩阵方程等方面的内容.力求做到论述严谨、深入浅出,能够体现矩阵的理论、思想和方法.为了便于读者理解和消化内容,每章均配有适量的习题,较难的习题附有提示.

本书有两个特色:一是为了内容的连贯、衔接,方便读者阅读,作者给出了许多与原文献不同的证明;二是部分内容摘自近几年出版的控制方面的学术论文,其中有的是作者的科研成果.

全书共分十二章,第一至七章及附录A至D由仲光苹执笔,第八至十一章及附录E和F由高翔宇执笔,第十二章由张显执笔,最后由张显统稿.

本书适合作为系统与控制等相关专业的研究生教材,也可作为数学系本科生的选修课教材,还可供相关专业的高等学校教师、广大科技工作者、工程技术人员参考.

本书的部分内容摘自国内外的同类著作、相关文献以及黑龙江大学曹重光教授的讲稿,作者在此向这些作者表示衷心的感谢.

本书的出版得到了黑龙江省精品课程(近世代数)建设经费的资助,在此深表谢意,同时还要感谢黑龙江大学和东北石油大学的有关领导和同志的大力支持和帮助.黑龙江大学数学科学学院的一些研究生参与了本书的打字和校对工作,在此一并致谢.

由于我们水平有限,本书可能有不当之处,甚至错误,热诚地欢迎各位同行专家和读者批评指正.

作者
2011年3月于哈尔滨

符号

如果没有特殊说明, 本书将使用下面的符号.

$\mathbb{R}$	实数集
$\mathbb{C}$	复数集
$\mathbb{F}$	$\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$
$\mathbb{F}^n$	集合 $\mathbb{F}$ 上所有 n 维列向量的集合
$\mathbb{F}^{m \times n}$	集合 $\mathbb{F}$ 上所有 $m \times n$ 矩阵的集合
$\mathbb{F}_k^{m \times n}$	集合 $\mathbb{F}^{m \times n}$ 中所有秩为 k 矩阵的集合
$GL_n(\mathbb{F})$	集合 $\mathbb{F}$ 上所有 n 阶可逆阵的集合
$\max$	最大值
$\min$	最小值
$\lambda_{\max}(\cdot)$	矩阵的最大特征值
$\lambda_{\min}(\cdot)$	矩阵的最小特征值
$\sigma_{\max}$	矩阵的最大奇异值
$\sigma_{\min}$	矩阵的最小奇异值
$\mathcal{R}(\cdot)$	矩阵的列空间
$\mathcal{N}(\cdot)$	矩阵的核空间
N_A	$\mathcal{N}(A)$ 的一组基作为列排成的矩阵
$\text{span}\{\cdot\}$	生成子空间
$\text{Im}(\cdot)$	线性变换的像空间
$\text{ker}(\cdot)$	线性变换的核空间
E_{ij}	(i, j) 位置元素为1而其余位置为0的矩阵
I_n 或 I	(n) 阶单位阵
$0_{m \times n}$ 或 0	$(m \times n)$ 阶零矩阵
A_{ij}	矩阵 A 的 (i, j) 位置元素的代数余子式
$\text{adj}(\cdot)$	伴随矩阵
$\det(\cdot)$	行列式
$\text{rank}(\cdot)$	秩

