

高等职业教育
基础类课程规划教材

新编经济应用数学

(线性代数 概率论与数理统计)

新世纪高等职业教育教材编审委员会组编 编著/贾凤亭 王景琰 于庆年

GAODENG ZHIYE JIAOYU JICHULEI
KECHENG GUIHUA JIAOCAI



F 224.0/63
高等职业教育基础类课程规划教材
GAODENGZHIYE JIAOYU JICHULEI KECHEG GUIHUAJIAOCAI

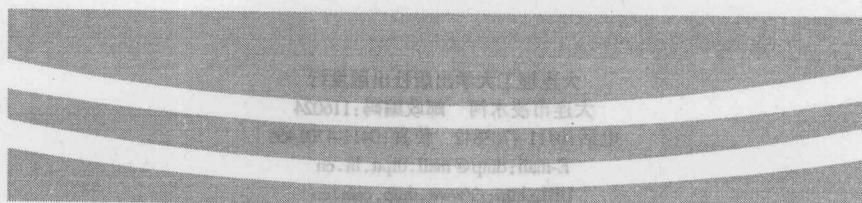
微课(CE)教材与课件图

新编经济应用数学

(线性代数 概率论与数理统计)

新世纪高等职业教育教材编审委员会组编

编著/贾凤亭 王景琰 于庆年



XINBIAN JINGJI YINGYONG SHUXUE

主编:贾凤亭 副主编:王景琰 于庆年

责任编辑:李晓东

印制:大连理工大学出版社

设计:李晓东

监制:孙立群

大连理工大学出版社
DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS

高 等 业 培 育 基 地 類 類 野 外 使 用 本



图书在版编目(CIP)数据

新编经济应用数学(线性代数 概率论与数理统计)/贾凤亭,
王景琰,于庆年编著. 一大连:大连理工大学出版社,2002.8

高等职业教育基础类课程规划教材

ISBN 7-5611-2141-5

I . 新… II . ①贾… ②王… ③于… III . 经济数学-高等学
校-教材 IV . F224.0

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 056729 号

于庆年 王景琰 贾凤亭

大连理工大学出版社出版发行
大连市凌水河 邮政编码:116024

电话:0411-4708842 传真:0411-4701466

E-mail: dutp@mail.dlptt.ln.cn

URL: http://www.dutp.com.cn

大连理工印刷有限公司印刷

开本:787 毫米×1092 毫米 1/16 字数:340 千字 印张:14.75
印数:1—5000 册

2002 年 8 月第 1 版

2002 年 8 月第 1 次印刷

责任编辑:郑淑芹

责任校对:李 红

封面设计:王福刚

定价:36.00 元(本册 18.00 元)

DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS

新世纪高等职业教育教材

主任委员：

戴克敏(大连职业技术学院院长 教授)

副主任委员(以姓氏笔画为序)：

王 敏(辽宁商务职业学院院长 教授)

王永申(盘锦职业技术学院院长)

李竹林(河北建材职业技术学院院长 副教授)

范利敏(丹东职业技术学院院长 教授)

宛 力(沈阳电力高等专科学校副校长 教授)

聂云超(渤海船舶职业学院院长 副教授)

曹勇安(黑龙江东亚学团董事长 齐齐哈尔职业学院院长 副教授)

常 信(内蒙古工业大学副校长 教授)

鞠学孟(吉林财税高等专科学校校长 教授)

会员单位(排名不分先后)：

沈阳电力高等专科学校

丹东职业技术学院

大连职业技术学院

辽宁商务职业学院

齐齐哈尔职业学院

青岛大学高等职业技术学院

烟台大学职业技术学院

广西财政高等专科学校

南昌水利水电高等专科学校

山东铝业职业技术学院

河北建材职业技术学院



教材建设指导委员会



新世纪

燕山大学继续教育学院
承德石油高等专科学校
内蒙古工业大学职业技术学院
内蒙古财经学院高职教育部
内蒙古建筑职业技术学院
呼伦贝尔学院
包头钢铁学院职业技术学院
齐齐哈尔大学职业技术学院
大庆职业技术学院
佳木斯大学职业技术学院
黑龙江省建筑职业技术学院
牡丹江大学
吉林财税高等专科学校
吉林交通职业技术学院
吉林粮食高等专科学校
吉林大学应用技术学院
四平职业大学
沈阳师范学院高等职业技术学院
鞍山钢铁学院职业技术学院
鞍山师范学院职业技术学院
本溪冶金高等专科学校
渤海船舶职业学院
朝阳师范高等专科学校
大连大学
大连轻工业学院职业技术学院
大连国际商务职业学院
大连水产学院职业技术学院
辽宁对外经贸职业学院
辽宁机电职业技术学院
东北财经大学高等职业技术学院
抚顺师范高等专科学校
抚顺石油学院高等职业技术学院
抚顺职业技术学院
阜新高等专科学校
锦州师范高等专科学校
锦州师范学院
辽宁财政高等专科学校

