顾问/梅向明 蔡上鹤

北京第四中学
北京第五中学
北京第101中学
北京大学附中 等校
特级、高级教师编著

名师名校

升学辅导与训练

高三

数学

语文出版社

顾问　梅向明　蔡上鹤

名师名校升学辅导与训练

（高三·数学）

编著　王建民　董世奎　邓　均　等

YUWEN CHUBANSHE
语 文 出 版 社

MING SHI MING XIAO SHENG XUE FUDAO YU XUNLIAN
名 师 名 校 升 学 辅 导 与 训 练
（高三·数学）
*
语文出版社出版
100010　北京朝阳门南小街51号
新华书店经销　世界知识印刷厂印刷
*
789×1092毫米　1/32　10.875印张　235千字
1997年1月第1版　1997年1月第1次印刷
印数：1—10,000　定价：10.70元
ISBN7-80126-149-6/G·113

目　　录

一、代数部分

（一）知识点和考试要求

1. 幂函数、指数函数和对数函数

考试内容：

集合、子集、交集、并集.

映射、函数(函数的记号、定义域、值域).

幂函数、函数的单调性，函数的奇偶性.

反函数、互为反函数的函数图象间的关系.

指数函数、对数函数、换底公式、简单的对数方程和指数方程.

考试要求：

(1) 理解集合、子集、交集、并集、补集的概念；了解空集和全集的意义；了解属于、包含、相等关系的意义，能掌握有关的术语和符号，能正确地表示一些较简单的集合.

(2) 了解映射的概念，在此基础上理解函数及其有关的概念，掌握互为反函数图象间的关系.

(3) 理解函数的单调性和奇偶性的概念，并能判断一些简单函数的单调性和奇偶性，能利用函数的奇偶性与函数图象的对称性的关系描绘函数图象.

(4) 掌握幂函数、指数函数，对数函数的概念及其图象和

性质，并会解简单的指数方程和对数方程.

2. 不等式

考试内容：

不等式、不等式的性质、不等式的证明、不等式的解法，含绝对值的不等式.

考试要求：

（1） 掌握不等式的性质及其证明，掌握证明不等式的几种常用方法，掌握两个（或三个）正数的算术平均数不小于它们的几何平均数这一定理，并能运用上述性质、定理和方法解决一些问题.

（2） 在熟练掌握一元一次不等式（组）、一元二次不等式的解法的基础上初步掌握其他一些简单的不等式的解法.

（3） 会用不等式

$$|a|-|b|\leqslant|a+b|\leqslant|a|+|b|$$

解一些简单问题.

3. 数列、极限、数学归纳法

考试内容：

数列、等差数列及其通项公式、前 n 项和的公式、等比数列及其通项公式、前 n 项和的公式.

数列的极限及其四则运算.

数学归纳法及其应用.

考试要求：

（1） 理解数列的有关概念；了解递推公式是给出数列的一种方法，并能根据递推公式写出数列的前 n 项.

（2） 掌握等差数列与等比数列的概念、通项公式、前 n 项和的公式，并能运用这些公式解决一些问题.

(3) 了解数列极限的意义，掌握极限的四则运算法则，会求公比的绝对值小于1的无穷等比数列前n项和的极限.

(4) 了解数学归纳法的原理，并能用数学归纳法证明一些简单问题.

4. 复数

考试内容：

数的概念的发展、复数的有关概念、复数的向量表示.

复数的加法和减法，复数的乘法和除法，复数的三角形式，复数三角形式的乘法、乘方、除法、开方.

考试要求：

(1) 理解复数及其有关概念. 掌握复数的代数、几何、三角表示及其转换.

(2) 掌握复数的运算法则，能正确地进行复数的运算，并理解复数运算的几何意义.

(3) 掌握在复数集中解一元二次方程和二项方程的方法.

5. 排列、组合、二项式定理

考试内容：

加法原理与乘法原理.

排列、排列种数公式.

组合、组合数公式，组合数的两个性质.

二项式定理，二项展开式的性质.

考试要求：

(1) 掌握加法原理及乘法原理，并能用这两个原理分析和解决一些简单的问题.

(2) 理解排列、组合的意义. 掌握排列数、组合数的计算

公式和组合数的性质，并能用它们解决一些简单的问题.

（3）掌握二项式定理和二项式系数的性质，并能用它们计算和论证一些简单的问题.

（二）例题精选

例 1　函数 $y=\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(x-1)+2}$的定义域是________.

解：　这是一个复合函数的定义域$\Leftrightarrow\log_{\frac{1}{2}}(x-1)+2\geqslant 0$的解.

$$\therefore\ \begin{cases}x-1\leqslant 4, & \therefore\ 1<x\leqslant 5\\ x-1>0.\end{cases}$$

所求定义域为 $x\in(1,5]$.