$\lambda(\cdot)$	矩阵的所有特征根的集合
$\{\cdot\}_{o.n.}$	标准正交向量组
$A > B$ 或 $B < A$	矩阵 $A - B$ 是实对称(复Hermite)正定矩阵
$A \geq B$ 或 $B \leq A$	矩阵 $A - B$ 是实对称(复Hermite)半正定矩阵
$\rho(\cdot)$	谱半径
$\text{tr}(\cdot)$	迹
$(\cdot)^{-1}$	逆
$(\cdot)^T$	转置
$(\cdot)^*$	共轭转置
$\overline{(\cdot)}$	共轭
$ \cdot $	复数的模长
$\dim$	维数
$\int$	积分
$\lim$	极限
diag	对角矩阵
$(\cdot)^\perp$	正交补
$\ \cdot\ $	范数
$\ \cdot\ _1$	1-范数
$\ \cdot\ _2$	2-范数或谱范数
$\ \cdot\ _\infty$	∞ -范数或 H_∞ 范数
$\ \cdot\ _F$	Frobenius范数
$\text{Cond}_{\ \cdot\ }$ 或 Cond	条件数
$\sup$	上确界
$\inf$	下确界
$\text{Ind}(\cdot)$	矩阵的指标
$(\cdot)_d$	矩阵的Drazin逆
$(\cdot)_g$	矩阵的群逆
$(\cdot)^{(1)}$	矩阵的 $\{1\}$ -逆
$(\cdot)^{\{1\}}$	矩阵的所有 $\{1\}$ -逆的集合
$(\cdot)^{(1,2)}$	矩阵的 $\{1, 2\}$ -逆
$(\cdot)^{\{1,2\}}$	矩阵的所有 $\{1, 2\}$ -逆的集合
$(\cdot)^{(1,3)}$	矩阵的 $\{1, 3\}$ -逆
$(\cdot)^{\{1,3\}}$	矩阵的所有 $\{1, 3\}$ -逆的集合
$(\cdot)^{(1,4)}$	矩阵的 $\{1, 4\}$ -逆
$(\cdot)^{\{1,4\}}$	矩阵的所有 $\{1, 4\}$ -逆的集合

$(\cdot)^+$	矩阵的Moore-Penrose逆
$\mu_{\ \cdot\ }(\cdot)$ 或 $\mu(\cdot)$	矩阵测度
$\text{Vec}(\cdot)$	拉直运算
M/A	矩阵 M 关于主子阵 A 的Schur补
$\widehat{M/A}$	矩阵 M 关于主子阵 A 的广义Schur补
$\frac{d}{dx}A$ 或 $A'(x)$	变量 A 对变量 x 求导数
$\frac{\partial}{\partial x}A$	变量 A 对变量 x 求偏导数
$C_{k,X,Y}$	矩阵 $[Y \quad XY \quad \cdots \quad X^{k-1}Y]$
$P^{L,M}$	从子空间 M 到子空间 L 的投影算子
P^L	$P^{L,L}$
$P_{L,M}$	投影算子 $P^{L,L}$ 在给定基下的矩阵
P_L	$P_{L,L}$
C_n^m	从 n 个元素中任取 m 个的组合数
$\mathbb{F}[x]_n$	$\mathbb{F}$ 上所有次数小于 n 的多项式和零多项式的集合
$\sum$	求和
$\prod$	乘积
$\otimes$	Kronecker积
$A^{[k]}$	$A \otimes A \otimes \cdots \otimes A$ (k 个 A)
$\circ$	Hadamard积
e_i	单位矩阵的第 i 列
$\text{Re}(\cdot)$	实部
$\text{Im}(\cdot)$	虚部
$\mathbb{C}^-$	左半开复平面
$\overline{\mathbb{C}^+}$	右半闭复平面
$:=$	定义
$\Leftrightarrow$	等价于
$\Rightarrow$	推出
$\forall$	任意的
$\subseteq$	包含于
$\supseteq$	包含
$\in$	属于
$\notin$	不属于
$\square$	结束符

目 录

符号.....	I
第1章 矩阵的列空间与核空间	1
1.1 矩阵的列空间与核空间的定义.....	1
1.2 列空间与核空间的性质和应用.....	2
1.3 列空间与核空间的和是直和的条件.....	5
习 题.....	7
第2章 矩阵的分解与标准形	8
2.1 矩阵的等价分解.....	8
2.2 矩阵的Fitting分解.....	9
2.3 复(实)矩阵的奇异值分解.....	11
2.4 矩阵的对角化	11
2.5 复矩阵的Jordan分解.....	14
2.6 实对称矩阵的惯性指数分解.....	15
习 题.....	16
第3章 矩阵对的分解和标准形	18
3.1 (非)正则矩阵对的等价标准形.....	18
3.2 矩阵对的能控能观结构分解.....	19
3.3 能控矩阵对的规范形	23
3.4 满足秩条件的矩阵对的标准形.....	27
习 题.....	30
第4章 幂等矩阵与投影算子	31
4.1 幂等矩阵	31
4.2 投影算子与投影矩阵	35