辽宁大学高等职业技术学院
辽宁工程技术大学技术与经济学院
辽宁工程技术大学职业技术学院
辽宁工学院职业技术学院
辽宁公安司法管理干部学院
辽宁经济管理干部学院
辽宁农业管理干部学院
辽宁农业职业技术学院
辽宁省交通高等专科学校
辽阳职业技术学院
辽阳石油化工高等专科学校
盘锦职业技术学院
沈阳大学高等职业技术学院
沈阳大学师范学院
沈阳工业大学高等职业技术学院
沈阳建工学院高等职业技术学院
沈阳农业大学高等职业技术学院
铁岭师范高等专科学校
营口高等职业学院
辽宁金融职业技术学院
沈阳建工学院职业技术学院
辽阳信息职业技术学院
辽宁中医学院职业技术学院
沈阳电视大学
沈阳医学院职业技术学院
沈阳音乐学院职业艺术学院
沈阳职工大学
大连医学院丹东分院

总序

我们已经进入了一个新的充满机遇与挑战的时代，我们已经跨入了 21 世纪的门槛。

20 世纪与 21 世纪之交的中国，高等教育体制正经历着一场缓慢而深刻的革命，我们正在对传统的普通高等教育理论教学与社会发展的现实需要不相适应的现状作历史性的反思与变革的尝试。

20 世纪最后的几年里，高等职业教育的迅速崛起，是影响高等教育体制变革的一件大事。在短短的几年时间里，普通中专教育、普通高专教育全面转轨，以高等职业教育为主导的各种形式的应用型人才培养的教育发展到与普通高等教育等量齐观的地步，其来势之迅猛，迫人深思。

无论是正在缓慢变革着的普通高等教育，还是迅速推进着的应用型人才培养的高等职业教育，都向我们提出了一个同样的严肃问题：中国的高等教育为谁服务，是为教育发展自身，还是为包括教育在内的大千社会？答案肯定而且唯一，那就是教育也置身其中的现实社会。

由此又引发出高等教育的目的问题。既然教育必须服务于社会，它就必须按照不同领域的社会需要来完成自己的教育过程。换言之，教育资源必须按照社会划分的各个专业（行业）领域（岗位群）的需要实施配置，这就是我们长期以来明乎其理而疏于力行的学以致用问题，这就是我们长期以来未能给予足够关注的教育的目的问题。

如所周知，整个社会由其发展所需要的不同部门构成，包括公共管理部门如国家机构、基础建设部门如教育研究机构和各种实业部门如工业部门、商业部门，等等。每一个部门又可作更为具体的划分，直至同它所需要的各种专门人才相对应。教育如果不能按照实际需要完成各种专门人才培养的目标，就不能很好地完成社会分工所赋予它的使命，而教育作为社会分工的一种独立存在就应受到质疑（在市场经济条件下尤其如此）。可以断言，按照社会的各种不同需要培养各种直接有用人才，是教育体制变革的终极目的。

会员委审稿待育业职
日 81 月 8 单 100

随着教育体制变革的进一步深入,高等院校的设置是否会同社会对人才类型的不同需要一一对应,我们姑且不论。但高等教育走应用型人才培养的道路和走理论型(也是一种特殊应用)人才培养的道路,学生们根据自己的偏好各取所需,始终是一个理性运行的社会状态下高等教育正常发展的途径。

高等职业教育的崛起,既是高等教育体制变革的结果,也是高等教育体制变革的一个阶段性表征。它的进一步发展,必将极大地推进中国教育体制变革的进程。作为一种应用型人才培养的教育,高等职业教育从专科层次起步,进而高职本科教育、高职硕士教育、高职博士教育……当应用型人才培养的渠道贯通之时,也许就是我们迎接中国教育体制变革的成功之日。从这一意义上说,高等职业教育的崛起,正是在为必然会取得最后成功的教育体制变革奠基。

高职教育还刚刚开始自己发展道路的探索过程,它要全面达到应用型人才培养的正常理性发展状态,直至可以和现存的(同时也正处在变革分化过程中的)理论型人才培养的教育并驾齐驱,还需假以时日;还需要政府教育主管部门的大力推进,需要人才需求市场的进一步完善发育,尤其需要高职教学单位及其直接相关部门肯于做长期的坚忍不拔的努力。新世纪高等职业教育教材编审委员会就是由北方地区近百所高职院校和出版单位组成的旨在以推动高职教材建设来推进高等职业教育这一变革过程的联盟共同体。

在宏观层面上,这个联盟始终会以推动高职教材的特色建设为己任,始终会从高职教学单位实际教学需要出发,以其对高职教育发展的前瞻性的总体把握,以其纵览全国高职教材市场需求的广阔视野,以其创新的理念与创新的组织形式,通过不断深化的教材建设过程,总结高职教学成果,探索高职教材建设规律。

