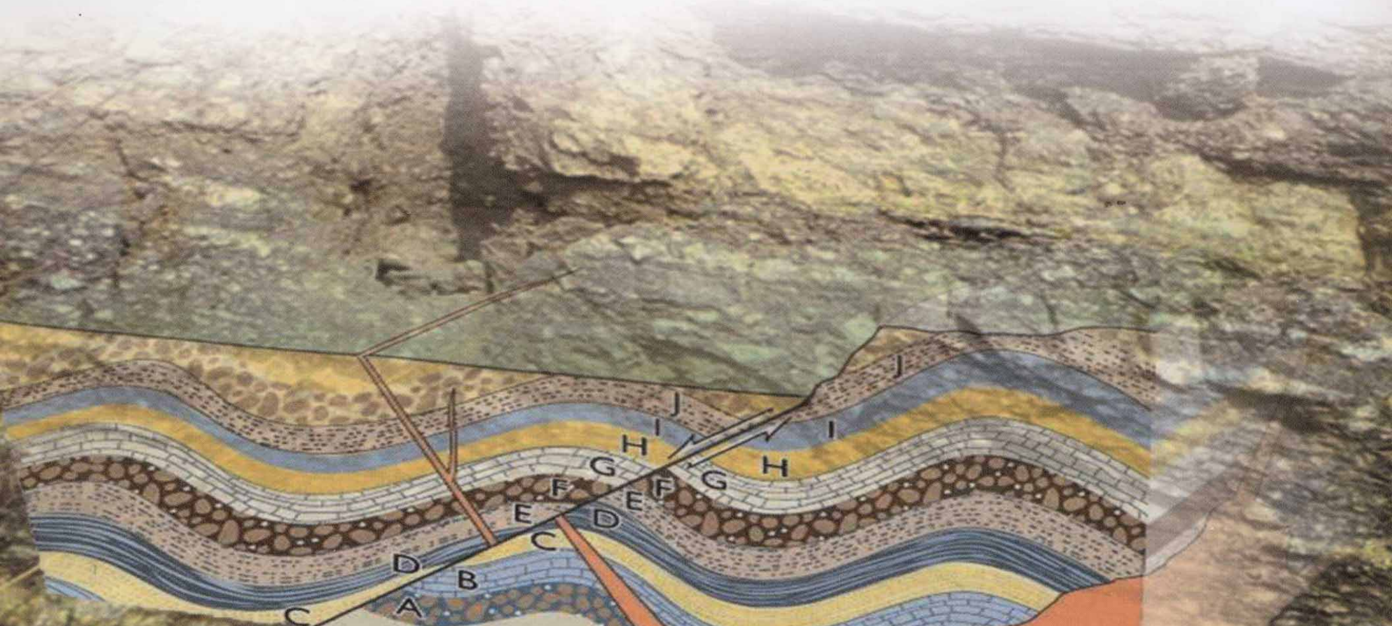
高等院校石油天然气类规划教材

高等渗流力学

程林松　编著



石油工业出版社
Petroleum Industry Press

高等渗流力学

程林松　编著

石油工业出版社

内 容 提 要

本书前五章为渗流力学的基础理论，系统介绍了单相液体刚性稳定渗流理论、弹性可压缩液体不稳定渗流理论、油气和油水两相渗流理论、多相多组分渗流理论、多重介质渗流理论；后五章为渗流力学近20年的学科进展与研究成果，详细介绍了非等温渗流理论、非牛顿流体渗流理论、物理化学渗流理论、低渗透油藏非线性渗流理论以及复杂结构井渗流理论。

本书可作为石油工程及相关专业的研究生教材，也可作为高年级本科生和从事油气田勘探与开发科研人员的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

高等渗流力学/程林松编著.
北京：石油工业出版社，2011.11
高等院校石油天然气类规划教材
ISBN 978-7-5021-8713-2

Ⅰ.高…
Ⅱ.程…
Ⅲ.渗流力学—高等学校—教材
Ⅳ.0357.3

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第195190号

出版发行：石油工业出版社
(北京安定门外安华里2区1号　100011)
网　址：www.petropub.com.cn
编辑部：(010)64523579　发行部：(010)64523620
经　销：全国新华书店
印　刷：石油工业出版社印刷厂

2011年11月第1版　2011年11月第1次印刷
787×1092毫米　开本：1/16　印张：24.5
字数：620千字

定价：42.00元
(如出现印装质量问题，我社发行部负责调换)

前　言

油气渗流力学是研究油气藏流体在多孔介质储层中的渗流形态和渗流规律的一门学科，它是流体力学的一个重要而特殊的分支。自从一百多年前法国水利工程师达西发现单相渗流的基本规律——达西定律以来，石油天然气工业的发展使得油气渗流的研究变得异常活跃，内容不断丰富和完善。

