JINGSAI SHUXUE ZHUANTI YANJIU

竞赛数学

专题研究

主编：翁凯庆

四川教育出版社

竞赛数学专题研究

主编　翁凯庆

顾问　唐贤江　许清华

　　　邓安邦　白苏华

编委　熊昌雄　吴绍安

　　　马岷兴　简冬梅

　　　李昌勇　宁　锐

四川教育出版社

2003年·成都

图书在版编目(CIP)数据

竞赛数学专题研究 / 翁凯庆等主编 .—成都:四川教育出版社,2001 (2003 重印)
ISBN 7-5408-3554-0

Ⅰ.竞... Ⅱ.翁... Ⅲ.高中一数学一竞赛一研究师范大学一教学参考资料 Ⅳ.G633.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 037868 号

责任编辑:刘 玲
版式设计:张 涛
封面设计:李一梅
责任校对:王立戎
责任印制:黄 萍

竞赛数学专题研究
翁凯庆 主编

出版发行 四川教育出版社
(成都市盐道街 3 号 邮政编码 610012)
出 版 人 唐瑾怀
照 排 成都勤慧彩色制版印务有限公司
印 刷 成都新凤印刷厂
版 次 2001 年 7 月第 1 版
印 次 2003 年 8 月第 2 次印刷
开 本 880mm×1230mm 1/32
印 张 14.375 插页 2
字 数 350 千
印 数 6001—12000 册
书 号 ISBN 7-5408-3554-0/G·3333
定 价 22.00 元

前　言

本书可作为高师院校数学系“竞赛数学”课程的教学用书，也可作为高中教师和学生开展数学竞赛活动的参考书。本书通过对高中数学竞赛中主要内容的专题研究，达到加强思维训练，发展数学思维能力和探究能力，从而提高解决数学竞赛问题的能力的目的。

为此，在编写中我们力求做到：

(1) 注重知识、方法和能力的有机结合。根据各专题的需要一般都简明扼要地阐述各专题所需的基础知识。着重通过对典型例题的剖析，系统地展现出竞赛数学的基础理论、思想和方法，以及数学竞赛的解题技巧。为了培养创造性思维能力，还对其中的一些问题提供可供进一步探索的线索与思路，以便读者对问题作进一步的引申或推广，进行数学的创新性、研究性的工作。我们认为，“竞赛数学”课程中蕴含了大量的可供创新、研究的素材，将它们挖掘出来并发挥它们最大的教育功能，无论是对培养新世纪的数学教师，还是对培养优秀的数学竞赛选手，其意义都

是十分巨大的。

(2) 内容的展开要起点适中，层次分明，深入浅出。例题的选取要有坡度，要推陈出新，注意选取近年来数学竞赛中出现的新颖别致、综合性强的好的试题，充实在相应的专题内容中，力求反映学科前沿的发展水平。

(3) 在结构安排上，各篇、各专题既各有相对的独立性，又有整体上的统一性。为加强训练，各专题后都配备了一定数量的习题，并在书后给出了习题提示或参考解答。本书的例习题大都选自国内外的优秀数学竞赛试题，相信通过对例习题的学习和训练，一定会极大提高数学竞赛的解题能力。

本书是四川大学、四川师大，四川师院三校协作编写所成。其中第一部分几何篇由邓安邦、翁凯庆、马岷兴（四川师大）撰写；第二部分代数篇由唐贤江（四川大学）、熊昌雄（四川师院）、许清华、吴绍安、简冬梅（四川师大）撰写；第三部分组合篇由白苏华（四川大学）、翁凯庆、李昌勇、宁锐（四川师大）撰写。全书由翁凯庆统稿，宁锐制图。

四川省数学会理事长、中科院院士刘应明教授对本书的编写十分关心，并在百忙中抽出时间为本书作序。四川师范大学教务处对本书的编写、出版给予了大力支持，钟仕伦处长曾亲自过问本书的出版。四川师范大学数学系柳斌参加了本书的编写策划，潘亦宁、王珊参加部分校稿工作。四川教育出版社责任编辑刘玲为本书的快速、高质量的出版做出了许多富有成效的工作，在此一并致谢。