在微观层面上,我们将充分依托众多高职院校联盟的互补优势和丰裕的人才资源优势,从每一个专业领域、每一种教材入手,突破传统的片面追求理论体系严整性的意识限制,努力凸现职业教育职业能力培养的本质特征,在不断构建特色教材建设体系的过程中,逐步形成自己的品牌优势。

新世纪高等职业教育教材编审委员会在推进高职教材建设事业的过程中,始终得到了各级教育主管部门(如国家教育部、辽宁省教育厅)以及各相关院校相关部门的热忱支持和积极参与,对此我们谨致深深谢意;也希望一切关注、参与职业教育发展的同道朋友,在共同推动职业教育发展、进而推动高等教育体制变革的进程中,和我们携手并肩,共同担负起这一具有开拓性挑战意义的历史重任。

新世纪高等职业教育教材编审委员会

2001年8月18日



津 贝 馆

前言



增進函示及學長時，學長歸：容內滿五林西林具。並頒走一批丁朴來美林目的育林業課
美江新學林頭大了出辦面衣合換味本相用直長林色所。學長為《學海無涯書為舟》
系朴林自又。系難互時照長食半全，始為安置好林頭。我好為陪對。我好為陪對。
(+)，林頭指林(E)，金照本基(Q)，研味看頭(I)；共數個曰民食以朴具又益善。各門課立由
在研看員中其，小志即本門學長本門大了出辦面衣合換味本相用直長林色所。限本門學長
覺一批帕祭聖學錢味林頭。聖《新編經濟應用數學》(線性代數 機率論與數理統計)
限本林本長也。大學的課程是新世紀高等職業教育教材編審委員會推出的高等職業
教育基礎類課程規劃教材之一，也是《新編經濟應用數學》
的第二分冊。

隨着數學知識在社會經濟領域的應用越來越廣泛，編寫一部專門為經濟類各專業所需要的數學教材就是很自然的事情。但遺憾的是，在過去的許多年里，人們真正為社會經濟需要，甚至真正為經濟類各專業教學需要而編寫的教材却少如鳳毛麟角。

我們通常所見到的教材基本上屬於同一模式即“普通高數知識+些許應用舉例”。人们对經濟應用數學貢獻最多的也只是表現為經濟領域對數學知識需要的範圍界定。這種做法不能說不為經濟領域或經濟類教學所需，但它始終使這樣的數學教材游離於現實的經濟實踐甚或經濟類教學過程之外，很難達到水乳交融的地步。

在市場經濟時代，伴隨著經濟全球化和由於科技進步帶來的社會經濟的飛速發展，經濟領域包括實踐領域和教學領域對數學知識的滲入要求越來越高。在這種情況下，一部真正能使數學知識與經濟內容較好融合的經濟應用數學教材就是迫切需要的了。

以培養技術應用型人才為己任的高等職業教育要求教學過程與社會實踐過程的高度符合與同一，因此，它的教材建設必須率先實現突破。儘管高職教育在我國還剛剛起步，但我們在教學過程中對經濟應用數學與應用過程脫離嚴重的現狀的認識以及高職教育工作者的職責，驅使我們試圖對這種情況做出改變。出于這樣的考慮，我們組織了編委會部分高職院校有經濟應用數學教學經驗的一線骨幹教師，在認真總結本門課程教學改革經驗的基礎上，編寫了這部《新編經濟應用數學》。

《新編經濟應用數學》在編寫過程中充分吸收了現存教材版本在知識範圍界定上的積極意義，同时也按照高等

前言

民8年2005



新世紀

职业教育的目标要求作了进一步改进。其中包括五篇内容：微分学、积分学、多元函数微分学、线性代数、概率论与数理统计，分两册出版。

《新编经济应用数学》在数学知识与经济应用的有机结合方面做出了大胆的尝试与突破。这种突破性的尝试是通过创新的结构设置完成的，全书分为既相互联系，又自成体系的五篇内容。每篇又具体划分为四个模块：(1)预备知识，(2)基本理论，(3)技能训练，(4)数学建模与应用。预备知识和基本理论两个模块是每篇教学内容的核心，其中预备知识模块是全篇知识内容的基础，基本理论模块是在预备知识的基础上对数学理论的进一步升华。这样做有利于学生加深对数学知识的理解和掌握。技能训练和数学建模与应用两个模块则旨在培养学生应用数学知识解决经济应用的实际问题的能力。也是本教材有别于其他教材的一大特色。