渗流力学本身是涉及范围较广泛的一门学科，它在水工、水文地质、化工、冶金等部门（领域）都有重要的应用。对于油气田开发领域，它是重要的基础学科。它所研究的是在相对高温和高压情况下，流体在多孔介质中的渗流规律，因此油气渗流力学本身的发展往往与油气田开发和开采技术密不可分。这门学科尽管只有一百多年的历史，但是它已成为一门专业的流体力学并具有严密的科学体系。特别是20世纪以来，渗流力学得到多学科与多方面专家和学者的重视与支持，尤其是力学界（包括流体力学、固体力学和热力学等），使得这一学科不断向更深和更广的方向发展；同时，由于石油工业的不断发展和深化，促使渗流力学不断研究新问题，提出新想法，得出新结论，为油气田开发提供新的理论依据。

随着渗流力学的不断发展和进步，有些复杂的渗流问题已经得到圆满解决，但目前教材仍停留在以前的经典理论上，没有增添这部分研究内容和方法，读者不能了解到渗流力学的研究前沿，所以现有书籍内容已不能满足高年级本科生、研究生和科研人员的需要。

为此，笔者根据多年从事渗流理论研究和教学所积累的经验，在继承了现有渗流力学教材和专著优点的基础上，吸收了国内外诸多学者的教学与研究成果，完成了本教材的编写。

本书共分为十章，前五章为渗流力学基础理论，笔者根据目前的研究成果和进展适当增添了部分内容。第六章至第十章包含了笔者所在课题组近20年的研究成果。本书全面阐述了渗流力学整个发展历程以及最新研究成果，在内容上具有先进性、系统性和逻辑性强等特点。

本书主要针对油气田开发工程专业的研究生教学之用，要求有较高的数学、渗流力学和流体力学基础知识，以便进一步掌握渗流力学的理论体系和方法，而对一些具体工程应用方法，则不做更多的解释和阐述。由于本书主要是面对研究生而写的教材，相对于本科生渗流力学基础教材而言，不仅在深度上提高了一个档次，而且添加了许多渗流力学的前沿研究成果，目的是拓宽学生的视野，激发学生学习渗流力学的兴趣，启发学生的创新能力。本书在教学大纲要求范围内根据学生的接受能力和学时数按一定的内容深度和理论系统来编写，而对于现今一些专门问题，可以参考有关的专著，在其中可以找到更为详尽的叙述。

本教材的编写要特别感谢笔者的导师郎兆新教授，正是老师诲人不倦的教育和垂范，才使笔者长期致力于渗流力学的研究和教学工作，而且本书部分章节参考了老师编写的教材《油气地下渗流力学》；还要感谢笔者的博士生廉培庆、曹仁义、黄世军、周体尧、曾保全、罗艳艳、李南、樊兆琪等，他们不仅协助我完成了本书部分内容的编写工作，而且还完成了成稿过程中大量的修改和校对工作。另外，本书还得到中国石油大学（华东）姚军教授、中国地质大学（北京）王晓东教授、东北石油大学刘义坤教授、长江大学王尤富教授、西南石油大学张烈辉教授和西安石油大学陈军斌教授的大力支持和帮助，在此表示诚挚的感谢。

由于笔者水平有限，本教材还存在很多的缺点和不足，敬请读者提出宝贵的意见。

程林松

2011 年 7 月

目　　录

第一章　单相液体刚性稳定渗流理论

第一节　渗流数学模型的建立

用数学语言综合表达油气渗流过程中全部力学现象和物理化学现象内在联系和运动规律的方程式(或方程组)称为“油气渗流的数学模型”。

一个完整的渗流数学模型应包括两部分:渗流综合微分方程的建立以及边界条件和初始条件的提出。下面叙述如何把一定地质条件下的油气渗流问题转变为数学模型的建立和求解问题。

一、建立数学模型的基础

油气渗流力学的研究方法是把一定地质条件下油气渗流的力学问题转换为数学问题,然后求解,再联系油气田开发的实际条件应用到生产中去。

把渗流过程中的各种力学、物理、化学现象和规律,用数学语言加以描述就是要用微分方程和微分方程组综合地加以表达。由于渗流的形态和类型不同,它们遵循的力学规律有差异,伴随渗流过程出现的物理化学现象也不相同,所以有很多类型的渗流数学模型。

要建立一个渗流数学模型,并不是凭空臆想出来的,而是正确认识客观世界的结果。因此要进行以下的基础工作:

(1)地质基础。只有对油气层孔隙结构的正确认识和描述才能建立合乎实际的数学模型。只有正确描述油气层的几何形状、边界性质、参数分布,才能给出正确的边界条件和参数以进行渗流计算。

(2)实验基础。建立渗流数学模型的核心是正确认识渗流过程中的力学现象和规律,而进行科学实验是认识和检验各种渗流力学规律的基础。因此,进行渗流物理的基础实验是建立数学模型的关键。

