远程职业教育系列教材

SHUXUE

数学

（上）

主编 张进军 副主编 张安

中央廣播电視大學出版社

远程职业教育系列教材

数　　学

（上）

主　编　张进军

副主编　黄　安

中央广播电视大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学.上/张进军主编.—北京:中央广播电视大学出版社,2004.8

(远程职业教育系列教材)

ISBN 7-304-02751-7

Ⅰ.数…　Ⅱ.张…　Ⅲ.高等数学—电视大学—教材　Ⅳ.O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 083011 号

远程职业教育系列教材

数　学(上)

主　编　张进军

副主编　张　安

出版·发行:中央广播电视大学出版社

电话:发行部:010-68519502　**总编室**:010-68182524

网址:http://www.crtvup.com.cn

地址:北京市海淀区西四环中路45号

邮编:100039

经销:新华书店北京发行所

策划编辑:何勇军　　**责任编辑**:吴国艳

印刷:北京云浩印刷有限责任公司　　**印数**:16001~27000

版本:2004年8月第1版　　2005年8月第3次印刷

开本:B5　　**印张**:17.5　　**字数**:314千字

书号:ISBN 7-304-02751-7/O·139

定价:24.00元

(如有缺页或倒装,本社负责退换)

编 写 说 明

本教材是根据中央广播电视大学2003年11月审定通过的《数学课程教学大纲》和《数学多种媒体一体化方案》、并参考2000年教育部颁发的《中等职业学校数学教学大纲(试行)》,在有关部门的大力协助和关心指导下编写而成的。

根据中央广播电视中等专业学校的特点和面向二十一世纪对数学课程教学改革的需要,体现以人为本的教育理念,按照“必需、够用”的基本原则,本教材力求体现以下几个特点:

(1)基础性:本教材在选材上精选了在现代社会生活中已得到广泛应用、并有利于学生进一步学习的数学基础知识作为必学内容,同时注意渗透“大众数学”的观念,保证学生的基本数学素质,以最浅显的知识内容贯彻现代数学的观点和方法,重在基础、利在发展。

(2)针对性:本教材针对学员起点低、差异大、分布广等特点,密切注意了与初中数学知识的衔接,尊重学生的认知规律;每个教学章节都从实际生活的实例提出具体问题,先使学生感到兴趣,从而做到循序渐进、深入浅出。本教材充分照顾学生的特点,从例题的分析解答,到练习、习题的配置尽量做到由浅入深,适合于学生自学。

(3)实用性:本教材是在尊重数学学科的科学体系的前提下,不拘泥于学科体系的束缚,淡化了部分理论的推演,尽量借助于事实、图形、实例等手段对理论进行阐述、解释,使抽象问题具体化、形象化。在教材的编写上注意渗透“问题解决”的意识和思想,以达到贯彻“实用”的目标,从而培养学生分析问题、解决问题的能力。

本套教材分为上、下两册出版,内容分别为:

上册:集合与逻辑用语、不等式、函数、指数函数与对数函数、三角函数、数列。

下册:排列与组合、二项式定理、向量、直线与方程、二次曲线与方程、立体几何、复数。

本套教材配有教学录像、IP课件等音像教材，并同步发行，供各地学生根据条件选用，也可作为当地电视中专辅导使用。

本套教材由张进军（北京二轻工业学校高级讲师）任主编，张安（北京市汽车工业学校高级讲师）任副主编，参加编写的还有周永胜（中央电大助理研究员）、赵坚（中央电大副教授）。全书由张进军统稿、定稿。

本套教材的主审为陈柏林（北京市汽车工业学校高级讲师），参加审稿会的还有陆长铮（北京轻工职业技术学院高级讲师），刘其隆（北京电大副教授）。

本套教材在编写过程中，得到了中央广播电视大学校领导、老师和工作人员的热情关怀，得到了北京市教育委员会职成处、北京二轻工业学校、北京市汽车工业学校等单位的大力支持和帮助，在此一并表示诚挚的感谢。

