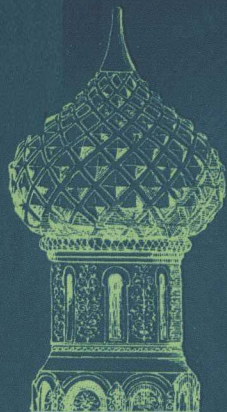


“十一五”国家重点图书



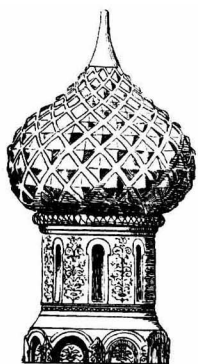
俄罗斯数学
教材选译

自然科学问题的 数学分析

□ B. A. 卓里奇 著
□ 周美珂 李 植 译



高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS



“十一五”国家重点图书

● 数学天元基金资助项目

俄罗斯数学
教材选译

自然科学问题的 数学分析

ZIRAN KEXUE WENTI DE SHUXUE FENXI



□ B. A. 卓里奇 著
□ 周美珂 李 植 译



高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

图字 : 01-2011-3589 号

В. А. Зорич, Математический анализ задач естествознания.

МЦНМО, Москва, 2008

Originally published in Russian under the title

Mathematical Analysis of Problems in the Natural Science

by V. A. Zorich (Moscow 2008) MCCME

(Moscow Center for Continuous Mathematical Education Publ.)

Copyright © V. A. Zorich

All Rights Reserved

图书在版编目 (CIP) 数据

自然科学问题的数学分析 / (俄罗斯) 卓里奇著 ;
周美珂, 李植译. -- 北京 : 高等教育出版社, 2012. 8
ISBN 978-7-04-034524-7

I. ①自… II. ①卓… ②周… ③李… III. ①数学
分析—高等学校—教学参考资料 IV. ①O17

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2012) 第 088457 号

策划编辑 赵天夫
责任校对 杨雪莲

责任编辑 李华英
责任印制 张泽业

封面设计 赵阳

版式设计 余杨

出版发行 高等教育出版社

社 址 北京市西城区德外大街4号

邮政编码 100120

印 刷 中国农业出版社印刷厂

开 本 787mm×1092mm 1/16

印 张 10

字 数 160千字

购书热线 010-58581118

咨询电话 400-810-0598

网 址 <http://www.hep.edu.cn>

<http://www.hep.com.cn>

网上订购 <http://www.landaco.com>

<http://www.landaco.com.cn>

版 次 2012年8月第1版

印 次 2012年8月第1次印刷

定 价 45.00元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题, 请到所购图书销售部门联系调换

版权所有 侵权必究

物料号 34524-00

《俄罗斯数学教材选译》序

从上世纪 50 年代初起,在当时全面学习苏联的大背景下,国内的高等学校大量采用了翻译过来的苏联数学教材.这些教材体系严密,论证严谨,有效地帮助了青年学子打好扎实的数学基础,培养了一大批优秀的数学人才.到了 60 年代,国内开始编纂出版的大学数学教材逐步代替了原先采用的苏联教材,但还在很大程度上保留着苏联教材的影响,同时,一些苏联教材仍被广大教师和学生作为主要参考书或课外读物继续发挥着作用.客观地说,从解放初一直到“文化大革命”前夕,苏联数学教材在培养我国高级专门人才中发挥了重要的作用,起了不可忽略的影响,是功不可没的.

改革开放以来,通过接触并引进在体系及风格上各有特色的欧美数学教材,大家眼界为之一新,并得到了很大的启发和教益.但在很长一段时间中,尽管苏联的数学教学也在进行积极的探索与改革,引进却基本中断,更没有及时地进行跟踪,能看懂俄文数学教材原著的人也越来越少,事实上已造成了很大的隔膜,不能不说是一个很大的缺憾.