2001.5

序

数学学习，除了学习公式、定理等数学知识外，严密的思维训练，培养从数字与几何形状出发来分析与解决问题的能力，乃至品味数与形中的美学，等等，都是更本质、更高层次的内容。这或许就是素质教育的目标吧！坦率地说，目下课堂内的教学并不能完全做到这一点。至少，课堂之外的余地还很宽广。开展数学竞赛活动，无疑是达到这个目标的一个有效手段。它为学有余力的学生提高数学修养、展现自己的才能提供了一个活动空间、一个舞台。数学竞赛活动激发了一大批青少年学习数学的兴趣，开阔了他们的视野，培养了他们创造性思维的能力，锤炼了他们克服困难的意志。自然，数学竞赛活动对于数学尖子生的发现和培养，中学数学教师的素质提高等方面，也都起着十分重要的积极作用。

四川省数学会长期从事组织高初中数学竞赛、举办数学夏令营和数学奥林匹克教练员培训班等数学普及活动，每年都吸引了众多的中学生和中学数学教师参加。在各地中学教师和教练员的

辛勤劳动之下，四川省的数学竞赛活动也获得丰硕成果。更有好几位中学生参加了国际数学奥林匹克竞赛，摘得了金牌或银牌，为国家争得了荣誉。

四川师范大学数学教育教研室的老师们多年来积极投身于数学竞赛活动，并成功地进行了“竞赛数学专题研究”课程的建设。在他们的倡导下，约请四川省数学会中长期从事数学竞赛组织和培训工作的老师们共同编写了这本书。本书的作者，大都是中国数学奥林匹克的高级教练员，长期在数学奥林匹克培训班上担任主讲，积累了丰富的经验。在他们成功实践的基础上编写的这本书，对正在和即将从事数学竞赛教练工作的教师和爱好数学的青少年都是很好的教材和课外书，值得一读。

值本书出版之际，我愿寄语读者，衷心希望广大的青少年学好数学、用好数学，重视自己的数学修养，这才能在创造的道路上健康成长。有的人说，信息时代也是数字技术的时代。人类赖以生存的地球，被称为“数字地球”。或许是这方面的原因，美国自然科学基金会（一种支持科学研究的重要机构）在2000年把数学列入继信息技术等四个学科之后的第五个重点资助的学科领域。事实上，未来社会的高速发展一定是离不开数学的。各行各业的人才，无不需要数学的思维训练。无论是科学技术领域还是人文社会科学领域，数学素质高的人才一定是大有用武之地的。

教育部高等学校数学研究
与人才培训中心主任 刘应明
中国科学院院士

2001年4月

目　录

第一部分　几何篇 ………………………………………… 1

第一讲　几何解题途径的探求方法 ……………………… 3

第二讲　面积问题与面积方法 …………………………… 28

第三讲　平面几何的几个重要定理 ……………………… 46

第四讲　三角形的五“心” ……………………………… 64

第五讲　几何不等式 ……………………………………… 84

第六讲　立体几何问题选讲 ……………………………… 106

第二部分　代数篇 ………………………………………… 125

第七讲　函数 ……………………………………………… 127

第八讲　数列 ……………………………………………… 145

第九讲　函数方程 ………………………………………… 170

第十讲　不等式 …………………………………………… 187

第十一讲　数学归纳法 …………………………………… 223

第十二讲　复数 …………………………………………… 247

第十三讲　不定方程 ……………………………………… 266

第三部分　组合篇 …… 285
第十四讲　排列问题 …… 288
第十五讲　组合问题 …… 307
第十六讲　图形覆盖问题 …… 329
第十七讲　几何组合问题 …… 345
第十八讲　染色问题与染色方法 …… 362
第十九讲　图论初步 …… 378
习题提示或参考解答 …… 400