在本套教材的编写过程中，虽然编者几易其稿，但由于编者水平有限，而且在新的形势下，数学教学改革中的许多问题还处在探索之中，因此，书中不免会有不当与疏漏之处，敬请广大读者和使用本套教材的单位和个人批评指正。

编　者

2004年4月

目　　录

第 1 章　集合与逻辑用语

某居民区征订日报和晚报，已知订了日报的有 136 户，订了晚报的有 57 户，你是否认为该地区至少订其中一种报纸的户数为 193 户呢？如果你这样想，那就大错特错了．事实上，该地区两报都订的有 32 户，因此，该地区至少订其中一种报纸的户数应该为 $193-32=161$．

“9 是 3 的倍数或 9 是质数”这句话正确吗？怎样正确理解这句话呢？

“a,b 不都为零”又是什么意思呢？

要准确回答上面问题，就要学习集合与逻辑用语的一些知识，本章将先研究集合的概念，学习一些常用的逻辑用语，这些知识是我们今后学习数学的基础．

在本章我们将学习：

1.1　集合的概念

1.2　集合的运算

1.3　逻辑用语

1.1 集合的概念

学习目标

理解集合、元素和空集的概念，掌握元素与集合、集合与集合之间的关系；掌握常用数集的符号及其之间的关系；掌握集合的两种表示方法.

1.1.1 集合与元素

“集合”这个词我们在初中数学中曾经遇到过，例如“整数集合”、“实数集合”等等．我们还知道不等式

$$x+3>5$$

的解集是适合 $x>2$ 的所有实数，并且把所有这些实数作为一个整体，叫做这个不等式的“**解的集合**”，简称“**解集**”.

一般地，我们把一些确定的对象组成的整体叫做**集合**，简称**集**，组成集合的每个对象叫做这个集合的**元素**．例如：

(1) 某职业学校的全体学生组成一个集合，其中每一个学生都是这个集合的元素；

(2) 某图书馆的全部藏书组成一个集合，其中每一本书都是这个集合的元素；

(3) 某企业本年度的所有产品组成一个集合，其中每件产品都是这个集合的元素；

(4) 数 1,3,5,7,9 组成一个集合，其中每个数都是这个集合的元素；

(5) 直线 $y=x$ 上的所有点组成一个集合，其中每个点都是这个集合的元素.

通常用大写字母 $A,B,C\cdots$ 表示集合，小写字母 $a,b,c\cdots$ 表示集合的元素．如果 a 是集合 A 的元素，就说“a 属于 A”，记作 $a\in A$；如果 b 不是集合 A 的元素，就说“b 不属于 A”，记作 $b\notin A$（或 $b\overline{\in} A$）.

由数组成的集合叫做**数集**．下面是常见的数集以及它们的记号：

全体非负整数组成的集合叫做**自然数集**，记作 **N**；

全体正整数组成的集合叫做**正整数集**,记作 $\mathbf{N}^*$ 或 $\mathbf{N}_+$;

全体整数组成的集合叫做**整数集**,记作 $\mathbf{Z}$;

全体有理数组成的集合叫做**有理数集**,记作 $\mathbf{Q}$;

全体实数组成的集合叫做**实数集**,记作 $\mathbf{R}$.

如果一个集合含有有限个元素,这个集合叫做**有限集**;如果一个集合含有无限多个元素,这个集合叫做**无限集**. 例如上面的例子中(1)(2)(3)(4)是有限集;(5)是无限集,数集 $\mathbf{N},\mathbf{Z},\mathbf{Q},\mathbf{R}$ 都是无限集.

不含有任何元素的集合叫做**空集**,记作 $\varnothing$. 例如方程 $x^2+1=0$ 的所有实数解组成的集合就是空集,因为方程 $x^2+1=0$ 在实数范围内没有解,说明方程的解集中没有任何元素.

集合中的元素具有确定性,这就是说,一个对象是不是这个集合的元素,是可以判定的.