《新编经济应用数学》还有一个重要的特色，这就是其对教材的难易程度的把握。它充分考虑了学生数学基础参差不齐这样一个基本事实，特别设置了“预备知识”模块，使每个学生都能很容易地渡过基本理论学习的最初难关；在内容上也尽可能注重知识点的把握而少作推导论证；在表述上则尽可能采用通俗的语言，力求深入浅出，最大限度地调动学生学习的兴趣，降低教学的难度。

《新编经济应用数学》由辽宁工程技术大学技术与经济学院贾凤亭负责组织筹划。其中第一分册即微分学、积分学、多元函数微分学部分由贾凤亭、鞍山钢铁学院职业技术学院金英善编著；第二分册即线性代数、概率论与数理统计部分由贾凤亭、辽宁财政高等专科学校的王景琰、于庆年编著。各篇具体分工如下：金英善（第一篇和第三篇），贾凤亭（第二篇），王景琰（第四篇），于庆年（第五篇）。全书由贾凤亭总纂，王景琰、于庆年、金英善协助了审稿和定稿工作。

尽管我们在寻求《新编经济应用数学》教材特色建设的突破方面做出了许多努力,但不足之处恐在所难免,恳请各相关教学单位和读者在使用本教材的过程中给予关注,并将意见及时反馈我们,以便修订时改进。

编 者
2002年8月



130	率群卦爻	4.1.2
133	卦爻更重立越	2.1.2
136	卦爻互量变时频	6.1.2
140	卦爻互量变时频	7.1.2
142	量变时频卦二	8.1.2
143	卦互本基	1.2.2
143	卦互时频	1.2.2
142	卦互宝心中心卦互宝爻大	2.2.2
148	卦互卦互	3.2.2
183	卦互卦互	4.2.2
183	卦互卦互	5.2.2
184	卦互卦互	6.2.2
184	卦互卦互	7.2.2
185	卦互卦互	8.2.2
186	卦互卦互	9.2.2
187	卦互卦互	10.2.2
188	卦互卦互	11.2.2
189	卦互卦互	12.2.2
190	卦互卦互	13.2.2
191	卦互卦互	14.2.2
192	卦互卦互	15.2.2
193	卦互卦互	16.2.2
194	卦互卦互	17.2.2
195	卦互卦互	18.2.2
196	卦互卦互	19.2.2
197	卦互卦互	20.2.2
198	卦互卦互	21.2.2
199	卦互卦互	22.2.2
200	卦互卦互	23.2.2
201	卦互卦互	24.2.2
202	卦互卦互	25.2.2
203	卦互卦互	26.2.2
204	卦互卦互	27.2.2
205	卦互卦互	28.2.2
206	卦互卦互	29.2.2
207	卦互卦互	30.2.2
208	卦互卦互	31.2.2
209	卦互卦互	32.2.2
210	卦互卦互	33.2.2
211	卦互卦互	34.2.2
212	卦互卦互	35.2.2
213	卦互卦互	36.2.2
214	卦互卦互	37.2.2
215	卦互卦互	38.2.2
216	卦互卦互	39.2.2
217	卦互卦互	40.2.2
218	卦互卦互	41.2.2
219	卦互卦互	42.2.2
220	卦互卦互	43.2.2
221	卦互卦互	44.2.2
222	卦互卦互	45.2.2
223	卦互卦互	46.2.2
224	卦互卦互	47.2.2
225	卦互卦互	48.2.2
226	卦互卦互	49.2.2
227	卦互卦互	50.2.2
228	卦互卦互	51.2.2
229	卦互卦互	52.2.2
230	卦互卦互	53.2.2
231	卦互卦互	54.2.2
232	卦互卦互	55.2.2
233	卦互卦互	56.2.2
234	卦互卦互	57.2.2
235	卦互卦互	58.2.2
236	卦互卦互	59.2.2
237	卦互卦互	60.2.2
238	卦互卦互	61.2.2
239	卦互卦互	62.2.2
240	卦互卦互	63.2.2
241	卦互卦互	64.2.2
242	卦互卦互	65.2.2
243	卦互卦互	66.2.2
244	卦互卦互	67.2.2
245	卦互卦互	68.2.2
246	卦互卦互	69.2.2
247	卦互卦互	70.2.2
248	卦互卦互	71.2.2
249	卦互卦互	72.2.2
250	卦互卦互	73.2.2
251	卦互卦互	74.2.2
252	卦互卦互	75.2.2
253	卦互卦互	76.2.2
254	卦互卦互	77.2.2
255	卦互卦互	78.2.2
256	卦互卦互	79.2.2
257	卦互卦互	80.2.2
258	卦互卦互	81.2.2
259	卦互卦互	82.2.2
260	卦互卦互	83.2.2
261	卦互卦互	84.2.2
262	卦互卦互	85.2.2
263	卦互卦互	86.2.2
264	卦互卦互	87.2.2
265	卦互卦互	88.2.2
266	卦互卦互	89.2.2
267	卦互卦互	90.2.2
268	卦互卦互	91.2.2
269	卦互卦互	92.2.2
270	卦互卦互	93.2.2
271	卦互卦互	94.2.2
272	卦互卦互	95.2.2
273	卦互卦互	96.2.2
274	卦互卦互	97.2.2
275	卦互卦互	98.2.2
276	卦互卦互	99.2.2
277	卦互卦互	100.2.2
278	卦互卦互	101.2.2
279	卦互卦互	102.2.2
280	卦互卦互	103.2.2
281	卦互卦互	104.2.2
282	卦互卦互	105.2.2
283	卦互卦互	106.2.2
284	卦互卦互	107.2.2
285	卦互卦互	108.2.2