4.3 正交投影矩阵	38
习 题	39
第5章 向量范数	41
5.1 向量范数的定义和例子	41
5.2 范数的等价性	44
5.3 矩阵范数	46
5.3.1 范数的相容性	47
5.3.2 从属范数	49
5.4 谱半径和条件数	53
5.5 矩阵测度	54
习 题	57
第6章 矩阵序列的极限与矩阵级数	60
6.1 矩阵序列的极限	60
6.2 矩阵级数	62
6.3 矩阵幂级数	64
习 题	67
第7章 函数矩阵的微积分	69
7.1 函数矩阵对单变量的导数	69
7.2 纯量函数对矩阵变量的导数	72
7.3 函数矩阵对矩阵变量的导数	75
7.4 函数矩阵的微积分	77
习 题	79
第8章 矩阵的特征值和奇异值不等式	80
8.1 Courant-Fischer定理及其应用	80
8.1.1 Courant-Fischer定理	80
8.1.2 Sturm分离原理	83
8.1.3 Weyl型不等式	84
8.2 Kantorarich不等式	87
8.3 Courant-Fischer定理的推广	89
8.4 两个矩阵乘积的奇异值和特征值不等式	93

8.5 两个矩阵和的奇异值和特征值不等式	96
习 题	98
第9章 矩阵广义逆	100
9.1 矩阵 $\{i, j, \dots, k\}$ 逆	100
9.1.1 矩阵 $\{i, j, \dots, k\}$ 逆的定义及其存在唯一性	100
9.1.2 矩阵 $\{1\}$ 逆和Moore-Penrose逆的性质	105
9.1.3 矩阵 $\{1\}$ 逆的表示	107
9.1.4 矩阵 $\{1\}$ 逆与矩阵方程的解	107
9.1.5 矩阵 $\{1, 4\}$ 逆与线性方程组的最小范数解	110
9.1.6 矩阵 $\{1, 3\}$ 逆与线性方程组的最小二乘解	110
9.1.7 矩阵M-P逆与线性方程组的最小范数最小二乘解	111
9.1.8 Schur补与分块矩阵的 $\{1\}$ -逆	112
9.2 矩阵Drazin逆	114
9.2.1 矩阵Drazin逆的定义及其存在唯一性	114
9.2.2 矩阵Drazin逆的性质	116
9.2.3 矩阵群逆	118
习 题	119
第10章 矩阵的Kronecker积和Hadamard积	122
10.1 矩阵的Kronecker积的定义和性质	122
10.2 矩阵的Kronecker积与线性矩阵方程的解	127
10.3 矩阵的Hadamard积	129
习 题	132
第11章 线性矩阵不等式	134
11.1 Schur补引理及其应用	135
11.2 Projection引理及其应用	137
11.3 Dualization引理	144
11.4 含线性参数的线性矩阵不等式	144
11.5 鲁棒控制中的几个基础不等式	148
11.6 含范数有界不确定性的线性矩阵不等式	152

11.7 含线性分式不确定性的线性矩阵不等式	154
11.8 Jensen不等式	155
11.8.1 Jensen不等式	155
11.8.2 两个不等式的比较	158
习 题	159
第12章 代数Riccati矩阵方程	161
12.1 Lyapunov矩阵方程	161
12.1.1 矩阵对的能稳性和能检测性	161
12.1.2 连续Lyapunov矩阵方程	162
12.2 Hamilton矩阵	164
12.3 代数Riccati矩阵方程的实对称稳定解	166
12.4 H_2 代数Riccati矩阵方程的实对称半正定稳定解	170
12.5 H_∞ 范数与 H_∞ 代数Riccati矩阵方程	172
12.5.1 H_∞ 范数与 H_∞ 代数Riccati矩阵方程的定义	172
12.5.2 H_∞ 范数的界与 H_∞ 代数Riccati矩阵方程的解	172
12.5.3 H_∞ 范数的计算	176
习 题	179
参考文献	181
附录A 定理3.1.1的证明	183
附录B 定理3.3.1的证明	190
附录C 定理3.4.4的证明	192
附录D 命题5.5.1~5.5.3的证明	196
附录E 定理8.3.1的证明	199
附录F 定理11.5.1的证明	205

第1章 矩阵的列空间与核空间

矩阵的列空间和核空间是矩阵理论中的基本概念. 本章主要讨论矩阵的列空间和核空间的定义、性质以及它们的和是直和的充要条件.