例如对于自然数集 $\mathbf{N}$,显然 0,1,2 是它的元素,即 $0\in\mathbf{N},1\in\mathbf{N},2\in\mathbf{N}$;而$\frac{1}{2}$,$\sqrt{3}$,$\pi$ 不是它的元素,即$\frac{1}{2}\notin\mathbf{N},\sqrt{3}\notin\mathbf{N},\pi\notin\mathbf{N}$. 又如对于有理数集 $\mathbf{Q}$,显然$\frac{1}{2}\in\mathbf{Q}$,$\sqrt{3}\notin\mathbf{Q}$. 而"图书馆里所有好看的书"就不能组成一个集合,因为某本书是否"好看",标准是不确定的.

例 1 下列各题中所给定的每组对象是否能构成集合?

(1) 好看的电影;

(2) 不等式 $x-3<5$ 的解;

(3) 直线 $y=x+2$ 上的点.

解 (1)不能构成集合. 因为没有确切的标准判定一部电影是否好看;

(2)能构成集合. 因为一个数 a 是否是不等式 $x-3<5$ 的解是可以确定的;

(3)能构成集合. 因为一个点是否在直线 $y=x+2$ 上是可以确定的.

例 2 判断数$0,-4,-\frac{1}{3},\sqrt{2}$,分别属于集合 $\mathbf{N},\mathbf{Z},\mathbf{Q},\mathbf{R}$ 中的哪个集合?

解 $0\in\mathbf{N}$,$0\in\mathbf{Z}$,$0\in\mathbf{Q}$,$0\in\mathbf{R}$; $-4\in\mathbf{Z}$, $-4\in\mathbf{Q}$, $-4\in\mathbf{R}$;

$-\frac{1}{3}\in\mathbf{Q}$, $-\frac{1}{3}\in\mathbf{R}$;$\sqrt{2}\in\mathbf{R}$.

? 思考题 1.1

你能分别举出一个有限集和无限集的例子吗?

1.1.2 集合的表示法

集合一般有以下两种表示法:列举法和描述法.

1. 列举法

把集合的元素一一列举出来,写在大括号{ }内,这种表示集合的方法叫做**列举法**.

例如,由2,4,6,8,10这5个数构成的集合,可以表示为$\{2,4,6,8,10\}$;

由大于-3小于5的所有整数构成的集合可以表示为$\{-2,-1,0,1,2,3,4\}$;

方程$x+7=0$的解构成的集合,可以表示为$\{-7\}$.

集合$\{-7\}$是由一个元素构成的集合.只含有一个元素的集合叫做**单元素集**.应该注意元素a与单元素集$\{a\}$是不同的,空集$\varnothing$与单元素集$\{0\}$也是不同的.

为了直观起见,我们通常用用平面内一条封闭的曲线表示一个集合,用封闭曲线中的点表示集合中的元素.图1-1表示集合$\{1,3,5,7\}$.

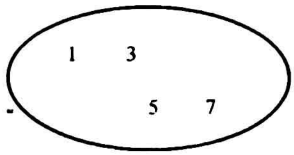

图1-1

2. 描述法

把集合中所有元素具有的共同性质描述出来,写在大括号{ }内,这种表示集合的方法叫做**描述法**.具体写法是:在大括号{ }里先写上这个集合中元素的一般形式,再画一条竖线,在竖线右边写上这个集合中所有元素的共同性质.

例如,方程$x^2-2x-15=0$的解集用描述法可表示为$\{x\mid x^2-2x-15=0\}$;

不等式$x-3>0$的解集用描述法可表示为$\{x\mid x-3>0\}$或$\{x\mid x>3\}$;

函数$y=x^2$图像上所有点的集合可表示为$\{(x,y)\mid y=x^2\}$.

又如,所有正偶数构成的集合可表示为$\{x\mid x=2n,n\in\mathbf{N}^*\}$;

所有正奇数构成的集合表示为$\{x\mid x=2n+1,n\in\mathbf{N}\}$.

有些集合用描述法表示时可以省去竖线及其左边的部分,例如,所有正方形构成的集合可记作{正方形}.

思考题1.2

你能举出一个空集的例子,并用适当的方法来表示吗?