说明　复合函数定义域的求法就是根据外函数的要求布列关于内函数的不等式解之即可.

例 2　求函数 $f(x)=\sqrt{\sin 2x}+\lg(25-x^2)$的定义域.

解：　所求定义域$\Leftrightarrow\begin{cases}\sin 2x\geqslant 0,\\ 25-x^2>0.\end{cases}$

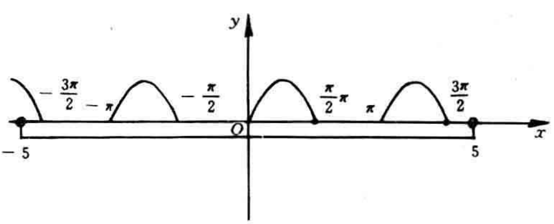

图 1-1

由图 1-1 所求定义域是$(-5,-\frac{3\pi}{2}]\cup[-\pi,-\frac{\pi}{2}]\cup[0,\frac{\pi}{2}]\cup[\pi,\frac{3\pi}{2}]$.

例 3 求下列函数的值域.

(1) $y=\frac{x^2-1}{x^2-5x+4}$; (2) $y=\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$;

(3) $y=\frac{1}{x^2+4x-5}$.

解:(1)

解法(一) 注意到 $y=\frac{(x-1)(x+1)}{(x-4)(x-1)}=\frac{x+1}{x-4}=\frac{5}{x-4}+1(x\neq1)$. 这是一个求复合函数的值域的问题,可由定义域出发,由里往外逐层求出外函数的值域,直至最外层函数的值域即为所求.

$\because$ $x\in(-\infty,1)\cup(1,4)\cup(4,+\infty)$,

$\therefore$ $x-4\in(-\infty,-3)\cup(-3,0)\cup(0,+\infty)$,

$\therefore$ $\frac{1}{x-4}\in\left(-\frac{1}{3},0\right)\cup\left(-\infty,-\frac{1}{3}\right)\cup(0,+\infty)$,

$\therefore$ $\frac{5}{x-4}\in\left(-\frac{5}{3},0\right)\cup\left(-\infty,-\frac{5}{3}\right)\cup(0,+\infty)$,

$\therefore$ $1+\frac{5}{x-4}\in\left(-\frac{2}{3},1\right)\cup\left(-\infty,-\frac{2}{3}\right)\cup(1,+\infty)$,

所求值域为 $y\in\left(-\infty,-\frac{2}{3}\right)\cup\left(-\frac{2}{3},1\right)\cup(1,+\infty)$,

解法(二) 也可用扣除法

当 $x\neq1$ 时,$y\neq-\frac{2}{3}$;当 $x\neq4$ 时,$y\neq1$.

所以 $y\in\left(-\infty,-\frac{2}{3}\right)\cup\left(-\frac{2}{3},1\right)\cup(1,+\infty)$.

说明:本题同学们很容易用判别式法求值域,其结果是 $y\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$. 请指出错误的原因是什么?

(2), $y=-1+\dfrac{2}{1-\sqrt{x}}$

解法(一) 函数定义域为 $x\in[0,1)\cup(1,+\infty)$

$\therefore\quad \sqrt{x}\in[0,1)\cup(1,+\infty)$,

$\therefore\quad -\sqrt{x}\in[-1,0)\cup(-\infty,-1)$,

$\therefore\quad 1-\sqrt{x}\in(0,1]\cup(-\infty,0)$,

$\therefore\quad \dfrac{1}{1-\sqrt{x}}\in[1,+\infty)\cup(-\infty,0)$,

$\therefore\quad -1+\dfrac{2}{1-\sqrt{x}}\in[1,+\infty)\cup(-\infty,-1)$.

所求值域是 $y\in(-\infty,-1)\cup[1,+\infty)$.

解法(二)

$\because\quad y=\dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$,

$\therefore\quad \dfrac{y-1}{y+1}=\sqrt{x}\geqslant 0$, $\quad\therefore\quad y\geqslant 1$ 或 $y<-1$.

所求值域为 $y\in(-\infty,-1)\cup[1,+\infty)$.

(3), 注意到 $x^2+4x-5=(x+2)^2-6\geqslant -6$, 且 $x^2+4x-5\neq 0$.

$\therefore\quad x^2+4x-5\in[-6,0)\cup(0,+\infty)$

$\therefore\quad \dfrac{1}{x^2+4x-5}\in\left(-\infty,-\dfrac{1}{6}\right]\cup(0,+\infty)$.