1.1 矩阵的列空间与核空间的定义

若映射 $\sigma : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^m$ 满足

$$\sigma(ka + lb) = k\sigma(a) + l\sigma(b), \quad \forall a, b \in \mathbb{F}^n, \quad k, l \in \mathbb{F},$$

则称 σ 是从 $\mathbb{F}^n$ 到 $\mathbb{F}^m$ 的线性映射.

设 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 是 $\mathbb{F}^n$ 的基, $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m$ 是 $\mathbb{F}^m$ 的基, $\sigma : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^m$ 是线性映射, 则 $\sigma(\varepsilon_j) \in \mathbb{F}^m, j = 1, 2, \dots, n$, 于是

$$\sigma(\varepsilon_j) = \sum_{i=1}^m a_{ij} \eta_i, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

其中 $a_{ij} \in \mathbb{F}$. 任取 $x = \sum_{j=1}^n x_j \varepsilon_j \in \mathbb{F}^n$, 则

$$\begin{aligned} \sigma(x) &= \sum_{j=1}^n \left(x_j \sum_{i=1}^m a_{ij} \eta_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n x_j a_{ij} \right) \eta_i \\ &= \begin{bmatrix} \eta_1 & \eta_2 & \cdots & \eta_m \end{bmatrix} A_\sigma \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \forall x \in \mathbb{F}^n, \end{aligned} \tag{1.1.1}$$

其中

$$A_\sigma = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

由此容易得到下面的定理:

定理 1.1.1 对于给定的 $\mathbb{F}^n$ 和 $\mathbb{F}^m$ 的基, 映射 $\sigma: \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^m$ 与 $\mathbb{F}^{m \times n}$ 中的矩阵 A_σ 一一对应.

对于一个线性映射 $\sigma: \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^m$, 称 $\{x \in \mathbb{F}^n: \sigma(x) = 0\}$ 为映射 σ 的核空间, 记作 $\ker \sigma$; 称 $\{\sigma(x): x \in \mathbb{F}^n\}$ 为映射 σ 的像空间, 记作 $\operatorname{Im} \sigma$. 若取前面的 η_i 为单位矩阵 I_m 的第 i 列, ε_j 为单位矩阵 I_n 的第 j 列, 则式(1.1.1)简化为

$$\sigma(x) = A_\sigma x, \quad \forall x \in \mathbb{F}^n,$$

于是

$$\ker \sigma = \{x \in \mathbb{F}^n: A_\sigma x = 0\}, \quad \operatorname{Im} \sigma = \{A_\sigma x: x \in \mathbb{F}^n\}. \quad (1.1.2)$$

因而, 给出下面关于矩阵的核空间、列空间的定义是必要的.

定义 1.1.1 对于 $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$, 称 $\{x \in \mathbb{F}^n: Ax = 0\}$ 为矩阵 A 的核空间, 记作 $\mathcal{N}(A)$; 称 $\{Ax: x \in \mathbb{F}^n\}$ 为矩阵 A 的列空间, 记作 $\mathcal{R}(A)$.

从上面的定义易见, $\mathcal{N}(A)$ 和 $\mathcal{R}(A)$ 分别是 $\mathbb{F}^n$ 和 $\mathbb{F}^m$ 的子空间, 并且

$$\dim \mathcal{N}(A) = n - \operatorname{rank} A, \quad \dim \mathcal{R}(A) = \operatorname{rank} A.$$

这和式(1.1.2)一起可推出

$$\dim \ker \sigma = n - \operatorname{rank} A_\sigma,$$

$$\dim \operatorname{Im} \sigma = \operatorname{rank} A_\sigma.$$

1.2 列空间与核空间的性质和应用

本节介绍矩阵的列空间和核空间的一些常用的性质, 并给出它们在证明矩阵秩的不等式中的应用.

性质 1.2.1 设 $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$, $x_1, \dots, x_r$ 是 $\mathcal{N}(A)$ 的基, 将其扩充为 $\mathbb{F}^n$ 的基 $x_1, \dots, x_r, x_{r+1}, \dots, x_n$, 则 $Ax_{r+1}, \dots, Ax_n$ 是 $\mathcal{R}(A)$ 的基.

