21世纪高等学校研究生教材

数学学科硕士研究生系列教材

李群和李代数

LIQUN HE LIDAISHU

北京师范大学数学科学学院　主　编

赵旭安/编著

北京师范大学出版集团
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP
北京师范大学出版社

21世纪高等学校研究生教材

数学学科硕士研究生系列教材

李群和李代数

LIQUN HE LIDAISHU

北京师范大学数学科学学院　主　编

赵旭安/编著

北京师范大学出版集团
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP
北京师范大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

李群和李代数／赵旭安编著．—北京：北京师范大学出版社，2012.9

（21世纪高等学校研究生教材　数学学科硕士研究生系列教材）

ISBN 978-7-303-14870-7

Ⅰ．①李…　Ⅱ．①赵…　Ⅲ．①李群－研究生－教材②李代数－研究生－教材　Ⅳ．O152.5

中国版本图书馆CIP数据核字（2012）第141446号

营销中心电话　010-58802181 58805532
北师大出版社高等教育分社网　http://gaojiao.bnup.com.cn
电子信箱　beishida168@126.com

出版发行：北京师范大学出版社 www.bnup.com.cn
北京新街口外大街19号
邮政编码：100875
印　　刷：北京中印联印务有限公司
经　　销：全国新华书店
开　　本：170 mm × 230 mm
印　　张：12
字　　数：190千字
版　　次：2012年9月第1版
印　　次：2012年9月第1次印刷
定　　价：20.00元

策划编辑：岳昌庆　　　责任编辑：岳昌庆　钱　超
美术编辑：毛　佳　　　装帧设计：毛　佳
责任校对：李　菡　　　责任印制：李　啸

前 言

研究生教材建设是研究生培养工作的重要环节，是研究生教学改革措施之一，也是衡量学校研究生教学水平和特色的重要依据. 纵观我院的研究生教育，可分为几个阶段：1953～1960 年是我院研究生教育初创时期，招生为代数、分析、几何等方向的 10 个研究生班；1962～1965 年改为招收少量的硕士研究生；1966～1976 年“文化大革命”时期，研究生停止招生. 1978 年，我院恢复招收硕士研究生，研究生所学课程除外语和自然辩证法公共课程外，主要学习几门专业课. 每年导师根据招生情况，分别制订每个研究生的培养计划. 从 1982 年开始，首次开展制订攻读硕士学位研究生培养方案的工作. 为拓宽研究生的知识面，对每届研究生开设 5 门专业基础理论课：泛函分析、抽象代数、实分析、复分析、微分流形，每人至少选 3 门；从 1983 年起，增加代数拓扑，共 6 门基础理论课，安排有经验的教师讲课且相对固定，考试要求严格，使研究生受到正规的训练. 由于不同院校开设的本科生课程有一定的差距，经过这个阶段的学习后，基本上达到了一个相同的水平，为从本科生到研究生基础水平过渡提供了保障. 在 1992 年修订教学计划时，增加了概率论基础和计算机基础. 这

样，基础理论课共开设8门．从1997学年开始，规定研究生每人至少选4门．从2000年开始，增加现代分析基础、偏微分方程、李群、随机过程．从2007学年开始，增加高等统计学、最优化理论与算法、非线性泛函分析、动力系统基础．规定研究生每人至少选5门．经过30多年系统的研究生培养工作，研究生教育正在逐步走向正规．在此期间，学院在学科建设、人才培养和教学实践中积累了比较丰富的培养经验，将这些经验落实并贯彻到研究生教材编著中去是大有益处的．

随着研究生的扩招，招收研究生的数量越来越大．再加上培养方案的改革，出版研究生系列教材已经提到议事日程上来．在20世纪90年代，北京师范大学出版社已经出版了几部基础课教材：泛函分析、实分析、随机过程等，但未系统策划出版系列教材．2005年5月，由北京师范大学数学科学学院李仲来教授和北京师范大学出版社理科编辑部王松浦、岳昌庆进行了沟通和协商，由北京师范大学数学科学学院主编（李仲来教授负责），准备对北京师范大学数学科学学院教师目前使用的北京师范大学出版社出版的几部教材进行修订后再版，进一步计划用几年时间，出版数学一级学科硕士研究生的基础课程系列教材．