(3)科学的数学方法。建立渗流数学模型,要有一套科学的数学方法作为手段。建立数学模型一般常用的是无穷小单元体分析法,这就是在地层中抽出一个无穷小单元体作为对象进行分析,根据在这个单元体中发生的物理及力学现象建立数学模型。通常根据单元体空间上和时间上的守恒定律(如质量守恒定律、能量守恒定律、动量守恒定律)或微小单元上的渗流特征来建立微分方程。建立数学模型后,还要用数学理论证明数学模型是有解的,并且解是连续的和唯一的。

二、油气渗流数学模型的一般结构

油气渗流数学模型体现了在渗流过程中需要研究的流体力学、物理学、化学问题的总和,并且还要描述这些现象的内在联系。因此,建立综合油气渗流数学模型要考虑如下内容:

(1)运动方程(所有数学模型必须包括的组成部分)。

(2)状态方程(在研究弹性可压缩的多孔介质或流体时需要包括)。

(3)质量守恒方程(称连续性方程,它可以将描述渗流过程各个侧面的诸类方程综合联系起来,是数学模型必要的部分)。

以上的三类方程是油气渗流数学模型的基本组成部分。

(4)能量守恒方程(只有研究非等温渗流问题如热力采油时才用到)和动量守恒方程。

(5)其他附加的特性方程(特殊的渗流问题中伴随发生的物理或化学现象附加的方程,如物理化学渗流中的扩散方程等)。

(6)有关的边界条件和初始条件(是渗流数学模型必要的内容)。

三、建立数学模型的步骤

1. 确定建立模型的目的和要求

首先根据建立模型的目的确定微分方程要解决什么问题,即确定方程的未知量(因变量)是什么?自变量又是什么?还有哪些物理量(或物理参数)起作用?

在渗流力学研究中要求数学模型解决的问题大体上有6个:(1)压力 p 的分布;(2)渗流速度 v 的分布(包括油井产量);(3)流体饱和度 S 的分布;(4)分界面移动规律;(5)地层温度 T 的分布;(6)溶剂浓度 C 的分布。

根据上面的要求,渗流数学模型的因变量(求解的未知数)一般是压力 p(或相当压力的压力函数)、速度 v、饱和度 S 以及浓度 C。一般问题的未知量是压力 p 和速度 v;两相或多相渗流问题还要求饱和度 S 的分布;在分界面移动理论中是求解时间与分界面坐标的函数关系。

渗流力学数学模型中的自变量,一般是坐标 (x,y,z) 和时间 t 两个物理量:在稳定渗流中自变量只包括坐标 (x,y,z) 或 (r,θ,z);而不稳定渗流中自变量包括坐标和时间 (x,y,z,t)。在建立数学模型时还要根据所解决问题的地质状况、生产条件决定渗流空间的维数。一维空间的自变量是 (x,t) 或 (r,t);二维问题是 (x,y,t) 或 (r,θ,t);三维问题是 (x,y,z,t) 或 (r,θ,z,t)。在数学模型中也有零维模型即与空间无关的模型,如物质平衡法的数学模型就是零维模型。

在渗流数学模型中,除了自变量和因变量之外,还要出现一些系数,其中有地层物理参数(如渗透律 K、孔隙度 ϕ、弹性压缩系数 C、导压系数 η 等)和流体的物理参数(如黏度 μ、密度 ρ、体积系数 B 等)。它们又可分为常系数和变系数(变系数指这些物理参数是压力或其他变量的函数)两种:

$$p = f(x,y,z,t,A,B);v = f(x,y,z,t,A,B)$$

$$S = f(x,y,z,t,A,B);T = f(x,y,z,A,B)$$

式中 A——岩石的物理参数;

B——流体物理参数,它们可以是常数,也可以是某些变量的函数。

2. 研究各物理量的条件和情况

对参加渗流过程的各物理量要逐个研究它们的情况和条件。具体来讲是研究四方面的条件和情况:

(1)过程状况:是等温还是非等温过程;

(2)系统状况:是单组分系统还是多组分系统,甚至是反凝析系统;

(3)相态状况:是单相还是多相甚至是混相;

(4)流态状况:是服从线性渗流规律还是服从非线性渗流规律,是否物理化学渗流或非牛顿液体渗流。

通过这样的分析，对数学模型中选用哪些运动方程、守恒方程以及是否需要状态方程和附加特性方程，就会有一个全面估计。

3. 确定未知数(因变量)和其他物理量之间的关系

根据上面分析，确定物理量之间的 4 个关系：

(1)确定选用的运动方程。写出速度和压力梯度之间的函数关系，即：

$$v_i=f(A\cdot B\cdot\frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}x_i})$$

(2)确定所需的状态方程。写出物理参数和压力的关系：$A_i=f_i(p)$，$B_i=f_i(p)$。

(3)确定连续性方程。写出渗流速度 v 和坐标及时间的关系或饱和度与坐标和时间的关系：$v=f(x,y,z,t,A,B)$(对单相流体)，$S=f(x,y,z,t,A,B)$(对多相流体)。

(4)确定伴随渗流过程发生的其他物理化学作用的函数关系，如能量转换方程、扩散方程等。

建立上面这些函数关系都是采用无穷小单元分析法或积分法，所以这些物理量的函数关系都是以微分方程形式表述出来。

4. 写出数学模型所需的综合微分方程(组)