证明 设 $l_{r+1}Ax_{r+1} + \cdots + l_nAx_n = 0$, 则 $A(l_{r+1}x_{r+1} + \cdots + l_nx_n) = 0$, 于是

$$l_{r+1}x_{r+1} + \cdots + l_nx_n \in \mathcal{N}(A).$$

因为 $x_1, \cdots, x_r$ 是 $\mathcal{N}(A)$ 的基, 所以存在 $l_1, \cdots, l_r \in \mathbb{F}$, 使得

$$l_{r+1}x_{r+1} + \cdots + l_nx_n = l_1x_1 + \cdots + l_rx_r.$$

由 $x_1, \cdots, x_r, x_{r+1}, \cdots, x_n$ 是 $\mathbb{F}^n$ 的基推出

$$l_{r+1} = \cdots = l_n = 0,$$

因而 $Ax_{r+1}, \cdots, Ax_n$ 线性无关.

任取 $y \in \mathcal{R}(A)$, 则存在 $z \in \mathbb{F}^n$, 使得

$$y = Az.$$

既然 $x_1, \cdots, x_r, x_{r+1}, \cdots, x_n$ 是 $\mathbb{F}^n$ 的基, 可设 $z = k_1x_1 + \cdots + k_rx_r + k_{r+1}x_{r+1} + \cdots + k_nx_n$, 其中 $k_i \in \mathbb{F}, i = 1, 2, \cdots, n$, 于是

$$\begin{aligned} y = Az &= k_1Ax_1 + \cdots + k_rAx_r + k_{r+1}Ax_{r+1} + \cdots + k_nAx_n \\ &= k_{r+1}Ax_{r+1} + \cdots + k_nAx_n, \end{aligned}$$

即 y 可由 $Ax_{r+1}, \cdots, Ax_n$ 线性表出.

总之, $Ax_{r+1}, \cdots, Ax_n$ 是 $\mathcal{R}(A)$ 的基. $\square$

性质 1.2.2 若 $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$, 则 $\mathcal{N}(A)$ 和 $\mathcal{R}(A)$ 均是 A 的不变子空间.

性质 1.2.3 设 $A, B \in \mathbb{F}^{m \times n}$, 则

$$\mathcal{R}([A \ B]) = \mathcal{R}(A) + \mathcal{R}(B), \quad \mathcal{R}(A + B) \subseteq \mathcal{R}([A \ B]).$$

性质 1.2.4 设 $A, B \in \mathbb{F}^{m \times n}$, 满足 $\mathcal{N}(A) + \mathcal{N}(B) = \mathbb{F}^n$, 则

$$\mathcal{R}([A \ B]) \subseteq \mathcal{R}(A + B).$$

证明 任取 $z \in \mathcal{R}([A \ B])$, 则存在 $x, y \in \mathbb{F}^n$, 使得 $z = Ax + By$. 由 $\mathcal{N}(A) + \mathcal{N}(B) = \mathbb{F}^n$ 可设

$$x = x_1 + x_2, \quad y = y_1 + y_2, \quad x_1, y_1 \in \mathcal{N}(A), \quad x_2, y_2 \in \mathcal{N}(B),$$

于是 $z = A(x_1 + x_2) + B(y_1 + y_2) = Ax_2 + By_1 = (A + B)x_2 + (A + B)y_1 \in \mathcal{R}(A + B)$. 故 $\mathcal{R}([A \ B]) \subseteq \mathcal{R}(A + B)$. $\square$

命题 1.2.1 设 $A, B \in \mathbb{F}^{m \times n}$, 则

$$\text{rank}(A + B) \leq \text{rank}A + \text{rank}B - \dim(\mathcal{R}(A) \cap \mathcal{R}(B)).$$

证明 由性质1.2.3得

$$\begin{aligned} & \text{rank}(A + B) \\ &= \dim \mathcal{R}(A + B) \\ &\leq \dim \mathcal{R} \left(\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} \right) \\ &= \dim(\mathcal{R}(A) + \mathcal{R}(B)) \\ &= \dim \mathcal{R}(A) + \dim \mathcal{R}(B) - \dim(\mathcal{R}(A) \cap \mathcal{R}(B)) \\ &= \text{rank}A + \text{rank}B - \dim(\mathcal{R}(A) \cap \mathcal{R}(B)). \end{aligned} \tag{1.2.1}$$

□

命题 1.2.2 设 $A, B \in \mathbb{F}^{m \times n}$ 满足 $\text{rank}(A + B) = \text{rank}A + \text{rank}B$, 则

(i) $\mathcal{R}(A) \cap \mathcal{R}(B) = \{0\}$;

(ii) $\mathcal{N}(A) \cap \mathcal{N}(B) = \mathcal{N}(A + B)$;

(iii) $\mathcal{N}(A) + \mathcal{N}(B) = \mathbb{F}^n$.