第一部分

几何篇

第一讲 几何解题途径的探求方法

众所周知,解决几何问题,关键在于找到它从已知到未知的逻辑通道,即解题途径．由于解决几何问题的过程,实质上就是根据问题的特征,采用一定的方法或手段,把我们感到比较陌生、复杂、抽象的问题,转化成比较熟悉、简单、具体的问题,然后运用我们的知识和经验加以解决的过程．因此,学会观察、分析问题的特征,掌握一定的促成问题转化的常用方法或手段,对于迅速而有效地找到问题的解题途径是至关重要的．在这一讲里,我们将结合实例介绍几种探求几何解题途径的方法．

一、充分地展开想象

想象,是指在头脑中对已有表象进行组合和改造产生新表象的思维过程．想像的重要性在于它是创造性思维的重要成分,不论是直觉还是灵感,没有想像的展开是不可能实现的．对于想像的作用,正如马克思所高度评价的:“想像是促进人类发展的伟大天赋．”而想像力就是人们通常说的形象思维或直觉思维能力,它对人们在劳动中充分发挥创造性有着极其重要的作用．爱因斯坦曾这样谈道:“想像力比知识更重要,想像力是科学研究中的实在

因素，是知识进化的源泉．”解决几何问题是一项创造性的劳动，自然需要丰富的想像．在探求几何解题途径的过程中，充分地展开想像，主要有以下三个方面．

1．广泛地联想

联想，是指从事物的相互联系中来考虑问题，从一事物想到与其相关的各种不同的事物，进行由此及彼的思维过程．在解题过程中，我们如能根据所面临问题的特征广泛联想熟知命题，考察其结论或解法是否可以加以利用，则无疑是迅速获得解题途径的简捷方法．

例1　在$\triangle ABC$中，角A,B,C的对边分别为a,b,c．若角A,B,C的大小成等比数列，并且$b^2-a^2=ac$．求角B．（全国高中联赛，1985年）

分析：由题设知，$B^2=AC$，$A+B+C=180°$．显然，我们若能由$b^2-a^2=ac$再得到角A,B,C间的一个关系式，则问题获得解决．事实上，三角形的边与角之间的这种关系正是命题：“在$\triangle ABC$中，若角A,B,C的对边分别为a,b,c，则$B=2A\Longleftrightarrow b^2=a(a+c)$．”可见，当我们面对上述问题正感为难之时，如能联想到这个命题，那么，问题将迎刃而解．

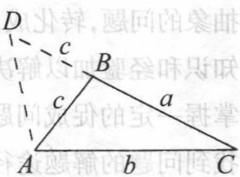

图1－1

鉴于这个命题十分有用，现证明于后：

如图1－1，延长CB至D，使$BD=AB$，并连结AD，则

$$b^2=a(a+c)\Longleftrightarrow b:a=(a+c):b\Longleftrightarrow\triangle CAB\backsim\triangle CDA$$
$$\Longleftrightarrow B=2\angle D=2A.$$

例2　已知四边形$ABCD$内接于$\odot O$，并且$BC=CD$．求证：$AB\cdot AD+BC^2=AC^2$．

分析:如图 1－2. 由于待证式的左端是 $AB\cdot AD$ 与 BC^2(或 $BC\cdot CD$)这两项之和,根据这一特征,所以欲证其成立,必须先要联想起能够得出或出现这两项的有关命题,否则无法入手. 事实上,我们只要联想到下面三个命题中的任何一个,都能迅速找到它的相应的论证途径. 这三个命题是:

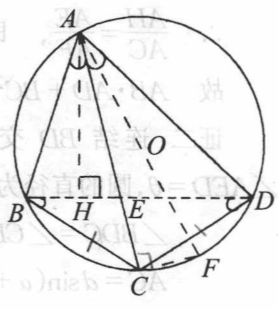

图 1－2

(1)三角形两边的积等于第三边上的高与外接圆直径的积;

(2)三角形的面积等于它的两边及其夹角的正弦之积的一半;

(3)相似三角形的对应边成比例.