事情终于出现了一个转折的契机.今年初,在由中国数学会、中国

工业与应用数学学会及国家自然科学基金委员会数学天元基金联合组织的迎春茶话会上,有数学家提出,莫斯科大学为庆祝成立 250 周年计划推出一批优秀教材,建议将其中的一些数学教材组织翻译出版.这一建议在会上得到广泛支持,并得到高等教育出版社的高度重视.会后高等教育出版社和数学天元基金一起邀请熟悉俄罗斯数学教材情况的专家座谈讨论,大家一致认为:在当前着力引进俄罗斯的数学教材,有助于扩大视野,开拓思路,对提高数学教学质量、促进数学教材改革均十分必要.《俄罗斯数学教材选译》系列正是在这样的情况下,经数学天元基金资助,由高等教育出版社组织出版的.

经过认真选题并精心翻译校订,本系列中所列入的教材,以莫斯科大学的教材为主,也包括俄罗斯其他一些著名大学的教材.有大学基础课程的教材,也有适合大学高年级学生及研究生使用的教学用书.有些教材虽曾翻译出版,但经多次修订重版,面目已有较大变化,至今仍广泛采用、深受欢迎,反射出俄罗斯在出版经典教材方面所作的不懈努力,对我们也是一个有益的借鉴.这一教材系列的出版,将中俄数学教学之间中断多年的链条重新连接起来,对推动我国数学课程设置和教学内容的改革,对提高数学素养、培养更多优秀的数学人才,可望发挥积极的作用,并起着深远的影响,无疑值得庆贺,特为之序.

李大潜

2005 年 10 月

前 言

这是一本自然科学内容的小书, 面向数学工作者, 适合不同方向发展的需要.

本书介绍了伽利略、牛顿、欧拉、伯努利、卡诺、克劳修斯、玻尔兹曼、吉布斯、庞加莱、爱因斯坦、普朗克、薛定谔、卡拉泰奥多里、柯尔莫戈洛夫、科捷利尼科夫、香农……的某些研究成果.

当然, 《自然科学问题的数学分析》这一书名只是反映了本书的意向, 并不保证能够提供一套轻而易举解决所有问题的万能方法. 作者只选择了非常有限的三个专题.

我们发现, 令人尊敬的数学家, 如阿基米德、牛顿、莱布尼茨、欧拉、高斯、庞加莱等, 都不仅是数学家, 而且还是学者、自然哲学家.

在数学中, 重要的具体科学问题的解决与抽象的一般理论的建立, 就如同呼吸一样, 是连续不断的过程. 长时间破坏这个平衡是很危险的.

我们不能做离岸浮冰上的垂钓者.

赫尔曼·外尔说过: “现实的数学, 作为统一的真实世界的理论结构的一部分, 在思维中原本应与物理学融为一体……” 顺便说一句,

在我们的物理 - 数学科学博士学位证书中现在还保留有这样的话.

最后, 我对所有帮助修改初稿的人表示感谢. 特别感谢 В. И. 阿诺尔德, 他对一百多页文稿字斟句酌^①, 提出了许多尖锐的意见, 作了相应的评注^②. 如果我在这里没有采纳同事们的所有建议和要求, 这绝不意味着我不重视, 因为, 我首先已经把它们当作思考和讨论的对象.

В. 卓里奇
莫斯科, 2007

^①这并非夸大其词: 由于打印机的意外问题, 送给 В. И. 阿诺尔德看的文件出现错误, 某些俄文字母全部被替换成了别的字母 (要知道, 在这种情况下, 可能发生相当滑稽可笑的事情). 而 В. И. 阿诺尔德呢, 他把所有打印错误都顺手修改了.

^②例如, 专题一的讨论是“胡言乱语”. 关于这个问题我应预先告诉读者. 还请参看第 20 页的脚注.