证明 (i) 由命题1.2.1及 $\text{rank}(A + B) = \text{rank}A + \text{rank}B$ 推出 $\dim(\mathcal{R}(A) \cap \mathcal{R}(B)) = 0$, 于是 $\mathcal{R}(A) \cap \mathcal{R}(B) = \{0\}$.

(ii) 任取 $x \in \mathcal{N}(A) \cap \mathcal{N}(B)$, 则 $x \in \mathcal{N}(A)$ 且 $x \in \mathcal{N}(B)$, 于是 $Ax = 0$ 且 $Bx = 0$, 从而 $(A + B)x = 0$, 即 $x \in \mathcal{N}(A + B)$. 故 $\mathcal{N}(A) \cap \mathcal{N}(B) \subseteq \mathcal{N}(A + B)$.

任取 $y \in \mathcal{N}(A + B)$, 则 $(A + B)y = 0$, 于是 $Ay = -By$. 由(i)推出 $Ay = By = 0$, 进而 $y \in \mathcal{N}(A)$ 且 $y \in \mathcal{N}(B)$, 即 $y \in \mathcal{N}(A) \cap \mathcal{N}(B)$. 故 $\mathcal{N}(A) \cap \mathcal{N}(B) \supseteq \mathcal{N}(A + B)$.

(iii) 由(ii)推出

$$\begin{aligned} & \mathcal{N}(A) + \mathcal{N}(B) = \mathbb{F}^n \\ \Leftrightarrow & \dim(\mathcal{N}(A) + \mathcal{N}(B)) = n \\ \Leftrightarrow & \dim \mathcal{N}(A) + \dim \mathcal{N}(B) - \dim(\mathcal{N}(A) \cap \mathcal{N}(B)) = n \\ \Leftrightarrow & n - \dim \mathcal{R}(A) - \dim \mathcal{R}(B) - \dim \mathcal{N}(A + B) = 0 \\ \Leftrightarrow & \dim \mathcal{R}(A) + \dim \mathcal{R}(B) = \dim \mathcal{R}(A + B) \\ \Leftrightarrow & \text{rank}(A + B) = \text{rank}A + \text{rank}B. \end{aligned}$$

□

定理 1.2.1 设 $A, B \in \mathbb{F}^{m \times n}$, 则

$$\text{rank}(A + B) \leq \text{rank} A + \text{rank} B. \quad (1.2.2)$$

进而, 不等式(1.2.2)的等号成立的充要条件是

$$\mathcal{R}(A) \cap \mathcal{R}(B) = \{0\}, \mathcal{N}(A) + \mathcal{N}(B) = \mathbb{F}^n. \quad (1.2.3)$$

证明 由命题1.2.1知式(1.2.2)成立. 注意到命题1.2.2, 只需证: 若式(1.2.3)成立, 则 $\text{rank}(A+B) = \text{rank} A + \text{rank} B$. 使用式(1.2.1)和性质1.2.4得证. $\square$

设 $A \in \mathbb{F}^{m \times n}, B \in \mathbb{F}^{n \times p}$, 则 $AB \in \mathbb{F}^{m \times p}$, 若将 B 和 A 分别看成映射 $B: \mathbb{F}^p \rightarrow \mathbb{F}^n, A: \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^m$, 则 AB 可看成映射 $AB: \mathbb{F}^p \rightarrow \mathbb{F}^m$, 且 A 在 $\mathcal{R}(B)$ 上的限制映射为 $A|_{\mathcal{R}(B)}: \mathcal{R}(B) \rightarrow \mathbb{F}^m$, 从而

$$\begin{aligned} \dim \text{Im}(AB) &= \dim \text{Im}(A|_{\mathcal{R}(B)}) \\ &= \dim \text{Im}(B) - \dim(\text{Im}(B) \cap \ker(A)) \\ &\geq \dim \text{Im}(B) - \dim \ker(A) \\ &= \dim \text{Im}(B) - (n - \dim \text{Im}(A)) \\ &= \dim \text{Im}(B) + \dim \text{Im}(A) - n. \end{aligned}$$

由此易见下面的定理成立.