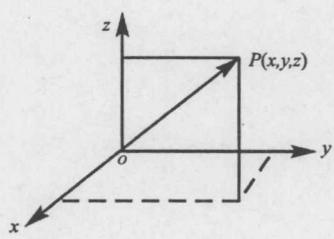
第五篇 概率论与数理统计

第一部分 预备知识	113
5.1.1 描述统计	113
5.1.2 随机事件及其概率	120
5.1.3 概率的基本性质	128

5.1.4 条件概率	130
5.1.5 独立重复试验	133
5.1.6 随机变量与概率分布	136
5.1.7 随机变量的数字特征	149
5.1.8 二维随机变量	157
第二部分 基本理论	163
5.2.1 随机抽样	163
5.2.2 大数定律与中心极限定理简述	167
5.2.3 抽样分布	168
5.2.4 参数估计	172
5.2.5 假设检验	184
5.2.6 方差分析与回归分析	189
第三部分 技能训练	202
5.3.1 典型例题分析	202
5.3.2 综合测试题	210
第四部分 数学建模与应用	213
5.4.1 经济建模与应用	213
5.4.2 其他方面建模与应用	215
附录A	217
附录B	220
附录C	221
附录D	222
附录E	223
附录F	224
附录G	225
附录H	226
附录I	227
附录J	228
附录K	229
附录L	230
附录M	231
附录N	232
附录O	233
附录P	234
附录Q	235
附录R	236
附录S	237
附录T	238
附录U	239
附录V	240
附录W	241
附录X	242
附录Y	243
附录Z	244
附录AA	245
附录BB	246
附录CC	247
附录DD	248
附录EE	249
附录FF	250
附录GG	251
附录HH	252
附录II	253
附录JJ	254
附录KK	255
附录LL	256
附录MM	257
附录NN	258
附录OO	259
附录PP	260
附录QQ	261
附录RR	262
附录TT	263
附录UU	264
附录VV	265
附录WW	266
附录XX	267
附录YY	268
附录ZZ	269
附录AA	270
附录BB	271
附录CC	272
附录DD	273
附录EE	274
附录FF	275
附录GG	276
附录HH	277
附录II	278
附录JJ	279
附录KK	280
附录LL	281
附录MM	282
附录NN	283
附录OO	284
附录PP	285
附录QQ	286
附录RR	287
附录TT	288
附录UU	289
附录VV	290
附录WW	291
附录XX	292
附录YY	293
附录ZZ	294
附录AA	295
附录BB	296
附录CC	297
附录DD	298
附录EE	299
附录FF	300
附录GG	301
附录HH	302
附录II	303
附录JJ	304
附录KK	305
附录LL	306
附录MM	307
附录NN	308
附录OO	309
附录PP	310
附录QQ	311
附录RR	312
附录TT	313
附录UU	314
附录VV	315
附录WW	316
附录XX	317
附录YY	318
附录ZZ	319
附录AA	320
附录BB	321
附录CC	322
附录DD	323
附录EE	324
附录FF	325
附录GG	326
附录HH	327
附录II	328
附录JJ	329
附录KK	330
附录LL	331
附录MM	332
附录NN	333
附录OO	334
附录PP	335
附录QQ	336
附录RR	337
附录TT	338
附录UU	339
附录VV	340
附录WW	341
附录XX	342
附录YY	343
附录ZZ	344
附录AA	345
附录BB	346
附录CC	347
附录DD	348
附录EE	349
附录FF	350
附录GG	351
附录HH	352
附录II	353
附录JJ	354
附录KK	355
附录LL	356
附录MM	357
附录NN	358
附录OO	359
附录PP	360
附录QQ	361
附录RR	362
附录TT	363
附录UU	364
附录VV	365
附录WW	366
附录XX	367
附录YY	368
附录ZZ	369
附录AA	370
附录BB	371
附录CC	372
附录DD	373
附录EE	374
附录FF	375
附录GG	376
附录HH	377
附录II	378
附录JJ	379
附录KK	380
附录LL	381
附录MM	382
附录NN	383
附录OO	384
附录PP	385
附录QQ	386
附录RR	387
附录TT	388
附录UU	389
附录VV	390
附录WW	391
附录XX	392
附录YY	393
附录ZZ	394
附录AA	395
附录BB	396
附录CC	397
附录DD	398
附录EE	399
附录FF	400
附录GG	401
附录HH	402
附录II	403
附录JJ	404
附录KK	405
附录LL	406
附录MM	407
附录NN	408
附录OO	409
附录PP	410
附录QQ	411
附录RR	412
附录TT	413
附录UU	414
附录VV	415
附录WW	416
附录XX	417
附录YY	418
附录ZZ	419
附录AA	420
附录BB	421
附录CC	422
附录DD	423
附录EE	424
附录FF	425
附录GG	426
附录HH	427
附录II	428
附录JJ	429
附录KK	430
附录LL	431
附录MM	432
附录NN	433
附录OO	434
附录PP	435
附录QQ	436
附录RR	437
附录TT	438
附录UU	439
附录VV	440
附录WW	441
附录XX	442
附录YY	443
附录ZZ	444
附录AA	445
附录BB	446
附录CC	447
附录DD	448
附录EE	449
附录FF	450
附录GG	451
附录HH	452
附录II	453
附录JJ	454
附录KK	455
附录LL	456
附录MM	457
附录NN	458
附录OO	459
附录PP	460
附录QQ	461
附录RR	462
附录TT	463
附录UU	464
附录VV	465
附录WW	466
附录XX	467
附录YY	468
附录ZZ	469
附录AA	470
附录BB	471
附录CC	472
附录DD	473
附录EE	474
附录FF	475
附录GG	476
附录HH	477