目 录

专题一 物理量的量纲分析	1
第一章 理论基础	3
§1. 物理量的量纲 (初步知识)	3
1.1. 测量、测量单位、测量过程	3
1.2. 基本单位和导出单位	3
1.3. 相互关联和相互独立的单位	4
§2. 物理量的量纲公式	4
2.1. 当基本单位的大小变化时物理量的数值的变化	4
2.2. 关于同型物理量的测量值之比的不变性假设	5
2.3. 物理量在给定基底下的量纲函数和量纲公式	6
§3. 量纲理论的基本定理	8
3.1. Π -定理	8
3.2. 相似原理	10

第二章 应用实例	11
§1. 物体沿圆形轨道运动的回转周期 (相似律)	11
§2. 引力常数, 开普勒第三定律和牛顿万有引力定律中的幂指数	12
§3. 重力摆的振动周期	13
§4. 溢流堰的体积流量和质量流量	14
§5. 球在无黏介质中运动时受到的阻力	15
§6. 球在黏性介质中运动时受到的阻力	16
§7. 练习	17
§8. 评注	20
第三章 进一步的应用: 流体动力学和湍流	22
§1. 流体动力学方程组 (一般知识)	22
§2. 流动失稳以及动力系统上的分岔现象	25
§3. 湍流 (初步认识)	26
§4. 柯尔莫戈洛夫模型	26
4.1. 湍流运动的多尺度性	26
4.2. 充分发展湍流与惯性区	28
4.3. 比能	28
4.4. 给定尺度流动的雷诺数	29
4.5. 柯尔莫戈洛夫 - 奥布霍夫定律	29
4.6. 湍流的内尺度	30
4.7. 湍流涨落的能谱	30
4.8. 湍流混合与粒子分散	31
专题二 高维几何和自变量极多的函数	33
第一章 自变量极多的函数在自然科学和技术领域中的例子	35
§1. 信号的数字记录 (代码 - 脉冲调制)	35
1.1. 线性装置及其数学描述 (卷积)	35

1.2.	线性装置的傅里叶对偶 (谱) 描述.	36
1.3.	具有限谱集的函数和装置	37
1.4.	理想滤波器及其脉冲响应函数	38
1.5.	读数定理 (科捷利尼科夫 - 香农定理).	39
1.6.	信号的编码 —— 脉冲调制.	40
1.7.	理想通信通道的通过能力	40
1.8.	电视信号的维数的估计	41
§2.	涉及多参数现象和高维空间的其他研究领域	41
2.1.	物质的分子理论.	41
2.2.	经典哈密顿力学中的相空间	42
2.3.	吉布斯热力学系综.	42
2.4.	概率论.	42
第二章	集聚原理及其表现.	43
§1.	欧几里得空间 $\mathbb{R}^n (n \gg 1)$ 中的球和球面	43
1.1.	当 $n \rightarrow \infty$ 时球体积的集聚	43
1.2.	热力学极限.	43
1.3.	球面面积的集聚.	44
1.4.	等周不等式及极高维球面上的函数	47
§2.	一些评注.	49
2.1.	各种中值.	49
2.2.	高维方体与集聚原理	50
2.3.	集聚原理、热力学、遍历性.	51
2.4.	集聚原理和极限分布	52
第三章	存在噪声情况下的通信.	53
§1.	连续信号的离散记法 —— 具体化.	53
1.1.	信号的能量和平均强度	53
1.2.	按水平量子化.	55
1.3.	理想的多水平通信管道	55
1.4.	噪声 (白噪声).	56

§2. 具噪声的通信管道的通过能力	56
2.1. 具噪声的通信管道的通过能力的粗略估计	56
2.2. 信号的几何和噪声	57
2.3. 香农定理	58
§3. 香农定理的讨论、例子和补充	60
3.1. 香农的评述	60
3.2. 强噪声下的弱信号	61
3.3. 语言冗余	62
3.4. 用粗糙仪器作精细的测量	62
3.5. 香农 - 法诺码	63
3.6. 最优码的统计特点	63
3.7. 编码和解码 —— ε -熵和 δ -容量	64
§4. 具噪声的通信管道的数学模型	66
4.1. 最简单的模型和问题的提法	66
4.2. 信息和熵 (初步研究)	68
4.3. 条件熵和信息	70
4.4. 对具噪声的通信管道内的信息丢失的解释	73
4.5. 抽象通信管道的通过能力的计算	74
专题三 经典热力学与接触几何学	77
第一章 经典热力学 (基本知识)	79
§1. 两个热力学定律	79
1.1. 能量和永动机	79
1.2. 第二类永动机和熵	80
§2. 两个热力学定律的数学表述	81
2.1. 热交换的微分形式	83
2.2. 用微分形式语言表示的两个热力学定律	84
2.3. 没有热的热力学	86
2.4. 绝热过程和卡拉泰奥多里公理	86