1.1.3 集合之间的关系

1. 集合的包含关系

我们来观察两个集合 $A=\{2,6,8\}$ 与 $B=\{2,4,6,8,10\}$，发现集合 A 中任何一个元素都是集合 B 的元素．对于集合之间的这种关系，给出以下定义．

定义 1.1 设两个集合 A 和 B，如果 A 的任何一个元素都是 B 的元素，那么称集合 A 叫做集合 B 的**子集**，记作

$$A\subseteq B \text{ 或 } B\supseteq A$$

读作"A 包含于 B"或"B 包含 A"．

根据定义知道，数集 $\mathbf{N}\subseteq\mathbf{Z}$，$\mathbf{Z}\subseteq\mathbf{Q}$，$\mathbf{Q}\subseteq\mathbf{R}$．

对于任何一个非空集合 A，因为它的每个元素都属于 A，根据子集的定义可知，**A 是 A 本身的子集**，即 $A\subseteq A$；此外，由于空集是不含任何元素的集合，所以我们规定**空集是任何集合的子集**，即 $\varnothing\subseteq A$．

如果集合 A 中至少有一个元素不属于集合 B，那么集合 A 不是集合 B 的子集，记作

$$A\not\subseteq B(\text{或 } B\not\supseteq A)$$

读作"集合 A 不包含于 B"或"集合 B 不包含 A"．例如，$\{a,c\}\not\subseteq\{a,b,d\}$．

例 3 在下面两个集合之间填写$\subseteq$或$\supseteq$．

(1) $\{0,1,3,\}$与$\{0,1,2,3,5\}$ ；

(2) {整数} 与 {奇数}．

解 (1) $\{0,1,3\}\subseteq\{0,1,2,3,5\}$；

(2) {整数}$\supseteq${奇数}．

定义 1.2 如果集合 $A\subseteq B$，并且集合 B 中至少有一个元素不属于 A，那么集合 A 叫做集合 B 的**真子集**，记作

$$A\subsetneqq B(\text{或 } B\supsetneqq A)$$

例如上述例 3 中 $\{0,1,3\}$ 不仅是 $\{0,1,2,3,5\}$ 的子集，而且还是真子集，即 $\{0,1,3\}\subsetneqq\{0,1,2,3,5\}$；又如，自然数集 $\mathbf{N}$ 是整数集 $\mathbf{Z}$ 的真子集；有理数集 $\mathbf{Q}$ 是实数集 $\mathbf{R}$ 的真子集，可分别记作 $\mathbf{N}\subsetneqq\mathbf{Z}$，$\mathbf{Q}\subsetneqq\mathbf{R}$．图 1－2 比较直观地表示了集合 A 是集合 B 的真子集．

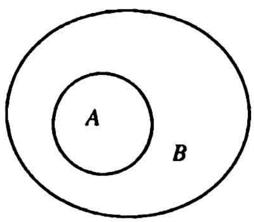

图 1－2

另外由定义可知，**空集是任何非空集合的真子集**，即 $\varnothing\subsetneqq A$（A 是非空集合）．

例 4 写出集合$\{0,1,2\}$的所有子集，并指出其真子集.

解 集合$\{0,1,2\}$的子集有：

$$\varnothing,\ \{0\},\ \{1\},\ \{2\},\ \{0,\ 1\},\ \{0,\ 2\},\ \{1,\ 2\},\ \{0,\ 1,\ 2\}.$$

其中除$\{0,1,2\}$外都是$\{0,1,2\}$的真子集.

2. 集合的相等关系

我们来看集合$\{x\mid x^2-4=0\}$与集合$\{-2,2\}$，显然这两个集合的元素是完全相同的，只是表示方法不同，这时，我们就说这两个集合相等.

定义 1.3 如果集合 A 与集合 B 的元素完全相同，那么称集合 A 与集合 B 相等，记作 $A=B$.

根据定义，集合$\{x\mid x^2-4=0\}$与$\{-2,2\}$是相等的，即$\{x\mid x^2-4=0\}=\{-2,2\}$.

例 5 说出集合 $A=\{x\mid x^2-2x-3=0\}$与集合 $B=\{-1,3\}$之间的关系.

解 因为集合 $A=\{x\mid x^2-2x-3=0\}=\{-1,3\}$，集合 $B=\{-1,3\}$，所以 $A=B$.