我们希望使用这些教材的校内外专家学者和广大读者，提出宝贵的修改意见，使其不断改进和完善．

本套教材可供高等院校数学一级学科硕士研究生和课程与教学论（数学）等硕士研究生使用和参考．（李仲来执笔）

北京师范大学数学科学学院

2011-12-06

作者的话

我最早对李群的了解，是在北京大学读研究生的时候开始的. 那时用的教材是项武义先生的《李群讲义》. 2003 年到 2004 年左右，因为我的研究工作中需要用到较多的李群和李代数方面的知识，所以对李群和李代数的理论产生了浓厚的兴趣. 之后我开始在北京师范大学数学系担任研究生的“李群和李代数”课程的教学工作，在教学中，选用的是严志达和许以超先生所著的《李群及其李代数》一书. 这两本书，对我来说都是很好的教材，它们的作者也都是国际知名的学者. 项武义先生的书内容丰富，李群基本理论中的主要方面都涉及了，我对李群的理解就是从这本书开始的. 这本书中对于李群和李代数的几何方面，有很多在我看来精辟的见解. 但是对于怎么从李群过渡到李代数，商空间和商群上的解析结构和 Cartan 闭子群引理等，这本书都没有仔细交代. 我想如果自己要写一本关于李群基本理论的书的话，那么这部分应该用一章的篇幅来介绍. 严志达和许以超先生的书中的内容，涵盖了半单李群和李代数理论的基本方面，特别是对紧李群和紧李代数叙述很详细. 我用这本书教过七届学生，从该书中可以看出两位先生深厚的学术造诣和严谨的写作风格. 学生对书中不大满意的地方是比较多地采用了局部坐标下的表达方式，这大概是由于该书出版比较早的原因. 我想应该尽量用现代的、学生习惯的整体的语言来重新表述一下.

本书的写作，我虽然花费了很多的时间和精力，

但是仅限于整理和表达方面，这些都是烦琐细碎的工作．书中很多内容都借鉴了上面两本书，如果读者在本书中看到和那两本书相似的内容，那么也是很自然的事情．

根据教学工作中自己的感受和学生的反应及建议，我意识到，一本研究生的教材，应该具备下面一些要素：

一、和书的内容匹配得很好的一定量的习题．在教学中会观察到如果缺少了课后习题，那么学生对学习内容的把握会欠缺很多．像李群和李代数这样的对学生在拓扑、几何、分析和代数方面的基础要求都比较高的课程，尤其是如此．

二、理论的表述和证明一定要简单、容易、直观．在写书的过程中，这方面的考虑是我时时都提醒自己的，不知道能不能达到期望的效果．我希望学过一学期研究生的微分几何和抽象代数的学生能够觉得比较容易接受．

三、书中的内容不要太多．因为本书的内容是专门为一年级下学期的研究生“李群”课程（每周 3 学时）设计的，所以我觉得篇幅不要超过 180 页．出于这方面的原因，像关于紧群的 Peter-Weyl 定理、Weyl 特征公式以及实半单李代数的分类等内容都只能放弃．另外还有一些其他的准备工具，如 Frobenius 定理、基本群、微分形式和流形上的积分，自己都尽量地用最简易的方式引进；或者取用权宜之计避开不谈．这些都是研究生数学课程中的标准内容，感兴趣的学生可以自行查阅．

在写作的开始阶段，鉴于想要写的这本书篇幅并不大，我以为能够容易的完成．在写作过程中，才发现这对自己真的不是一件容易的事．首先，李群和李代数不是我的专业；其次，我的写作和表述的能力本来就不高，尤其是对一次次的反复修改这样的工作，我一直有一种难以抑制的厌烦情绪．在写作过程中，后面谈到的事情，前面都得交代清楚．前面用的符号和后面用的符号也得协调一致，这些细节问题让我很伤脑筋．到今天这本书总算完成了，具体完成的怎么样，完全交给读者来评判．

这本书本来打算两年完成的，实际上却花了六年的时间．我非常感激李仲来教授，是他把这项工作交给我，并容忍我这么久才完成．另外感谢几何教研室的同事黄红博士，他仔细阅读了书稿，并提出了很多修改意见．

我还要感谢我的父母，他们为我腾出很多时间，让我来完成手中的工作．还要特别感谢我的妻子对我的理解、鼓励和支持．这本书的完成，她也有很多间接的付出．最后要感谢我的女儿，由于要赶书稿，我很多时候都不能够陪她玩．

本书中的一些符号和约定

$\mathbf{N}$，$\mathbf{Z}$，$\mathbf{Q}$，$\mathbf{R}$，$\mathbf{C}$，$\mathbf{H}$ 分别表示自然数、整数、有理数、实数、复数和四元数的集合.