由此,我们可得出如下三种不同的证法.

证一:连结 BD 交 AC 于 E,作 $AH\perp BD$ 于 H 及直径 AF,并连 CF,则 $\quad AB\cdot AD=AH\cdot AF$.

$\because \quad BC=CD, \quad \therefore \quad \overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{CD}$.

$\therefore \quad \angle BAC=\angle CAD$.

因此 $\quad \angle CBE=\angle CAD=\angle CAB$.

所以,CB 和 CEA 分别是$\triangle ABE$ 的外接圆的切线和割线.

于是 $\quad BC^2=CE\cdot CA$.

从而
$$\begin{aligned} AB\cdot AD+BC^2 &= AH\cdot AF+CE\cdot CA \\ &= AH\cdot AF+(AC-AE)\cdot AC \\ &= AC^2+AH\cdot AF-AE\cdot AC. \end{aligned}$$

又 $\angle AEH \overset{m}{=} \dfrac{1}{2}(\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{CD})=\dfrac{1}{2}(\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{BC}) \overset{m}{=} \angle AFC$,

$\therefore$ Rt$\triangle AHE \backsim$ Rt$\triangle ACF$.

$\therefore\quad \dfrac{AH}{AC}=\dfrac{AE}{AF}$， 即 $AH\cdot AF=AE\cdot AC$.

故 $AB\cdot AD+BC^2=AC^2$.

证二：连结 BD 交 AC 于 E，设 $\angle BAC=\alpha$，$\angle ABD=\beta$，$\angle AED=\theta$，圆的直径为 d，则

$$\angle BDC=\angle CBD=\angle CAD=\alpha,$$

$$AC=d\sin(\alpha+\beta),BD=d\sin2\alpha.$$

$$\therefore\quad S_{ABCD}=S_{\triangle ABD}+S_{\triangle BCD}$$

$$=\frac{1}{2}AB\cdot AD\sin2\alpha+\frac{1}{2}BC\cdot CD\sin2\alpha$$

$$=\frac{1}{2}(AB\cdot AD+BC^2)\sin2\alpha. \tag{1}$$

又 $$S_{ABCD}=\frac{1}{2}AC\cdot BD\sin\theta$$

$$=\frac{1}{2}AC\cdot d\sin2\alpha\cdot\sin(\alpha+\beta)$$

$$=\frac{1}{2}AC\cdot AC\sin2\alpha=\frac{1}{2}AC^2\sin2\alpha \tag{2}$$

故由(1)和(2)，得 $AB\cdot AD+BC^2=AC^2$.

证三：连结 BD 交 AC 于 E，则 $\triangle ABC\backsim\triangle AED$，

$\therefore\quad \dfrac{AB}{AE}=\dfrac{AC}{AD}$， 即 $AB\cdot AD=AC\cdot AE$.

又 $\triangle ABC\backsim\triangle BEC$，

$\therefore\quad \dfrac{BC}{EC}=\dfrac{AC}{BC}$， 即 $BC^2=AC\cdot EC$.

故
$$AB\cdot AD+BC^2=AC\cdot AE+AC\cdot EC$$
$$=AC(AE+EC)=AC^2.$$

2. 全面地设想

设想，是指对同一问题从各个不同的角度去观察、思考和分析其特征，推测其解题的大致方向，构思各种不同的处理方案．这是

在解题过程中探求解题途径的基本方法.