? 思考题 1.3

已知 $A=\{x\mid x=2n,\ n\in\mathbf{Z}\}$，$B=\{x\mid x=4n,\ n\in\mathbf{Z}\}$，你知道集合 A 与 B 的关系吗？

关键词：集合　元素　空集　数集　子集　真子集　集合的相等

练　习　1.1

A　组

1. 判断题：

(1) 下列各组对象分别组成了集合：

① 所有漂亮的衣服　(　　)

② 方程 $x^2+1=0$ 在实数范围内的解　(　　)

③ 不等式 $2x-5>0$ 所有的解　(　　)

(2) $0\in\varnothing$　(　　)

(3) $0\in\{0\}$　(　　)

(4) $\varnothing\in\{0\}$　(　　)

2. 用列举法表示下列集合：

(1) {平方后等于 4 的数}；

(2) {平方后仍等于原数的数};

(3) {一年中有31天的月份};

(4) $\{x \mid x^2+x=0\}$;

(5) $\{x \mid -5<x<3, x\in \mathbf{Z}\}$.

3. 用描述法表示下列集合,并说明它是有限集还是无限集:

(1) 大于10的全体实数构成的集合;

(2) 方程 $x^2-3x-28=0$ 的解集合;

(3) 函数 $y=x-1$ 图像上所有的点构成的集合;

(4) 全体三角形构成的集合.

4. 用适当的符号($\in, \notin, \subsetneqq, =, \supsetneqq$)填空:

(1) c ____ $\{c,d\}$; (2) $\{c\}$ ____ $\{c,d\}$;

(3) $\{a,b\}$ ____ $\{b,a\}$; (4) $\{-1,0,1,2\}$ ____ $\{0,-1\}$;

(5) $\varnothing$ ____ $\{x \mid x^2+2=0\}$; (6) $\varnothing$ ____ $\{x \mid x^2-2=0\}$;

(7) 0 ____ $\varnothing$; (8) $\{x \mid x^2-5x+6=0\}$ ____ $\{2,3\}$.

5. 写出集合 $A=\{a,b,c\}$ 的所有子集,并指出其真子集.

B 组

1. 用适当的方法表示下列集合:

(1) 绝对值等于3的全体实数构成的集合;

(2) 所有大于0小于4的实数构成的集合;

(3) 所有正奇数构成的集合;

(4) 抛物线 $y=x^2+5x+6$ 上所有的点构成的集合.

2. 用适当的符号($\in, \notin, \subsetneqq, \supsetneqq$)填空:

(1) -2 ____ $\{x \mid x=2n, n\in \mathbf{N}\}$;

(2) -1 ____ $\{x \mid -2<x<3, x\in \mathbf{Z}\}$;

(3) $\dfrac{3}{2}$ ____ $\{x \mid 0<x<6, x\in \mathbf{N}\}$;

(4) $(1,3)$ ____ $\{(x,y) \mid y=x+2\}$;

(5) $\{0\}$ ____ $\varnothing$;

(6) $\{x \mid x>7\}$ ____ $\{x \mid x>3\}$;

(7) {四边形} ____ {平行四边形};

(8) $\{x \mid x$ 是能被3整除的数$\}$ ____ $\{x \mid x$ 是能被6整除的数$\}$.

1.2 集合的运算

学习目标

理解交集、并集的概念、全集与补集的关系；掌握交集、并集及补集的运算.

1.2.1 交　集

观察集合 $A=\{1,2,3,6\}$，$B=\{3,4,5,6\}$，$C=\{3,6\}$，可以看出集合 C 是由所有既属于 A 也属于 B 的元素组成的，对于这样的集合给出定义 1.4：

定义 1.4　由所有既属于集合 A 也属于集合 B 的元素组成的集合叫做集合 A 与集合 B 的**交集**，记作 $A\cap B$，读作"A 交 B".

$$A\cap B=\{x \mid x\in A \text{ 且 } x\in B\}$$

根据定义，$\{1,2,3,6\}\cap\{3,4,5,6\}=\{3,6\}$.