附录II	478
附录JJ	479
附录KK	480
附录LL	481
附录MM	482
附录NN	483
附录OO	484
附录PP	485
附录QQ	486
附录RR	487
附录TT	488
附录UU	489
附录VV	490
附录WW	491
附录XX	492
附录YY	493
附录ZZ	494
附录AA	495
附录BB	496
附录CC	497
附录DD	498
附录EE	499
附录FF	500
附录GG	501
附录HH	502
附录II	503
附录JJ	504
附录KK	505
附录LL	506
附录MM	507
附录NN	508
附录OO	509
附录PP	510
附录QQ	511
附录RR	512
附录TT	513
附录UU	514
附录VV	515
附录WW	516
附录XX	517
附录YY	518
附录ZZ	519
附录AA	520
附录BB	521
附录CC	522
附录DD	523
附录EE	524
附录FF	525
附录GG	526
附录HH	527
附录II	528
附录JJ	529
附录KK	530
附录LL	531
附录MM	532
附录NN	533
附录OO	534
附录PP	535
附录QQ	536
附录RR	537
附录TT	538
附录UU	539
附录VV	540
附录WW	541
附录XX	542
附录YY	543
附录ZZ	544
附录AA	545
附录BB	546
附录CC	547
附录DD	548
附录EE	549
附录FF	550
附录GG	551
附录HH	552
附录II	553
附录JJ	554
附录KK	555
附录LL	556
附录MM	557
附录NN	558
附录OO	559
附录PP	560
附录QQ	561
附录RR	562
附录TT	563
附录UU	564
附录VV	565
附录WW	566
附录XX	567
附录YY	568
附录ZZ	569
附录AA	570
附录BB	571
附录CC	572
附录DD	573
附录EE	574
附录FF	575
附录GG	576
附录HH	577
附录II	578
附录JJ	579
附录KK	580
附录LL	581
附录MM	582
附录NN	583
附录OO	584
附录PP	585
附录QQ	586
附录RR	587
附录TT	588
附录UU	589
附录VV	590
附录WW	591
附录XX	592
附录YY	593
附录ZZ	594
附录AA	595
附录BB	596
附录CC	597
附录DD	598
附录EE	599
附录FF	600
附录GG	601
附录HH	602
附录II	603
附录JJ	604
附录KK	605
附录LL	606
附录MM	607
附录NN	608
附录OO	609
附录PP	610
附录QQ	611
附录RR	612
附录TT	613
附录UU	614
附录VV	615
附录WW	616
附录XX	617
附录YY	618
附录ZZ	619
附录AA	620
附录BB	621
附录CC	622
附录DD	623
附录EE	624
附录FF	625
附录GG	626
附录HH	627
附录II	628
附录JJ	629
附录KK	630
附录LL	631
附录MM	632
附录NN	633
附录OO	634
附录PP	635
附录QQ	636
附录RR	637
附录TT	638
附录UU	639
附录VV	640
附录WW	641
附录XX	642
附录YY	643
附录ZZ	644
附录AA	645
附录BB	646
附录CC	647
附录DD	648
附录EE	649
附录FF	650
附录GG	651
附录HH	652
附录II	653
附录JJ	654
附录KK	655
附录LL	656
附录MM	657
附录NN	658
附录OO	659
附录PP	660
附录QQ	661
附录RR	662
附录TT	663
附录UU	664
附录VV	665
附录WW	666
附录XX	667
附录YY	668
附录ZZ	669
附录AA	670
附录BB	671
附录CC	672
附录DD	673
附录EE	674
附录FF	675
附录GG	676
附录HH	677
附录II	678
附录JJ	679
附录KK	680
附录LL	681
附录MM	682
附录NN	683
附录OO	684
附录PP	685
附录QQ	686
附录RR	687
附录TT	688
附录UU	689
附录VV	690
附录WW	691
附录XX	692
附录YY	693
附录ZZ	694
附录AA	695
附录BB	696
附录CC	697
附录DD	698
附录EE	699
附录FF	700
附录GG	701
附录HH	702
附录II	703
附录JJ	704
附录KK	705
附录LL	706
附录MM	707
附录NN	708
附录OO	709
附录PP	710
附录QQ	711
附录RR	712
附录TT	713
附录UU	714
附录VV	715
附录WW	716
附录XX	717
附录YY	718
附录ZZ	719
附录AA	720
附录BB	721
附录CC	722
附录DD	723
附录EE	724
附录FF	725
附录GG	726
附录HH	727
附录II	728
附录JJ	729
附录KK	730
附录LL	731
附录MM	732
附录NN	733
附录OO	734
附录PP	735
附录QQ	736
附录RR	737
附录TT	738
附录UU	739
附录VV	740
附录WW	741
附录XX	742
附录YY	743
附录ZZ	744
附录AA	745
附录BB	746
附录CC	747
附录DD	748
附录EE	749
附录FF	750
附录GG	751
附录HH	752
附录II	753
附录JJ	754
附录KK	755
附录LL	756
附录MM	757
附录NN	758
附录OO	759
附录PP	760
附录QQ	761
附录RR	762
附录TT	763
附录UU	764
附录VV	765
附录WW	766
附录XX	767
附录YY	768
附录ZZ	769
附录AA	770
附录BB	771
附录CC	772
附录DD	773
附录EE	774
附录FF	775
附录GG	776
附录HH	777
附录II	778
附录JJ	779
附录KK	780
附录LL	78