例 3 在$\triangle ABC$中,$AB=AC$,D是BC边上一点,E是线段AD上一点,且$\angle BED=2\angle CED=\angle BAC$.求证:$BD=2CD$.(全国初中联赛,1992 年)

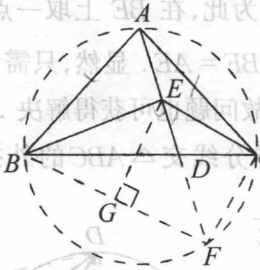

图 1-3(1)

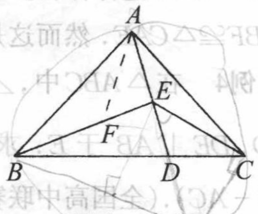

图 1-3(2)

分析 1: 如图 1-3(1),从$\angle BED=\angle BAC$的角度看,注意到$AB=AC$,可考虑延长ED至F,使$EF=EB$,并连结BF,则有$\angle BFA=\angle BCA$,所以A,B,F,C四点共圆.于是,连结CF,有$\angle AFC=\angle ABC=\angle ACB=\angle AFB$,因此$BD:DC=BF:CF$.这样,问题就转化为证$BF=2CF$.为此,作$EG\perp BF$,则$BG=GF$,从而问题又转化为证$GF=CF$,显然,只需证$\triangle EGF\cong\triangle ECF$.但这是十分容易的,故问题可由此得证.

分析 2: 如图 1-3(1),从$\angle CED=\dfrac{1}{2}\angle BAC$的角度看,注意到由$AB=AC$,可得出$\angle ABC=\angle ACB$以及$\dfrac{1}{2}\angle BAC+\angle ABC=90°$,可考虑过$C$作$CF\perp EC$交$ED$的延长线于$F$,则有$\angle AFC=\angle ABC$.因此,$A,B,F,C$四点共圆.根据分析 1,故问题可获证.

分析 3: 如图 1-3(2),从$\angle BED=\angle BAC$和$\angle BED$是

$\triangle ABE$ 的外角来考虑，可得$\angle ABE=\angle CAE$．由此可见，$\triangle ABE$与$\triangle CAE$ 是共角三角形，同时还是共边三角形．于是可考虑运用三角形面积比定理来解决．事实上，由于$\dfrac{BD}{CD}=\dfrac{S_{\triangle ABE}}{S_{\triangle CAE}}=\dfrac{AB\cdot BE}{AC\cdot AE}=\dfrac{BE}{AE}$，所以问题转化为证 $BE=2AE$．为此，在 BE 上取一点 F，使 $EF=AE$．这样，问题又转化为证明 $BF=AE$．显然，只需证明$\triangle ABF\cong\triangle CAE$．然而这是不困难的，故问题也可获得解决．

例4　在$\triangle ABC$中，$\angle A$ 的外角平分线交$\triangle ABC$的外接圆于 D，$DE\perp AB$ 于 E．求证：$AE=\dfrac{1}{2}(AB-AC)$．(全国高中联赛，1989 年)

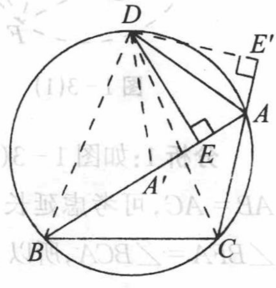

图 1－4

分析：如图 1－4，欲直接证 $AE=\dfrac{1}{2}(AB-AC)$有困难，换一个角度考虑，证 $2AE=AB-AC$．而要证此式，可以考虑以下两条途径：一是证 $AC+AE=AB-AE$；一是证 $AC=AB-2AE$．

证一：作 $DE'\perp CA$ 于E'，则由$\angle BAD=\angle E'AD$知

$\mathrm{Rt}\triangle ADE\cong\mathrm{Rt}\triangle ADE'$．

$\therefore\quad AE=AE',DE=DE'$．

连结 BD 和 CD，则$\angle DBE=\angle DCE'$．

$\therefore\quad\mathrm{Rt}\triangle DBE\cong\mathrm{Rt}\triangle DCE'$．

因此　$BE=CE'$．即　$AB-AE=AC+AE$．

故　$AE=\dfrac{1}{2}(AB-AC)$．

证二：在 AB 上取一点 A'，使 $A'E=AE$，则

$\mathrm{Rt}\triangle A'DE\cong\mathrm{Rt}\triangle ADE$．

$\therefore\quad DA'=DA,\angle DA'A=\angle DAA'=\angle DAE'$．