上面所述的各个方程只是分别孤立描述了渗流过程物理现象的各个侧面。因此，还需要通过一定的综合方程把这几方面的物理现象的内在联系统一表达出来。从以上物理量 4 个函数关系的分析看来，只有连续性方程表达了确定未知量 v 和坐标及时间的函数关系：$v=f(x,y,z,t,A,B)$。它反映了建立数学模型的根本目的(对多相渗流是建立饱和度与坐标和时间的关系，同样也属于连续性方程)。因此就选用连续性方程作为综合方程，把其他方程都代入连续性方程中，最后得到描述渗流过程全部物理现象的统一微分方程(组)。

5. 根据量纲分析原则检查所建立的数学模型量纲是否一致

渗流数学模型的量纲一定是齐次的，所以检查量纲往往可以看出所建立的数学模型是否正确。但用这个方法的重要条件是要求正确使用量纲。同时还要注意，量纲一致只是数学模型正确性的必要条件，但不是充分条件。量纲正确并不一定保证数学模型没有错误。

6. 确定数学模型的适定性

建立数学模型之后，重要的问题是保证方程能够求解。事实上一个微分方程可能是无解的，即使有解，也可能不是唯一的和连续的。所以在建立数学模型中必须研究：解是否存在？解是否唯一？解是否连续？

假如一个数学模型中的微分方程满足下面 3 个条件：

(1)解必须是存在的(解的存在性问题)；

(2)解必须是唯一确定的(解的唯一性问题)；

(3)解在数值上是连续的(解的稳定性问题)。

那么，该问题被称为“适定的问题”。因此，建立数学模型之后要对它的适定性进行讨论和证明。

在完成以上六个步骤之后，最后应给出问题的边界条件和初始条件，此处不再赘述。

四、流体和岩石的状态方程

渗流是一个运动过程，而且也是一个状态不断变化的过程，由于与渗流有关的物质(岩石、

液体、气体)都有弹性,因此,随着状态变化,物质的力学性质会发生变化。所以,描述由于弹性引起力学性质随状态而变化的方程式称为“状态方程”。

1. 液体的状态方程

由于液体具有压缩性,随着压力降低,体积发生膨胀,同时释放弹性能量,出现弹性力。它的特性可用式(1-1-1)来描述,写成微分形式为:

$$C_L = -\frac{1}{V_L}\frac{dV_L}{dp} \tag{1-1-1}$$

式中 C_L——液体的弹性压缩系数,它表示当压力改变一个单位压力时,单位体积液体体积的变化量,MPa^{-1};

V_L——液体的绝对体积,m^3;

dV_L——压力改变 dp 时相应液体体积的变化,m^3。

从式(1-1-1)得出:弹性作用体现为体积和压力之间的关系。这就是说,对弹性液体来说,它的体积不是绝对不变的,而是随着压力状态变化而变化。因此,表征这种变化关系的是一种压力状态方程。

根据质量守恒原理,在弹性压缩或膨胀时液体质量 M 是不变的,即:

$$M = \rho V_L$$

式中 ρ——流体密度,kg/m^3。

微分上式得:

$$dV_L = -\frac{M}{\rho^2}d\rho \tag{1-1-2}$$

代入式(1-1-1)得到弹性压缩系数 C_L:

$$C_L = \frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dp} \tag{1-1-3}$$

分离变量,C_L 取常数,积分式(1-1-3),并设压力积分区间为(p_a,p),密度积分区间为(ρ_a,ρ),得:

$$\ln\frac{\rho}{\rho_a} = C_L(p - p_a) \tag{1-1-4}$$

$$\rho = \rho_a e^{C_L(p-p_a)} \tag{1-1-5}$$

将式(1-1-5)按麦克劳林级数展开,只取前两项已具有足够的精确性:

$$\rho = \rho_a[1 + C_L(p - p_a)] \tag{1-1-6}$$

式中 p_a——大气压力,0.1013MPa;

ρ_a——大气压力下流体的密度,kg/m^3;

ρ——任一压力 p 时流体的密度,kg/m^3。

同时,质量也可用重度来表示,同样推导出:

$$\gamma = \gamma_0[1 + C_L(p - p_a)] \tag{1-1-7}$$

式(1-1-5)、式(1-1-6)、式(1-1-7)就是弹性液体的状态变化方程。

实际上,实验结果表明 C_L 值是一个变量,它随温度和压力不同略有改变。例如水,当温度从 15℃增至 115℃时,C_L 值开始降低 4%,然后增加,其变化幅度可达 10%;当压力改变时,C_L 值随压力增加而减少;当压力从 7MPa 增到 42.2MPa,C_L 约减少 12%。在地下渗流中,油气层温度大致不变,整个渗流过程可看成等温过程,一般把 C_L 值看成常数,其数量级在 10^{-4}