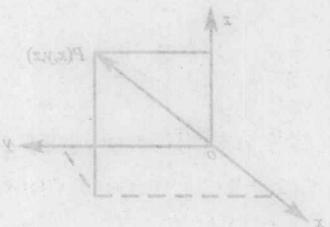
第四篇

线性代数



第四葉

幾何圖形



第一部分

。相同 (ε) 矩阵式已 (a) 里野式

育土急

义宝

。里野

预备知识

(1)

本篇线性代数的主要内容是研究线性方程组的解, 其主要手段是矩阵的初等变换, 应用的重要工具是矩阵。为此, 就需掌握行列式的概念及其有关的运算。

4.1.1 同解方程组

1. 同解方程式

二元一次方程

$$a_1x_1 + a_2x_2 = b_1 \quad (1)$$

$$c(a_1x_1 + a_2x_2) = cb_1 \quad (c \neq 0 \text{ 的实数}) \quad (2)$$

方程(2) 和方程(1) 为同解方程式。

2. 同解方程组

三元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \quad (4)$$

线性方程组(4) 与线性方程组(3) 同解。

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ ca_{21}x_1 + ca_{22}x_2 + ca_{23}x_3 = cb_2 \quad (c \neq 0 \text{ 的实数}) \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \quad (5)$$

线性方程组(5) 与线性方程组(3) 同解。

$$\begin{cases} (a_{11}x_1 + ca_{21}x_1) + (a_{12}x_2 + ca_{22}x_2) + (a_{13}x_3 + ca_{23}x_3) = b_1 + cb_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \quad (6)$$

$(c \neq 0 \text{ 的实数})$

方程组(6)与方程组(3)同解。

综上有

定义 1 一个线性方程组,若将该方程组中的方程式次序互换、某方程式乘以非零实数、某方程式乘以非零实数再加到另一方程式上所构成的新方程组与原方程组为同解方程组。

4.1.2 二元、三元一次方程组

1. 二元一次方程组

应用同解方程组的概念和理论求解方程组(7)。将方程组(7)中的①式 $\times a_{22}$ + ②式 $\times (-a_{12})$, 得

$$a_{11}a_{22}x_1 - a_{12}a_{21}x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12}$$

整理得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12}$$

若 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$

$$(1) \quad x_1^0 = \frac{b_1 a_{22} - b_2 a_{12}}{a_{11} a_{22} - (a_{12} a_{21})}, \quad (2)$$

同理可得

$$x_2 = \frac{b_2 a_{11} - b_1 a_{21}}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}$$