图 1－3 的阴影部分表示 A 与 B 的交集 $A\cap B$，其中(2)是 $A\cap B=\varnothing$ 的情况. 由交集定义可以得出，对任何集合 A 与 B，都有下述关系成立：

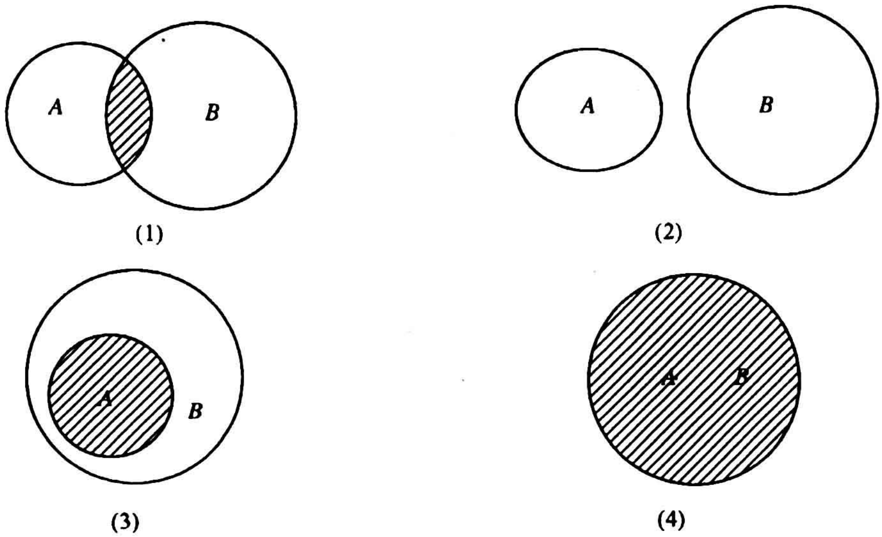

图 1－3

$A \supseteq A \cap B, B \supseteq A \cap B$，且 $A \cap A = A, A \cap \varnothing = \varnothing, A \cap B = B \cap A$.

例 1 根据下面给出的集合 A,B,C,求 $A \cap B,(A \cap B) \cap C$.

(1) $A = \{1,2\}$，$B = \{-1,0,1\}$，$C = \{-2,0,1,2\}$；

(2) $A = \{x \mid x > 2\}$，$B = \{x \mid x > -1\}$，$C = \{x \mid x \leqslant 4\}$.

解 (1) $A \cap B = \{1,2\} \cap \{-1,0,1\} = \{1\}$，$(A \cap B) \cap C = \{1\} \cap \{-2,0,1,2\} = \{1\}$；

(2) 如图 1-4 所示:$A \cap B = \{x \mid x > 2\} \cap \{x \mid x > -1\} = \{x \mid x > 2\}$.

如图 1-5 所示:$(A \cap B) \cap C = \{x \mid x > 2\} \cap \{x \mid x \leqslant 4\} = \{x \mid 2 < x \leqslant 4\}$,(空心点表示不包括 $x = 2$,实心点表示包括 $x = 4$).

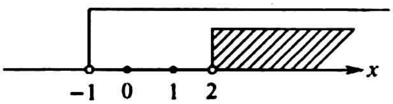

图 1-4

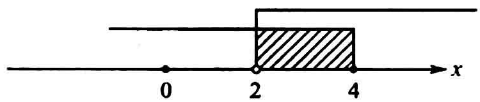

图 1-5

例 2 已知集合 $A = \{(x,y) \mid x + 3y = 1\}, B = \{x \mid x + y = -1\}$,求 $A \cap B$.

解 因为集合 A 是由直线 $x + 3y = 1$ 上的所有点组成的,集合 B 是由直线 $x + y = -1$ 上的所有点组成的,由定义可知集合 $A \cap B$ 是由既在直线 $x + 3y = 1$ 上,又在直线 $x + y = -1$ 上的点组成的.

解方程组 $\begin{cases} x + 3y = 1 \\ x + y = -1 \end{cases}$,得:$\begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \end{cases}$

所以,$A \cap B = \{(-2,1)\}$.