所求值域为 $y\in\left(-\infty,-\dfrac{1}{6}\right]\cup(0,+\infty)$.

说明:由(3)可知:当一个复合函数的某一层函数的值域易求时,可由此起步逐层往外求出外函数的值域,直至最外层函数的值域即为所求.

例 4 已知 $0<a<1, b=a^a, C=b^a, d=a^b$，则 b,c,d 的大小关系是 ( ).

(A) $c>b>d$ (B) $b>c>d$

(C) $c>d>b$ (D) $c=d>b$

解： 这是三个幂值的比较大小，应尽可能化为同底幂或同指数幂，于是有

解法(一) 由已知 $b=a^a, C=a^{(a^2)}, d=a^{a^a}$、显然 b,c,d 可看成函数 $y=a^x$ 的三个函数值，其大小取决于 a,a^2,a^a 的大小.

在 $y=a^x$ 中，$\because$ $0<a<1$，$\therefore$ $y=a^x$ 在 R 上递减，

又 $a<1<2$，

$\therefore$ $a^a>a>a^2$，$\therefore$ $a^{a^a}<a^a<a^{a^2}$

即 $d<b<c$.

解法(二) 在函数 $y=a^x$ 中，

$\because$ $0<a<1$，$\therefore$ $y=a^x$ 在 R 上递减，

又 $0<a<1$，$\therefore$ $a<a^a$，即 $a<b$

$\therefore$ $a^a>a^b$ 即 $b>d$. ①

在函数 $y=x^a$ 中，

$\because$ $0<a<1$，$\therefore$ $y=x^a$ 在 $(0,+\infty)$ 上递增，

又 $0<a<b$ $\therefore$ $a^a<b^a$，即 $b<c$ ②

由①，②得 $d<b<c$.

例 5 当 $x\in(0,\frac{1}{2})$ 时，下列各式中正确的是( )

(A) $\log_x(1-x)>1$ (B) $(1+x)^{\frac{3}{2}}<(1-x)^{\frac{3}{2}}$

(C) $\cos(1+x)>\text{cox}(1-x)$ (D) $\left(\frac{1}{2}\right)^{1+x}>\left(\frac{1}{2}\right)^{2-x}$

解：$\because\ 0<x<\frac{1}{2}$，$\therefore\ 1-x>x$，

$\therefore\ 0<1-x<1+x<\frac{3}{2}$，

又 $y=\log_x u$ 在$(0,+\infty)$上递减，

$\therefore\ \log_x^{(1-x)}<\log_x x=1$，即(A)不成立；

又 $y=x^{\frac{3}{2}}$在$(0,+\infty)$上递增，

$\therefore\ (1-x)^{\frac{3}{2}}<(1+x)^{\frac{3}{2}}$，即(B)不成立，

又 $y=\cos u$ 在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$上递减，

$\therefore\ \cos(1-x)>\cos(1+x)$，即(C)不成立；

又 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^u$ 在 R 上递减，$1+x<2-x$.

$\therefore\ \left(\frac{1}{2}\right)^{1+x}>\left(\frac{1}{2}\right)^{2-x}$，所以应选(D).

例 6 若偶函数 $y=f(x)$在区间$(-\infty,0]$上为增函数，且 $f(0)=0$，试判断 $y=|f(x)|$在区间$[0,+\infty)$上的单调性，并用定义证明你的结论.

解： 由图象易知 $y=|f(x)|$在$[0,+\infty)$上单调递增.

证明 任取 $0\leqslant x_1<x_2<+\infty$，则$-x_2<-x_1\leqslant 0$，

又 $f(x)$在$(-\infty,0]$上递增，

$\therefore\ f(-x_2)<f(-x_1)\leqslant f(0)$，

又 $f(x)$在 R 上为偶函数，

$\therefore\ f(-x_2)=f(x_2)$，$f(-x_1)=f(x_1)$，且 $f(0)=0$，

$\therefore\ f(x_2)<f(x_1)\leqslant 0$，

$\therefore\ |f(x_2)|>|f(x_1)|$，

所以 $y=|f(x)|$在$[0,+\infty)$上是递增函数.

例 7 已知奇函数 $f(x)$在定义域$[-1,1)$内单调递减，

又 $f(1-a)+f(1-a^2)<0$,求 a 的取值范围.

解:欲求 a 的取值范围,需列出等价的关于 a 的方程或不等式(组),注意到 $f(1-a)$,$f(1-a^2)$均为复合函数,$f(x)$是单调递减,于是有

∵ $f(x)$的定义域为$[-1,1]$,

∴ $\begin{cases}-1<1-a<1,\\-1<1-a^2<1,\end{cases}$ ∴ $\begin{cases}0<a<2,\\0<|a|<\sqrt{2},\end{cases}$

∴ $0<a<\sqrt{2}$.