第二章 热力学和接触几何	89
§1. 接触分布	89
1.1. 绝热过程和接触分布	89
1.2. 形式化	90
§2. 分布的可积性	90
2.1. 弗罗贝尼乌斯定理	90
2.2. 可积性、可连接性、可控性	91
2.3. 卡诺 - 卡拉泰奥多里度量	93
2.4. 吉布斯接触形式	94
2.5. 注释	95
第三章 经典热力学和统计热力学	97
§1. 动理学理论	97
1.1. 分子与压强	97
1.2. 麦克斯韦分布	98
1.3. 玻尔兹曼定义的熵	98
1.4. 吉布斯系综和力学的热力学化	99
1.5. 遍历性	100
1.6. 悖论、问题、困难	102
§2. 量子统计热力学 (三言两语)	105
2.1. 状态的计算和条件极值	105
2.2. 注释和补充	108
参考文献	116
附录 数学语言和数学方法	136

专题一

物理量的量纲分析

引 言

抽象的数, 例如 1 或 $2\frac{2}{3}$, 以及抽象的数的算术运算, 例如, 不管相加的是苹果还是大象, 2 加 3 永远等于 5 ($2 + 3 = 5$), 这些都是人类文明中可以与文字的产生相比的伟大成就. 我们对此已是如此习以为常, 甚至已经觉察不到, 在数学的惊人效力之下仍然存在一些奇妙之处.

如果你知道一个数所涉及的对象, 那么, 通常立刻就同时出现一些附加的可能性和限制条件. 记得有一首儿歌:

“我的答案是二又三分之二个挖土工人!”

不错, 在算术中允许有数 $2\frac{2}{3}$, 但在这个具体场合却不允许.

在与有量纲的量而不是抽象的数有关的具体问题中, 应该怎样运用数呢?

有涉及这个问题的某种学问吗? 有, 而且并不深奥. 每个合格的自然科学工作者都知道这个理论 (也知道不会应用这个理论的危险). 现在, 我们就来讲述这个理论.

第一章 理论基础

§1. 物理量的量纲 (初步知识)

1.1. 测量、测量单位、测量过程

这里列举的都是一些基础性概念, 一些最有代表性的科学家, 首先是物理学家和数学家, 都曾对它们进行过深入的分析. 这种分析是对空间、刚体、运动、时间、因果关系等概念的分析.

我们不打算深入讨论这些问题, 但必须指出, 任何理论都只能对一定范围中的对象在一定的限度内作出好的刻画. 至于范围限度到底是怎样的, 很遗憾, 一般都是直到出现与这个理论有矛盾的实际情况时, 才有可能搞清楚. 通常正是在这个时候, 我们会回过头来, 重新审查理论的基础, 对它进行细致的分析和必要的改造.

而现在, 让我们先来积累一些通俗易懂的有用的具体材料.

1.2. 基本单位和导出单位

在生活中, 我们常常使用这样或那样的单位测量长度、质量、时间、力、速度、能量、强度…… 这些单位中有一部分被分出来作为

基本单位, 其他的就是导出单位.

基本单位的例子:

L —— 长度单位 (米 或 m),

M —— 质量单位 (千克 或 kg),

T —— 时间单位 (秒 或 s).

导出单位的例子:

v —— 速度 (米/秒 或 m/s), $[v] = LT^{-1}$ ^①,

V —— 体积 (米³ 或 m³), $[V] = L^3$,

a —— 加速度 (米/秒² 或 m/s²), $[a] = LT^{-2}$,

l —— 光年, $[l] = [cT] = L$,

F —— 力, $F = ma$, $[F] = [ma] = MLT^{-2}$.

力学物理量的量纲的一般形式是 $L^{d_1}M^{d_2}T^{d_3}$; $\{d_1, d_2, d_3\}$ 是在基底 $\{L, M, T\}$ 下的量纲向量.