(1/MPa)左右。因此，渗流过程若是弹性液体，应将液体状态方程列入描述渗流力学过程的数学模型。

2. 气体的状态方程

气体的压缩性比液体大得多。表示气体体积随温度、压力和组分之间变化关系的方程，称为气体状态方程。

对理想气体而言，状态方程服从波义耳—盖吕萨克定律，公式为：

$$pV = RT \tag{1-1-8}$$

或

$$\frac{p}{\gamma} = RT$$

在气层中，温度变化不大，可视为等温过程：

$$\frac{p}{\gamma} = \frac{p_a}{\gamma_a} \tag{1-1-9}$$

式中 p——压力，MPa；

T——温度，K；

V——体积，m^3；

γ——重度，带"a"脚标的是代表 p_a 时的重度，N/m^3；

p_a——大气压力，0.1013MPa；

R——气体常数，对不同性质的气体它具有不同数值。

理想气体的状态方程，只适用于低压高温下的气体。实践中发现，实际气体和理想气体压缩性是不一样的，其原因是：第一，真实气体分子本身都具有大小，当压力高时，分子靠近，气体分子本身的体积和气体所占容积相比已不可忽略；第二，气体分子间有相互作用力，这种作用力当相近时为斥力，而稍远就为引力。而且这种引力的特征是：其大小随距离增加而很快趋于0。因此，真实气体和理想气体相比，在压缩性上出现了偏差。为了描述这种偏差引用真实气体的状态方程：

$$pV = ZRT \tag{1-1-10}$$

式中，Z 称为压缩因子，它是温度和压力的函数。求 Z 系数的方法可参见《油层物理》和《采气工程》等教科书。

3. 岩石的状态方程

岩石的压缩性对渗流过程有两方面的影响：一方面压力变化会引起孔隙大小发生变化，表现为孔隙度是随压力而变化的状态函数；一方面则是由于孔隙大小变化引起渗透率的变化。

由于岩石的压缩性，当压力变化时，岩石的固体骨架体积会压缩或者膨胀，这同时也反映在岩石孔隙体积发生变化上。因而可以把岩石的压缩性看成孔隙度随压力发生变化。

岩石的压缩系数 C_f 表示在地层条件下，压力每改变单位压力时，单位体积岩石中孔隙体积的变化值：

$$C_f = \frac{dV_p}{V_f}\frac{1}{dp} \tag{1-1-11}$$

式中 V_f——岩石体积，m^3；

dV_p——岩石膨胀而使孔隙缩小的体积，m^3。

由于孔隙度 $\phi = \frac{V_p}{V_f}$，所以可写出：

$$d\phi = \frac{dV_p}{V_f} \tag{1-1-12}$$

因而

$$C_f = \frac{d\phi}{dp}; d\phi = C_f dp \tag{1-1-13}$$

在 $p=p_a, \phi=\phi_a; p=p, \phi=\phi$ 条件下积分可得：

$$C_f p = \int_{\phi_a}^{\phi} d\phi$$

因而

$$\phi = \phi_a + C_f(p - p_a) \tag{1-1-14}$$

式中　p_a——大气压力，0.1013MPa；

ϕ_a——大气压力下的孔隙度，小数；

ϕ——压力 p 时的孔隙度，小数。

式(1-1-14)称为弹性孔隙介质的状态方程。它描述了孔隙介质在符合弹性状态变化范围内，孔隙度的变化规律。当压力降低时，孔隙缩小，将孔隙原有体积中的部分流体排挤出去，推向井底而成为驱动流体的弹性能量。由于岩石是由不同矿物组成，所以，不同的岩石，它的压缩系数是不相同的。

如果岩石的弹性变形超过一定限度，在弹性变形外，还会产生另一种变形——塑性变形。这样其总变形由两部分组成：

$$\Delta\varepsilon = \varepsilon_1(\sigma) + \varepsilon_2(\sigma, \tau) \tag{1-1-15}$$

式中　$\varepsilon_1(\sigma)$——弹性变形(瞬时值)，只与压缩系数有关；

$\varepsilon_2(\sigma, \tau)$——随时间过程而发生的塑性变形。

对于埋藏在3000m以下的油气层，考虑塑性变形的孔隙介质状态方程为：

$$\frac{d\phi}{dt} = \beta'_c \frac{dp}{dt} + \frac{p - p_a}{\mu'_a}; \quad \beta'_c = \frac{1}{K'_\phi} \tag{1-1-16}$$

式中　ϕ——孔隙度，小数；

p_a——原始压力，MPa；

p——目前压力，MPa；

t——时间，s；

K'_ϕ, μ'_a——岩石流变学常数。

对于发生塑性变形的岩石，在研究其渗流过程时，需要将塑性变形状态方程考虑到渗流力学的数学模型中去。

五、连续性方程

渗流过程必须遵循质量守恒定律(又称连续性原理)。这个定律一般可以描述为：在地层中任取一个微小的单元体，在单元体内若没有源和汇存在，那么包含在单元体封闭表面之内的液体质量变化应等于同一时间间隔内液体流入质量与流出质量之差。用质量守恒原理建立起来的方程叫连续性方程。在稳定渗流时，单元体内质量应为常数。