∵ $f(1-a)+f(1-a^2)<0$,

∴ $f(1-a)<-f(1-a^2)$,

而 $f(x)$在$(-1,1)$上为奇函数,

∴ $-f(1-a^2)=f(a^2-1)$

∴ $f(1-a)<f(a^2-1)$,

又 $f(x)$在$[-1,1]$上是递减函数,

∴ $1-a>a^2-1$,

∴ $a^2+a-2<0$, ∴ $-2<a<1$,

又 $0<a<\sqrt{2}$,

∴ $0<a<1$,即所求 a 的取值范围为$(0,1)$.

例 8 已知 $f(x)=8+2x-x^2$,如果 $g(x)=f(2-x^2)$,那么 $g(x)$( )

(A) 在区间$(-2,0)$上递增 (B) 在区间$(0,2)$上递增

(C) 在区间$(-1,0)$上递减 (D) 在区间$(0,1)$上递减

解: 令 $t=2-x^2$,则 $f(t)=-t^2+2t+8$,所以 $g(x)$是上述两函数的复合函数.

当 $x\in(-2,0)$时,$t\in(-2,2)$,由函数图象(自绘)可知(A)不成立,同理(B)、(D)也不成立.

当 $x\in(-1,0)$时，$t\in(1,2)$此时 t 递增，y 递减，所以 $g(x)$递减，应选(C).

例 9 若函数 $f(x)=a+\dfrac{3}{x-b}$与函数 $g(x)=1+\dfrac{C}{2x+1}$互为反函数，则 $a=$________；$b=$________；$C=$________.

解： 由已知 $f(x)$与 $g(x)$的定义域与值域互换，而在 $g(x)$中$x\neq-\dfrac{1}{2}$，$f(x)$中，$f(x)\neq a$，

$\therefore\quad a=-\dfrac{1}{2}$.

在 $f(x)$中，$x\neq b$，而在 $g(x)$中，$g(x)\neq1$，

$\therefore\quad b=1$

将 a,b 代入 $f(x)$，

$\therefore\quad y=f(x)=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{x-1}$，

$\therefore\quad \dfrac{2y+1}{2}=\dfrac{3}{x-1}$，　$\therefore\quad x=1+\dfrac{6}{2y+1}$，

$\therefore\quad y=f^{-1}(x)=1+\dfrac{6}{2x+1}$，　所以 $C=6$.

例 10 设函数 $f(x)=\dfrac{1-2x}{1+x}$，函数 $y=g(x)$的图象与 $f^{-1}(x+1)$的图象关于 $y=x$ 对称，那么 $g(2)$等于(　　).

(A) -1　　(B) -2　　(C) $-\dfrac{4}{5}$　　(D) $-\dfrac{2}{5}$

解法(一) 设 $f(x)$的反函数为 $f^{-1}(x)$，又 $g(x)$与 $f^{-1}(x+1)$互为反函数.

在 $f(x)$上任取一点 P，则 P 关于 $y=x$ 的对称点 P'必在 $f^{-1}(x)$上，P'点向左移一个单位得 P''必在 $f^{-1}(x+1)$上，P''关于 $y=x$ 的对称点 P'''必在 $g(x)$上，由对称性不难发现 P'''

就是 P 点向下平移一个单位得到，所以 $g(x)=f(x)-1=\frac{1-2x}{1+x}-1\Rightarrow g(2)=\frac{1-4}{1+2}-1=-2$.

解法(二) $\because\quad y=f^{-1}(x+1)$,

$\therefore\quad f(y)=x+1$,

$\therefore\quad x=f(y)-1\qquad\therefore\quad g(x)=f(x)-1$

$\therefore\quad g(2)=-2$.

例 11 已知二次函数图象经过两点(1,3)和(5,3)且该图象在 x 轴上截得的线段长为 5，求这个二次函数的解析式.

解法(一) 因为图象过两点，可考虑用一般式. 设所求函数为 $y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$.

由已知得$\begin{cases}a+b+c=3,\\25a+5b+c=3,\\\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{|a|}=5,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-\frac{4}{3}\\b=8,\\c=-\frac{11}{3}.\end{cases}$

所求二次函数为 $y=-\frac{4}{3}x^2+8x-\frac{11}{3}$.

解法(二) 因为(1,3)和(5,3)均在图象上，所以抛物线的对称轴为 $x=3$，而弦长为 5，则二次函数两根分别为 $\frac{1}{2}$ 和 $\frac{11}{2}$.