我们来研究这种向量在代数-几何方面与已知向量相似的一些性质.

1.3. 相互关联和相互独立的单位

例 量 v, a, F 的单位是独立的^②, 从而也可以把它们取作基本单位, 因为 $[L] = v^2a^{-1}$, $[M] = Fa^{-1}$, $[T] = va^{-1}$.

这刻画了量纲向量空间与向量空间在基底、无关向量组方面的相似性 (这种相似性的更深刻的意义将在后面揭示).

§2. 物理量的量纲公式

2.1. 当基本单位的大小变化时物理量的数值的变化

例 如果以千米为单位测量距离 (也就是说, 不取米, 而取它的

^①译者注: 习惯上用 $[X]$ 表示物理量 X 的量纲.

^②译者注: “独立” 的含义是其中任一个量的量纲都不能表示成其余的量的量纲的幂之积, 这等价于它们的量纲向量线性无关. 几个物理量是相互关联的, 指的是它们的量纲向量线性相关.

1000 倍作为测量单位), 那么, 同一个物体的长度关于这两个长度单位有不同的数值, 亦即, $1 \text{ km} = 10^3 \text{ m}$, $L \text{ km} = 10^3 L \text{ m}$, $1 \text{ m} = 10^{-3} \text{ km}$, $L \text{ m} = 10^{-3} L \text{ km}$. 这样一来, 长度单位变化至 α 倍将导致所有被测量长度的数值变化至 α^{-1} 倍, 即 L 以 $\alpha^{-1}L$ 代替.

对于质量和时间的测量单位 (吨、克、毫克; 小时、昼夜、年、毫秒, 等等), 情况也是这样.

因此, 如果一个物理量在基底 $\{L, M, T\}$ 下具有量纲 $L^{d_1} M^{d_2} T^{d_3}$, 亦即 $\{d_1, d_2, d_3\}$ 是它的量纲向量, 则当长度、质量和时间的测量单位分别变化至 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 倍时, 这个量在该基底下的数值显然应变化至 $\alpha_1^{-d_1} \alpha_2^{-d_2} \alpha_3^{-d_3}$ 倍.

2.2. 关于同型物理量的测量值之比的不变性假设

例 三角形的面积是其三条边长的函数 $y = f(x_1, x_2, x_3)$ ^①. 取另一个三角形, 计算它的面积 $\bar{y} = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$.

当长度单位的大小变化时, y 与 \bar{y} 的数值随之变化, 但这时它们的比 \bar{y}/y 是不变的^②.

设现在有两个同类型的物理量

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_m), \quad \bar{y} = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_m),$$

^①译者注: 这里的函数 f 与长度单位和面积单位的选取有关, x_1, x_2, x_3 表示的是三角形三条边的长度, 都是物理量. $f(x_1, x_2, x_3)$ 是面积, 也是物理量. 因此, $y = f(x_1, x_2, x_3)$ 是物理量之间的关系式.

^②译者注: 具体地说, 取 L 为长度单位时, 三条边长分别为 $x_1 L, x_2 L, x_3 L$ 的三角形的面积为 $f(x_1, x_2, x_3)$, 因此, 在基 L 下, 边长数值为 x_1, x_2, x_3 的三角形 Δ 和边长数值为 $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3$ 的三角形 $\bar{\Delta}$ 的面积之比为 $f(x_1, x_2, x_3)/f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$. 现在把长度单位换成 \bar{L} , 记边长为 $\xi_1 \bar{L}, \xi_2 \bar{L}, \xi_3 \bar{L}$ 的三角形的面积为 $\bar{f}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$. 这里说的 y 与 \bar{y} 之比不变就是: 如果 $x_i L = \xi_i \bar{L}$, $\bar{x}_i L = \bar{\xi}_i \bar{L} (i = 1, 2, 3)$, 则

$$\frac{f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)}{f(x_1, x_2, x_3)} = \frac{\bar{f}(\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2, \bar{\xi}_3)}{\bar{f}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)}.$$

不难看出, 我们说“ f 是将物理量(三个长度)映成物理量(面积)的映射”的本意正在于此.