在渗流过程中常见的连续性方程有：单相流体渗流的连续性方程；多相渗流连续性方程以及带传质扩散过程的连续性方程。它们都遵守质量守恒定律，这是共同点，但对象不同内容又不完全一样。在渗流数学模型过程中，用它来描述渗流过程中各种力学规律和物理化学规律之间的内在联系，通过置换把运动方程、状态方程和其他方程在质量守恒原理上联系起来，成为一个描述渗流过程全部力学过程的微分方程组(数学模型)。

连续性方程的表现形式是给出运动要素(速度、密度、饱和度、浓度等)随时间和坐标的变化关系,在稳定渗流时是表现这些要素和坐标之间的变化关系。

1. 单相渗流的连续性方程

用质量守恒定律建立连续性方程的方法有 2 种:一种称为微分法(或称无穷小单元体积分析法);另一种叫积分法(或称矢量场方法)。

(1)方法一:用微分法建立连续性方程。

在充满不可压缩液体的均质多孔介质中,任意取一微小的矩形六面体,其三边的长度分别为 dx,dy,dz,此矩形六面体的各个侧面分别与 x 轴,y 轴和 z 轴平行(图 1-1-1)。

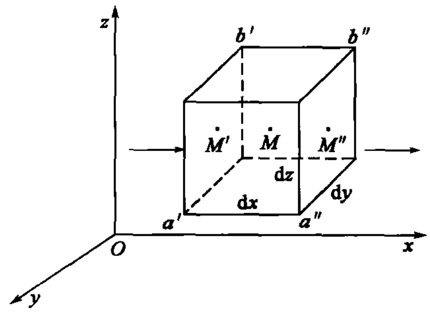


图 1-1-1　单元立方体图

设六面体中心点 M 处的质量渗流速度在各坐标轴上的分量分别为 ρv_x,ρv_y 和 ρv_z,其中 ρ 为液体的密度。

由于 M 点的质量渗流速度在 x 轴方向的分量为 ρv_x,则在 $a'b'$ 侧面中心点 M' 处的质量渗流速度在 x 方向上的分量为 $\rho v_x-\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x}\frac{dx}{2}$,在 $a''b''$ 侧面中心点 M'' 处的质量渗流速度在 x 方向上的分量应为 $\rho v_x+\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x}\frac{dx}{2}$。

由于微小六面体侧面 $a'b'$ 和 $a''b''$ 都很小,因此可将 M' 和 M'' 点上的质量渗流速度分别看成是 $a'b'$ 和 $a''b''$ 侧面上的平均质量渗流速度。这样在 dt 时间内沿 x 轴方向通过 $a'b'$ 侧面流入微小六面体的液体质量为 $\left[\rho v_x-\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x}\frac{dx}{2}\right]dydzdt$。

同时间内沿 x 轴方向通过 $a''b''$ 侧面流出微小六面体的液体质量为 $\left[\rho v_x+\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x}\frac{dx}{2}\right]dydzdt$。所以在 dt 时间内,沿 x 轴方向流入和流出微小六面体的液体质量差值为 $-\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x}dxdydzdt$。同理,可求得在 dt 时间内沿 y 轴方向和 z 轴方向流入和流出微小六面体的液体质量差值分别为 $-\frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y}dxdydzdt$ 和 $-\frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z}dxdydzdt$。这样在 dt 时间内从 x 轴,y 轴和 z 轴 3 个方向上流入和流出微小六面体的液体质量差值为:

$$-\left[\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z}\right]dxdydzdt \tag{1-1-17}$$

下面再分析六面体中在 dt 时间内液体质量的变化情况。

六面体内的孔隙体积为 $\phi dxdydz$,在 t 时刻六面体内的流体质量为 $\rho\phi dxdydz$,其中 ϕ 为孔隙度。则单位时间内流体质量变化率为:

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t}dxdydz \tag{1-1-18}$$

在 $t+dt$ 时刻六面体内液体质量为:

$$\left[\rho\phi+\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t}dt\right]dxdydz \tag{1-1-19}$$

因此 dt 时间内六面体中液体质量总的变化量为:

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\mathrm{d}t \tag{1-1-20}$$

根据质量守恒定律，$\mathrm{d}t$ 时间内六面体总的质量变化应等于六面体在 $\mathrm{d}t$ 时间内流入与流出的质量差，即：

$$-\left[\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\mathrm{d}t=\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\mathrm{d}t \tag{1-1-21}$$

由于，$\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\mathrm{d}t\neq 0$，式(1-1-21)整理可得：

$$-\left[\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z}\right]=\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} \tag{1-1-22}$$

或者写成：

$$\frac{\partial(\phi\rho)}{\partial t}+\mathrm{div}(\rho\boldsymbol{v})=0 \tag{1-1-23}$$