说到线性变换都是指某个向量空间 V 到自身的可逆线性映射.

dim 表示维数

ker 表示同态映射的核

Coker 表示同态的余核

det 表示矩阵或线性自映射的行列式

Tr 表示线性自映射或矩阵的迹

$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的转置

$\boldsymbol{I}_n$ 表示 $n\times n$ 单位矩阵

$\mathbf{Z}^{+}$，$\mathbf{R}^{+}$ 分别表示非负整数，非负实数的集合（包含 0）

$\mathbf{R}^{*}$，$\mathbf{C}^{*}$ 分别表示非 0 实数和复数的集合

$\varphi|_H$ 表示映射 φ 在子空间 H 上的限制映射

$V_1\oplus V_2$，$V_1\otimes V_2$ 分别表示向量空间的直和和张量积

$\Lambda^k(V)$ 表示向量空间的 k 次外幂

id 表示恒同映射

$\mathrm{diag}[x_1, x_2, \cdots, x_n]$ 表示对角元素为 x_1，x_2，…，x_n 的对角矩阵

Jf 表示映射 f 的 Jacobi 矩阵

$\bigsqcup$ 表示集合的不交并

G_e 表示拓扑群或李群的单位元连通分支

$$\delta_{ij}=\begin{cases}1, & i=j;\\ 0, & i\neq j\end{cases}$$

目 录

绪论

李群的理论发端于 19 世纪 70 年代挪威数学家 Sophus Lie 的工作. 到 1884 年,Lie 已经发表了他在李群理论方面的一些主要结果. 同一年,年轻的德国数学家 Friedrich Engel 开始和 Lie 一起工作. 他们合作完成了三卷本教程 Theorie der Transformationsgruppen,分别在 1888 年、1890 年和 1893 年出版. 从开始,Lie 的想法就不是孤立于数学其他分支的. 实际上,他的兴趣在几何和微分方程上. Lie 的想法是系统的发展关于微分方程的对称性的理论,就像 Galois 对代数方程所做的那样. 当时的数学工作表明很多与特殊函数和正交多项式有关的方程都来自于群的对称性. 19 世纪的数学的三大主题:Galois 的群和对称性的代数概念、以 Poisson 和 Jacobi 为首的对力学中微分方程的几何理论及其明确的解的探求和以 Plücker、Möbius、Grassmann 及 Riemann 等人为代表的对几何学的新的理解,都在李群这一概念之下汇合了.

虽然 Lie 当之无愧地被称为李群理论的奠基人,但是李群的结构理论的重大的进步是和 Wilhelm Killing 分不开的. Killing 的工作对随后数学的发展

产生了深刻的影响. 1888 年,Killing 发表了他的名为 Die Zusammensetzung der stetigen endichen Transformations gruppen 的一系列文章中的第一篇. 之后他的工作被 Elie Cartan 进一步发展,导致了后来的半单李代数的分类、Cartan 的对称空间理论和 Hermann Weyl 的关于紧和半单李群的最高权表示等. 从 Weyl 开始李群理论开始成熟,Weyl 不仅对半单李群及其表示进行了系统的研究,还把李群理论和量子力学联系起来,并且明确地区分了李代数(无穷小李群)和李群并开始研究李群的拓扑性质. Chevalley 最早系统的把李群理论用现代数学的语言予以重新整理.

李群和李代数是现代数学中的基本的研究对象,在整个数学大厦中占有重要的位置. 如果把整个数学看成一个按重要性从中心往外发展的一个系统,那么李群和李代数必定位于这一系统的中心附近.

李群是一个群,其上有拓扑,又是一个解析流形. 它上面同时包含代数结构、拓扑结构和解析结构,这些结构满足一些相容性条件. 在李群上,可以同时研究群结构、拓扑结构和几何结构. 李群是非线性的数学对象,李代数是李群结构的自然的线性化. 李群和李代数处于代数、拓扑、几何和分析的结合点上.

李群和李代数与其他的很多数学分支都有各种各样的深刻联系,对它们的研究也可以从不同的方向和角度来展开. 对李群和李代数,可以用微分几何的方法来研究李群,也可以从纯代数的观点来研究李代数及其表示理论. 李群及齐性空间上的调和分析,代数群的研究等,都体现了不同的研究方法. 当然也可以将各种方法融会贯通,相互借鉴.

按照 F. Klein 的观点,几何学就是研究在变换群作用下的不变量和不变性质的学问,而几何中的变换群通常都是李群. 比如,若在 $\mathbf{R}^m$ 上选取等距变换群,则有欧氏几何;若选取仿射变换群,则有仿射几何;若将 $\mathbf{R}^m$ 扩充为射影空间,选取射影变换群,则有射影几何. 由此足以看出李群在几何学研究中的统帅作用.