2. 三元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

若 $a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \neq 0$, 应用上面的方法可得

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = \frac{b_1 a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} b_3 + a_{13} b_2 a_{32} - a_{13} a_{22} b_3 - a_{12} b_2 a_{23} - b_1 a_{23} a_{32}}{a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32} - a_{13} a_{22} a_{31} - a_{12} a_{21} a_{33} - a_{11} a_{23} a_{32}} \\ x_2 = \frac{a_{11} b_2 a_{33} + b_1 a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} b_3 - a_{13} b_2 a_{31} - b_1 a_{21} a_{23} - a_{11} a_{23} b_3}{a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32} - a_{13} a_{22} a_{31} - a_{12} a_{21} a_{33} - a_{11} a_{23} a_{32}} \\ x_3 = \frac{a_{11} a_{22} b_3 + a_{12} b_2 a_{31} + b_1 a_{21} a_{32} - b_1 a_{22} a_{31} - a_{12} a_{21} b_3 - a_{12} b_2 a_{32}}{a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32} - a_{13} a_{22} a_{31} - a_{12} a_{21} a_{33} - a_{11} a_{23} a_{32}} \end{array} \right.$$

4.1.3 n 阶行列式

为了解线性方程组 引进 n 阶行列式的概念

1. 二阶行列式

定义 1 式子 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 表示代数和 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$, 称为二阶行列式。我们可用

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

来表示。

式子 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 中, 横排称为行, 它有两行; 纵排称为列, 它有两列。二阶行列式是由 4 个元素 $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$, 排成两行、两列构成的。每一个元素都有两个下标, 前一个下标表示该元素所在的行, 后一个下标表示元素所在的列。从左上角到右下角称为主角线, 从右上角到左下角称为副对角线, 主对角线两个元素乘积为正, 副对角线两个元素乘积为负, 即 $a_{11}a_{22}$ 为正, $a_{12}a_{21}$ 为负。它由两项组成, 正负各半。

【例 1】 解二元线性方程组 $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 5 \\ x_1 - 4x_2 = -3 \end{cases}$

解 因为 $D = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = -14 \neq 0, D_1 = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -3 & -4 \end{vmatrix} = -14$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -14;$$

所以, $x_1 = \frac{D_1}{D} = 1, x_2 = \frac{D_2}{D} = 1$ 。

2. 三阶行列式

由二阶行列式的定义, 便可得出:

定义 2 式子 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ 表示代数和 $a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33}$, 称为三阶行列式, 一般常用 D 表示, 即

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} = -a_{13}a_{22}a_{31}$$

三阶行列式由三行三列 9 个元素组成, 它表示的是 $3! = 6$ 项的代数和, 其正负各半, 每一项都取自不同行不同列的 3 个元素的乘积。

三阶行列式表示的代数和可采用对角线法则来记忆, 如图 4-1 所示, 实连线三个元素之积为正, 虚连线三个元素之积为负。

【例 2】 计算三阶行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & -7 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$ 的值。

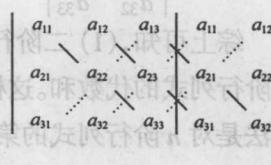


图 4-1

$$\text{解 } \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & -7 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \times (-7) \times (-1) + 2 \times 0 \times 2 + 3 \times (-3) \times 1 - 2 \times (-7) \times 1 - (-3) \times 0 \times 1 - 2 \times 3 \times (-1) = 18$$

3. n 阶行列式

由二、三阶行列式的概念,下面给出 n 阶行列式的定义。

定义 3 记

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

为 n 阶行列式。

它由 n 行 n 列共 n^2 个元素组成。它表示 $n!$ 项的代数和,其正、负各半,每一项皆由不同行不同列的 n 个元素的乘积组成。

2 中介绍的对角线法则,仅适用于三阶行列式,对三阶以上的行列式不适用。

如何计算 n 阶行列式呢?我们将采用递推方法来求解 n 阶行列式。

当 $n = 1$ 时

$$|a| = a \quad D = \frac{a}{D} = \frac{a}{a} = \frac{a}{D} = a$$

当 $n = 2$ 时

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = a_{11} |a_{22}| - a_{12} |a_{21}|$$

当 $n = 3$ 时

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} \\ & = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \\ & = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

综上可知,(1) 二阶行列式可化成两个一阶行列式的代数和;三阶行列式可化成三个二阶行列式的代数和。这样,一个 n 阶行列式可化成 n 个 $n-1$ 阶行列式的代数和。上述的方法是对 n 阶行列式的第 1 行进行处理(对于第 1 列,也有类似的结论),所谓的 $n-1$ 阶行列式,是划去第 1 行中的元素所在的第 1 行和所在的列余下的元素按原顺序构成的行列式。(2) 其符号,由第 1 行中元素的双下标,即 $(-1)^{i+j}$ 来决定。