定理 1.2.2 设 $A \in \mathbb{F}^{m \times n}, B \in \mathbb{F}^{n \times p}$, 则

$$\text{rank}(AB) \geq \text{rank} A + \text{rank} B - n. \quad (1.2.4)$$

进而, 不等式(1.2.4)的等号成立的充要条件是

$$\dim(\mathcal{R}(B) \cap \mathcal{N}(A)) = \dim \mathcal{N}(A) \text{ (即 } \mathcal{N}(A) \subseteq \mathcal{R}(B) \text{)}.$$

注记 1.2.1 参考文献[1]从矩阵分解的角度给出了式(1.2.2)和(1.2.4)中等号成立的充要条件, 具体内容见3.4.

1.3 列空间与核空间的和是直和的条件

对于 $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$, 前面已经提到 $\mathcal{N}(A)$ 和 $\mathcal{R}(A)$ 均是 A 的不变子空间. 设 $x_1, x_2, \dots, x_r$ 是 $\mathcal{R}(A)$ 的基, $x_{r+1}, \dots, x_n$ 是 $\mathcal{N}(A)$ 的基. 若 $\mathcal{N}(A) \oplus \mathcal{R}(A) = \mathbb{F}^n$, 则 $x_1, x_2, \dots, x_r, x_{r+1}, \dots, x_n$ 是 $\mathbb{F}^n$ 的基, 于是

$$P^{-1}AP = \text{diag}(A_1, 0),$$

其中 $A_1 \in \mathbb{F}^{r \times r}$ 可逆, $P = [x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_n]$. 总之, 当 $\mathcal{N}(A) \oplus \mathcal{R}(A) = \mathbb{F}^n$ 时, 矩阵 A 将相似于一个形式较简单的矩阵, 这给处理问题带来很多方便. 因而我们关心 $\mathcal{N}(A) \oplus \mathcal{R}(A) = \mathbb{F}^n$ 成立的条件.

命题 1.3.1 设 $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$, 则 $\mathcal{N}(A) \oplus \mathcal{R}(A) = \mathbb{F}^n$ 的充要条件是

$$\mathcal{N}(A) + \mathcal{R}(A) = \mathbb{F}^n. \quad (1.3.1)$$

证明 必要性是显然的; 充分性由 $\dim \mathcal{N}(A) + \dim \mathcal{R}(A) = n$ 得到. $\square$

上面的命题表明要使矩阵 A 相似于一个较简单的形式, 只需式(1.3.1)成立. 然而, 下面的例子表明式(1.3.1)并不是对 $\mathbb{F}^{n \times n}$ 中的所有矩阵都成立.

例 1.3.1 记 $\mathbb{F}[x]_n$ 为 $\mathbb{F}$ 上的所有次数小于 n 的多项式和零多项式的集合. 定义从 $\mathbb{F}[x]_n$ 到 $\mathbb{F}[x]_n$ 的线性映射 $\sigma: f(x) \mapsto f'(x)$, $\forall f(x) \in \mathbb{F}[x]_n$. 取 $\mathbb{F}[x]_n$ 的基 $1, x, \frac{x^2}{2!}, \dots, \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$, 则 σ 在这组基下的矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{F}^{n \times n}.$$

易见

$$\mathcal{N}(A) = \left\{ \begin{bmatrix} x & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}^T : x \in \mathbb{F} \right\},$$

$$\mathcal{R}(A) = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_{n-1} & 0 \end{bmatrix}^T : x_i \in \mathbb{F}, i = 1, 2, \dots, n-1 \right\},$$

从而 $\mathcal{N}(A) + \mathcal{R}(A) \neq \mathbb{F}^n$.

下面的定理给出了式(1.3.1)成立的充要条件.

定理 1.3.1 设 $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$, 则下列说法等价:

- (i) $\mathcal{N}(A) \oplus \mathcal{R}(A) = \mathbb{F}^n$;
- (ii) 存在可逆阵 P 和 B 使得 $P^{-1}AP = \text{diag}(0, B)$;
- (iii) $\text{rank } A = \text{rank } A^2$;