设所求二次函数为 $y=a\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{11}{2}\right)$

$\because\quad$(1,3)在图象上，

$\therefore\quad a\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{11}{2}\right)=3,\quad\therefore\quad a=-\frac{4}{3}$.

所求二次函数为 $y=-\frac{4}{3}x^2+8x-\frac{11}{3}$.

说明：确定二次函数解析式的一般步骤是首先由题设条件确定采用以下三种形式中的某一种. 一般式：$y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$；顶点式：$y=a(x-m)^2+h$；
两根式：$y=a(x-x_1)(x-x_2)=a[x^2-(x_2+x_2)x+x_1x_2]$，
第二步是用待定系数法确定未知的参数.

例 12 如果 $ax^2+bx+c>0$ 的解集为 $\{x|x<-2$ 或 $x>4\}$，那么对于函数 $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq 0)$，试比较 $f(-1)$，$f(2)$，$f(5)$ 的大小.

解：由已知 $a>0$，$f(-2)=f(4)=0$，

$\therefore$ $f(x)$ 的顶点横坐标 $x=\dfrac{4-2}{2}=1$.

$\therefore$ $f(-1)=f(1-2)=f(1+2)=f(3)$

又 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上递增，$2<3<5$

$\therefore$ $f(2)<f(3)<f(5)$，即 $f(2)<f(-1)<f(5)$.

例 13 已知 $f(x)=x^2+1$，$g(x)=f[f(x)]$，且 $F(x)=g(x)-\lambda f(x)$，试问是否存在实数 λ，使得函数 $F(x)$ 在 $(-\infty,-1)$ 上是减函数，并且在区间 $(-1,0)$ 上是增函数，如果存在请求出 λ；如果不存在请说明理由.

解法（一） 由已知 $g(x)=x^4+2x^2+2$，

$\therefore$ $F(x)=x^4+(2-\lambda)x^2+(2-\lambda)$.

令 $t=x^2$，则 $\varphi(t)=t^2+(2-\lambda)t+(2-\lambda)$

且 $x\in(-\infty,-1)$ 时，$t\in(1,+\infty)$；

$x\in(-1,0)$ 时，$t\in(0,1)$.

(1) $\because$ $t=x^2$ 在 $(-\infty,-1)$ 上递减，欲使 $F(x)$ 在 $(-\infty,-1)$ 上递减，需且仅需 $\varphi(t)$ 在 $(1,+\infty)$ 上递增，其充要条件是

$$\frac{\lambda-2}{2}\leqslant 1\Rightarrow \lambda\leqslant 4;$$

(2)$\because$ $t=x^2$ 在$(-1,0)$上递减,欲使 $F(x)$在$(-1,0)$上递增,需且仅需 $\varphi(t)$在$(0,1)$上递减,其充要条件 $\dfrac{\lambda-2}{2}\geqslant 1$ $\Rightarrow\lambda\geqslant 4$.

由(1),(2)可知,当且仅当 $\lambda=4$ 时,$F(x)$满足要求.

解法(二) 假设存在实数 λ,使 $F(x)$满足题设条件即

(1)$F(x)$在$(-\infty,-1)$上递减

任取 $x_1<x_2<-1$

$\Leftrightarrow F(x_1)-F(x_2)=(x_1^2-x_2^2)(x_1^2+x_2^2+2-\lambda)>0$

又 $x_1^2+x_2^2>1$

$\Leftrightarrow x_1^2+x_2^2+2-\lambda>0$

又 $x_1^2+x_2^2+2>4$,

$\Leftrightarrow\lambda\leqslant 4$.

这也就是说当且仅当 $\lambda\leqslant 4$ 时,$F(x)$在$(-\infty,-1)$上递减;

(2)且 $F(x)$在$(-1,0)$上递增

任取 $-1<x_1<x_2<0$,

$\Leftrightarrow F(x_1)-F(x_2)=(x_1^2-x_2^2)(x_1^2+x_2^2+2-\lambda)<0$,

又 $1>x_1^2>x_2^2>0$, $x_1^2-x_2^2>0$,

$\Leftrightarrow x_1^2+x_2^2+2-\lambda<0$,

又 $x_1^2+x_2^2+2<4$

$\Leftrightarrow\lambda\geqslant 4$.

这也就是说当且仅当 $\lambda\geqslant 4$ 时,$F(x)$在$(-1,0)$上递增.

综合(1),(2)可知当 $\lambda=4$ 时,$F(x)$满足题设条件.

例 14 若关于 x 的方程 $\lg(x-1)+\lg(3-x)=\lg(a-x)$有实数解,求 a 的取值范围