式(1-1-23)就是单相均质可压缩流体在弹性孔隙介质中的质量守恒方程(连续性方程)。$\mathrm{div}(\rho\boldsymbol{v})$ 称为散度：

$$\mathrm{div}(\rho\boldsymbol{v})=\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} \tag{1-1-24}$$

如果是不可压缩流体(即 ρ=常数)，在刚性均质孔隙介质中流动(ϕ=常数，K=常数)，那么 $\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t}=0$，这时的连续性方程为：

$$\mathrm{div}(\boldsymbol{v})=0 \tag{1-1-25}$$

式(1-1-25)的物理意义是：六面体流入流出质量差为 0，即流入六面体的质量与流出的质量相等。它仍然是一个质量守恒方程式。这是不考虑弹性力的连续性方程，由于与时间无关，所以式(1-1-25)又称稳定渗流的连续性方程。

代入运动方程 $v_x=-\frac{K}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x}$，$v_y=-\frac{K}{\mu}\frac{\partial p}{\partial y}$，$v_z=-\frac{K}{\mu}\frac{\partial p}{\partial z}$，式(1-1-25)还可以写成：

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial z^2}=0 \tag{1-1-26}$$

(2)方法二：用积分法建立连续性方程。

自地层中任取体积等于 Ω 的部分，如图 1-1-2 所示，它的表面记为 s，其外法线单位向量记为 $\boldsymbol{n}$，设 M 是体积为 $\mathrm{d}V$ 的单元中任取的一点，则 $\rho(M,t)\phi(M,t)\mathrm{d}V$ 表示 t 时刻 $\mathrm{d}V$ 体积内的质量，而整个 Ω 体积内流体的质量为：

$$\iiint_{\Omega}\rho\phi\mathrm{d}V \tag{1-1-27}$$

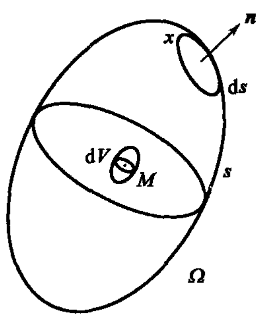


图 1-1-2 地层单元体图

另外，若在 s 表面上的面积单元 $\mathrm{d}s$ 内任取一点 X，则 $\rho(X,t)\boldsymbol{v}(X,t)\boldsymbol{n}(X)\mathrm{d}s$ 表示从时刻 t 开始单位时间内沿法线方向流过 $\mathrm{d}s$ 内截面的流体质量。整个 s 表面流过的流体质量应为：$\oiint_s \rho\boldsymbol{v}\boldsymbol{n}\mathrm{d}s$。

从 t 时刻到 $t+\mathrm{d}t$ 时刻在 Ω 体积内由于地层岩石和液体弹性的作用，ρ 和 ϕ 均发生了变化，因此 Ω 体积内质量也发生了变化，变化的质量为

$$\mathrm{d}t\iiint_{\Omega}\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t}\mathrm{d}V \tag{1-1-28}$$

另一方面，从 t 时刻到 $t+\Delta t$ 时刻通过 s 表面的质量流量（流出的质量）为：

$$\mathrm{d}t\oint\!\!\!\oint_s \rho \boldsymbol{v}\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}s \tag{1-1-29}$$

根据质量守恒定律：包含在单元体封闭表面之内的液体质量变化应等于同一时间间隔内液体流入质量与流出质量之差。即：

$$\mathrm{d}t\iiint_\Omega \frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t}\mathrm{d}V = 0-\mathrm{d}t\oint\!\!\!\oint_s \rho \boldsymbol{v}\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}s \tag{1-1-30}$$

约去 $\mathrm{d}t$，得：

$$\iiint_\Omega \frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t}\mathrm{d}V = -\oint\!\!\!\oint_s \rho \boldsymbol{v}\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}s \tag{1-1-31}$$

根据奥高定律，将闭曲面 s 上的曲面积分化为三重积分：

$$\iiint_\Omega \mathrm{div}(F)\,\mathrm{d}V = \oint\!\!\!\oint_s F\cdot \boldsymbol{n}\,\mathrm{d}s \tag{1-1-32}$$

式（1－1－31）的右边可写为：

$$\oint\!\!\!\oint_s \rho \boldsymbol{v}\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}s = \iiint_\Omega \mathrm{div}(\rho\boldsymbol{v})\,\mathrm{d}V \tag{1-1-33}$$

代入式（1－1－31），得：

$$\iiint_\Omega \frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t}\mathrm{d}V = -\iiint_\Omega \mathrm{div}(\rho\boldsymbol{v})\,\mathrm{d}V \tag{1-1-34}$$

由于 Ω 的任意性并假定被积函数在 Ω 内连续，得到：

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} = -\mathrm{div}(\rho\boldsymbol{v}) \tag{1-1-35}$$

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho\boldsymbol{v}) = 0 \tag{1-1-36}$$