在几何和拓扑学中,李群及其齐性空间,对称空间都是重要的研究对象. 在代数学中,与李群和李代数相关的根系,Weyl 群,Hecke 代数,Chevalley 群等都是代数中关心的对象. 在有限单群的分类中,大量的单群是李型单群.

在物理学中,因为相对性原理具有基本的重要性,它需要借助变换的概念来描述,所以在这里也少不了李群的角色. 若考虑伽利略变换,可以得到经典牛顿力学;考虑洛伦兹群和 Poincaré 变换群,则是狭义相对论. 随着 20 世纪数学和物理学,尤其是量子力学和广义相对论的发展,人们越来越深刻地认识到李群理论在现代数学、物理中的重要作用. 纤维丛和规范理论,量子场论及量子引力理论的发展,离开李群和李代数及其相关的概念,是不可想象的. 李群和李代数及其表示理论已经深深地扎根于理论物理中,发挥着深刻而重要的作用.

在近年的发展中,李群和李代数及其推广,Kac-Moody 群和代数,李超代数,量子群等的研究更是全面地展开,这些充分展示了李群和李代数理论的重要性.

第1章 预备知识

本章前一部分内容简要地介绍一些微分几何方面的预备知识，如光滑流形和光滑映射、子流形、流形上的向量场和外微分形式、流形上的积分等基本概念；后一部分介绍与拓扑群及其在拓扑空间上的作用相关的一些基本事实，特别是介绍了关于群表示理论的一些基本概念. 同时，也约定后面要用到的一些记号.

§1.1　光滑流形和光滑映射

这一节介绍光滑流形及光滑流形上的光滑映射、光滑子流形等基本概念.光滑流形是欧氏空间的概念的自然推广,从局部上来看,它同胚于欧氏空间的开集;从整体上来看,可以认为它是一片一片的欧氏空间的开集通过光滑的黏合得到的.

§1.1.1　光滑流形

我们假定读者了解 m 维欧氏空间 $\mathbf{R}^m$ 中的开集 U 上的实值光滑函数和实值解析函数的定义,以及 $\mathbf{R}^m$ 中的开集 U 映到 $\mathbf{R}^n$ 中的开集 V 上的光滑映射和解析映射的定义.

定义 1.1.1　设 M 是拓扑空间,若有 M 的开集 U 及 U 到 m 维欧氏空间 $\mathbf{R}^m$ 的映射,使得 $\phi:U\to\phi(U)$ 是拓扑空间的同胚,则称 (U,ϕ) 是 M 上的一个局部坐标系,称 U 是 M 上的一个局部坐标邻域,ϕ 为 M 上的局部坐标映射.

设 $\pi_i:\mathbf{R}^m\to\mathbf{R},x=(x^1,x^2,\cdots,x^m)\mapsto x^i$ 为到第 i 个坐标的投影映射,令 $\phi^i=\pi_i\circ\phi:U\to\mathbf{R}$,则 ϕ 可以写成分量形式 $\phi=(\phi^1,\phi^2,\cdots,\phi^m)$.设 $p\in U$ 的在局部坐标映射 ϕ 下的像为 $\phi(p)=x=(x^1,x^2,\cdots,x^m)\in\mathbf{R}^m$,则 $x^1=\phi^1(p),x^2=\phi^2(p),\cdots,x^m=\phi^m(p)$,$\phi(p)$ 称为 p 点在局部坐标系 (U,ϕ) 下的坐标,特别的 $\phi^i(p)$ 称为 p 点的第 i 个坐标,$1\leqslant i\leqslant m$.注意在局部坐标系 (U,ϕ) 下,坐标只对坐标邻域 U 中的点有定义.

设 f 是定义在 M 的某个包含 U 的子集上的实值函数,则复合映射 $\hat{f}=f\circ\phi^{-1}:\phi(U)\to\mathbf{R}$ 称为 f 在局部坐标系 (U,ϕ) 下的表示函数.$\hat{f}$ 是欧氏空间开集 $\phi(U)$ 上的实值函数,若 $\hat{f}$ 是光滑函数,则称 f 关于局部坐标系 (U,ϕ) 是光滑函数.

设 $(U_1,\phi_1),(U_2,\phi_2)$ 是 M 上的两个局部坐标系,$p\in U_1\cap U_2$ 在这两个局部坐标系下的局部坐标都有意义,设为 $\phi_1(p),\phi_2(p)$.(U_1,ϕ_1) 到 (U_2,ϕ_2) 的局部坐标变换映射定义为 $\phi_2\circ\phi_1^{-1}:\phi_1(U_1\cap U_2)\to\phi_2(U_1\cap U_2)$,它将 p 点在局部坐标系 (U_1,ϕ_1) 下的坐标 $\phi_1(p)$ 映为 p 点在局部坐标系 (U_2,ϕ_2) 下的坐标 $\phi_2(p)$.类似的有局部坐标变换映射 $\phi_1\circ\phi_2^{-1}$.M 上的两个局部坐标系 (U_1,ϕ_1) 和 (U_2,ϕ_2) 称为光滑相容的局部坐标系,若局部坐标变换 $\phi_2\circ\phi_1^{-1}$ 和 $\phi_1\circ\phi_2^{-1}$ 都是光滑映射.