思考题 1.4

已知集合 A 满足 $A \cap \{0,1\} = \{1\}$，$A \cap \{2,3\} = \{3\}$,且 $A \subsetneqq \{1,3,4\}$,你能找到满足条件的集合 A 吗?

1.2.2 并　　集

观察集合 $A = \{-2,-1,0,1,2,\}, B = \{0,1,2,3\}, C = \{-2,-1,0,1,2,3\}$,可以看出集合 C 是由所有属于 A 的或属于 B 的元素合在一起组成的集合,对于这样的集合,给出如下的定义:

定义 1.5 由所有属于集合 A 或属于集合 B 的元素所组成的集合叫做集合 A 与集合 B 的**并集**,记作"$A \cup B$",读作"A 并 B".

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\}$$

根据定义，$\{-2,-1,0,1,2\} \cup \{0,1,2,3\} = \{-2,-1,0,1,2,3\}$.

注意，相同的元素只能出现一次，上面的并集不能写成$\{-2,-1,0,0,1,1,2,2,3\}$.

图1-6的阴影部分表示集合A与集合B的并集，其中：(1)为A,B有公共元素时；(2)为A,B为无公共元素时($A \cap B = \varnothing$)；(3)为$A \subsetneqq B$时；(4)为$A=B$时的情况.

由并集的定义可以得出，对于任何集合A与B，都有下述关系成立：

$$A \subseteq A \cup B,\ B \subseteq A \cup B,\text{且 } A \cup A = A,\ A \cup \varnothing = A,\ A \cup B = B \cup A$$

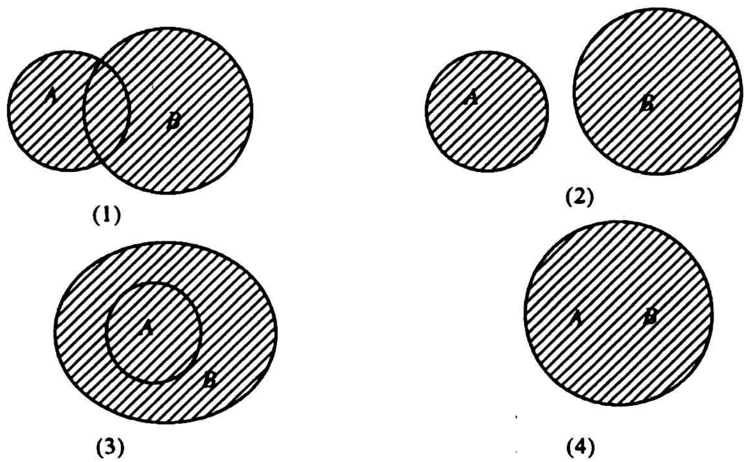

图1-6

例3 根据下面给出的集合A,B,C，求$(A \cup B) \cup C$，$(A \cup B) \cap C$.

(1) $A = \{-1,1\}$，$B = \{1,2,3\}$，$C = \{0,2,4\}$；

(2) $A = \{x \mid -1 \leqslant x \leqslant 1\}$，$B = \{x \mid 1 < x < 4\}$，$C = \{x \mid x > 3\}$.

解 (1) 因为$A \cup B = \{-1,1\} \cup \{1,2,3\} = \{-1,1,2,3\}$，

所以 $(A \cup B) \cup C = \{-1,1,2,3\} \cup \{0,2,4\} = \{-1,0,1,2,3,4\}$；

$(A \cup B) \cap C = \{-1,1,2,3\} \cap \{0,2,4\} = \{2\}$.

(2) 因为$A \cup B = \{x \mid -1 \leqslant x \leqslant 1\} \cup \{x \mid 1 < x < 4\} = \{x \mid -1 \leqslant x < 4\}$，如图1-7所示，

所以$(A \cup B) \cup C = \{x \mid -1 \leqslant x < 4\} \cup \{x \mid x > 3\} = \{x \mid x \geqslant -1\}$，如图1-8所示；

$(A \cup B) \cap C = \{x \mid -1 \leqslant x < 4\} \cap \{x \mid x > 3\} = \{x \mid 3 < x < 4\}$，如图1-9所示.