同样得到单相渗流的连续性方程。

2. 两相渗流的连续性方程

（1）油水两相渗流的连续性方程。

在油水两相渗流时，如果认为两相都是不可压缩的液体，且彼此不互相溶解和发生化学作用，若取一个六面体 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 可对油水两相分别写出质量守恒的连续性方程。

对油相来说，在 $\mathrm{d}t$ 时间内单元六面体流出流入的质量差为［推导同式（1－1－17）］：

$$-\left[\frac{\partial(\rho_o v_{ox})}{\partial x}+\frac{\partial(\rho_o v_{oy})}{\partial y}+\frac{\partial(\rho_o v_{oz})}{\partial z}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\mathrm{d}t \tag{1-1-37}$$

在油水两相渗流中，油相经过六面体之所以会发生质量变化，是因为六面体内油被水驱替所引起的结果。若在 t 时刻六面单元体内油的饱和度为 S_o，$t+\mathrm{d}t$ 时刻油的饱和度为 $S_o+\frac{\partial S_o}{\partial t}\mathrm{d}t$，$\mathrm{d}t$ 时间内饱和度变化为 $\frac{\partial S_o}{\partial t}\mathrm{d}t$。在 $\mathrm{d}t$ 时间内整个六面单元体由于饱和度变化引起的油相质量变化总量为：

$$\frac{\partial S_o}{\partial t}\phi\rho_o\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\mathrm{d}t \tag{1-1-38}$$

根据质量守恒定律，上面两式应该相等，得：

$$-\left(\frac{\partial v_{ox}}{\partial x}+\frac{\partial v_{oy}}{\partial y}+\frac{\partial v_{oz}}{\partial z}\right)=\phi\,\frac{\partial S_o}{\partial t} \tag{1-1-39}$$

式中　S——饱和度，小数；

　　v——渗流速度，cm/s。

式(1-1-39)可以写为：

$$\mathrm{div}(\boldsymbol{v}_o)+\phi\frac{\partial S_o}{\partial t}=0 \tag{1-1-40}$$

对于水相，同样可以得出：

$$\mathrm{div}(\boldsymbol{v}_w)+\phi\frac{\partial S_w}{\partial t}=0 \tag{1-1-41}$$

如果考虑油水两相的体积系数 B_o、B_w，则可写成：

$$\mathrm{div}\left(\frac{\boldsymbol{v}_o}{B_o}\right)+\phi\frac{\partial S_o}{\partial t}=0 \tag{1-1-42}$$

$$\mathrm{div}\left(\frac{\boldsymbol{v}_w}{B_w}\right)+\phi\frac{\partial S_w}{\partial t}=0 \tag{1-1-43}$$

这就是油水两相渗流的连续性方程。下标"w"表示水相。

(2)油气两相渗流的连续性方程。

对于油气两相渗流来说，由于气可以溶于油中，所以连续性方程要复杂得多。

在油气两相渗流时，溶有气体的石油经过单元地层，由于压力降低而分出气体，因此，油的质量发生变化，在 $\mathrm{d}t$ 时间内流入流出的重量差为：

$$\mathrm{div}[(\gamma_{og}-G)\boldsymbol{v}_o]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\mathrm{d}t \tag{1-1-44}$$

由于气体分离出来，在单元体内油被气相替代，因此，油相饱和度也将发生变化，在单元体孔隙内油相重量随时间变化为：

$$-\phi\frac{\partial}{\partial t}[(\gamma_{og}-G)S_o]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\mathrm{d}t \tag{1-1-45}$$

根据质量守恒定律，上面两式应该相等。得到油气两相渗流时，油相的连续性方程：

$$\mathrm{div}[(\gamma_{og}-G)\boldsymbol{v}_o]=-\phi\frac{\partial}{\partial t}[(\gamma_{og}-G)S_o] \tag{1-1-46}$$

对于气相来说，应包括溶解气及已分离出的自由气，在 $\mathrm{d}t$ 时间内这两部分气体流过单元六面体地层的重量变化为：

自由气　　$\mathrm{div}(\gamma_g\boldsymbol{v}_g)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\mathrm{d}t$

溶解气　　$\mathrm{div}(G\boldsymbol{v}_o)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\mathrm{d}t$

气相通过单元地层，重量发生了变化必然使单位地层内的气相饱和度发生变化，因而单元地层六面体内经 $\mathrm{d}t$ 时间的重量变化为：$-\phi\frac{\partial}{\partial t}[GS_o+\gamma_g(1-S_o)]\mathrm{d}t\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$。

根据质量守恒定律，$\mathrm{d}t$ 时间内气相流入流出单元地层的重量变化(自由气+溶解气)等于 $\mathrm{d}t$ 时间单元地层内由于气相饱和度的变化引起的重量变化。即：

$$\mathrm{div}(\gamma_g\boldsymbol{v}_g)+\mathrm{div}(G\boldsymbol{v}_o)=-\phi\frac{\partial}{\partial t}[GS_o+\gamma_g(1-S_o)] \tag{1-1-47}$$

式中　ϕ——地层孔隙度，小数；

　　S_o——孔隙内油相饱和度，小数；