下面利用这些概念来定义光滑流形.

定义 1.1.2 设 M 为 Hausdorff 拓扑空间(即对 M 中的任意两点 $p\neq q$,存在包含它们的不相交的开邻域),若 M 上有一组局部坐标系 $\mathcal{U}=\{(U_\alpha,\phi_\alpha)\mid\alpha\in\mathcal{A}\}$,这里 $\mathcal{A}$ 是指标集. U_α 为 M 中的开集,$\phi_\alpha:U_\alpha\to\mathbf{R}^m$ 是到欧氏空间中的开集的同胚映射,满足

(1) $\bigcup\limits_{\alpha\in\mathcal{A}}U_\alpha=M$.

(2)对任意 $\alpha,\beta\in\mathcal{A}$,局部坐标系 (U_α,ϕ_α) 和 (U_β,ϕ_β) 是光滑相容的,即当 $U_\alpha\cap U_\beta\neq\varnothing$ 时,局部坐标变换 $\phi_\beta\circ\phi_\alpha^{-1}:\phi_\alpha(U_\alpha\cap U_\beta)\to\phi_\beta(U_\alpha\cap U_\beta)$ 是光滑映射.

则称 $\mathcal{U}$ 为 M 上的一个光滑结构,称 $(M,\mathcal{U})$ 为 m 维光滑流形,或者直接称 M 为光滑流形.

在上面的定义中,如果要求局部坐标变换是实解析映射(即在定义域中的每一点附近都可以展成收敛的实系数幂级数),那么称 $(M,\mathcal{U})$ 为实解析流形. 因为实解析函数是光滑函数,所以实解析流形也是光滑流形. 如果在上面定义中要求 $\mathcal{U}$ 中的每个局部坐标系 (U_α,ϕ_α) 的局部坐标映射 ϕ_α 都是 U_α 到 $\mathbf{C}^m$ 中的开集的同胚映射,而且坐标变换是复解析映射,那么称 M 为 m 维复解析流形,简称复流形.

流形 M 上的两个光滑结构 $\mathcal{U},\mathcal{V}$ 等价,是指对任意 $(U_\alpha,\phi_\alpha)\in\mathcal{U}$ 和 $(V_\beta,\psi_\beta)\in\mathcal{V}$,$(U_\alpha,\phi_\alpha)$ 和 (V_β,ψ_β) 都是 M 上相容的局部坐标系. 以后 M 上等价的两个光滑结构,就看成同样的光滑结构. 在有些书中将前述定义的光滑流形称作预光滑流形,在相应的光滑结构 $\mathcal{U}$ 中加入所有与 $\mathcal{U}$ 中的局部坐标系都相容的局部坐标系后得到一个与 $\mathcal{U}$ 等价的最大的光滑结构 $\widetilde{\mathcal{U}}$,$(M,\widetilde{\mathcal{U}})$ 才称为光滑流形. 我们不做这样的区分,但是需要注意采用 $\widetilde{\mathcal{U}}$ 后局部坐标系的选取就具有更大的灵活性.

例 1.1.3 n 维欧氏空间 $\mathbf{R}^n$ 为实解析流形,它的维数为 n. 对 $\mathbf{R}^n$,只有一个局部坐标系 $(\mathbf{R}^n,\mathrm{id})$,此时没有相容性的问题. 这样给出的解析结构称为 $\mathbf{R}^n$ 上的标准的解析结构.

类似的 $\mathbf{C}^n$ 上有标准的复 n 维解析流形的结构.

例 1.1.4 n 维单位球面

$$S^n=\{x=(x^0,x^1,\cdots,x^n)\mid(x^0)^2+(x^1)^2+\cdots+(x^n)^2=1\}$$

是实解析流形.

下面给出一个解析结构 $\mathcal{U}$,它包含 $2n+2$ 个局部坐标系:

$$(U_i^+,\phi_i^+),(U_i^-,\phi_i^-),0\leqslant i\leqslant n,$$

其中 $U_i^+=\{x\in S^n\mid x^i>0\}$,$\phi_i^+(x)=(x^0,x^1,\cdots,\hat{x}^i,\cdots,x^n)$,