新东方
NEW ORIENTAL

2011

新东方考研数学培训教材

考研数学

汪诚义 编著

高等数学与微积分

卷I

- 深刻理解考研大纲，重点突出，内容精当
- 含最新考研真题及解析
- 数学体系与实战训练相结合，全面覆盖考试题型
- 工科类、经济类考研数学统筹兼顾，浑然一体
- 内容安排循序渐进，兼顾考研命题综合性特点，有助于考生融会贯通

群言出版社
Qunyan Press

新东方 NEW ORIENTAL

新东方考研数学培训教材

考研数学

高等数学与微积分

卷I

汪诚义 编著

群言出版社
Qunyan Press

图书在版编目(CIP)数据

考研数学.1，高等数学与微积分 / 汪诚义编著. —北京：群言出版社，2007（2010.3 重印）

ISBN 978-7-80080-706-0

Ⅰ. 考… Ⅱ. 汪… Ⅲ. ①高等数学—研究生—入学考试—自学参考资料②微积分—研究生—入学考试—自学参考资料 Ⅳ. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 010579 号

考研数学卷 I 高等数学与微积分

出 版 人	范 芳
责任编辑	李小艾(bj62605588@163.com)
封面设计	王 琳
出版发行	群言出版社(Qunyan Press)
地 址	北京东城区东厂胡同北巷 1 号
邮政编码	100006
网 站	www.qypublish.com
电子信箱	qunyancbs@126.com
总 编 办	010—65265404 65138815
编 辑 部	010—65276609 65262436
发 行 部	010—65263345 65220236
经 销	新华书店
读者服务	010—65220236 65265404 65263345
法律顾问	中济律师事务所
印 刷	北京鑫丰华彩印有限公司
版 次	2010 年 3 月第 4 版 2010 年 3 月第 5 次印刷
开 本	787×1092 1/16
印 张	25.25
字 数	561 千字
书 号	ISBN 978-7-80080-706-0
定 价	30.00 元

新东方 NEW ORIENTAL 图书策划委员会

主　任　俞敏洪

委　员　（按姓氏笔划为序）

王　强　王文山　包凡一　仲晓红　李　杜

邱政政　沙云龙　汪海涛　陈向东　周成刚

徐小平　窦中川

新东方 NEW ORIENTAL 考研数学培训教材编委会

（按姓氏笔划为序）

尤承业　李　昂　刘西垣　汪诚义　费允杰

序

为了帮助参加硕士研究生入学考试的广大有志青年能够在最短的时间内取得最好的成绩，我们根据教育部制订的《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》的要求，结合我们多年的考研数学的命题、阅卷和辅导经验，编写了这套《考研数学》系列丛书，其中含：卷Ⅰ 高等数学与微积分、卷Ⅱ 线性代数、卷Ⅲ 概率论与数理统计。

这套书的特点是：

1. 基本概念讲解到位；
2. 按照题型分类，题目精简，不搞题海战术；
3. 作者均为考研数学辅导的一线教师，经验丰富。

这套书是在北京新东方学校开办考研数学培训三年之后推出的。在这期间，辅导班的学员人数呈几何级数增长。由于新东方采用独一无二的“基本概念→解题秘笈”的“两步教学法”，教学成果显著，在 2005 和 2006 年北京新东方学校考研数学高分得主颁奖中，多名学员获奖。现在，每年都有上万名学员来到新东方，“从绝望中寻找希望”，学习数学的思维方式和解题技巧。应广大学员的迫切要求，我们编写了这套考研丛书，并在第一版的基础上进行了修订，以回报大家对新东方的厚爱，希望大家能够借助这套丛书顺利通过考试，修成正果。

这是新东方教育科技集团推出的第一套考研数学辅导书。该系列丛书在出版过程中得到了俞敏洪老师和其他领导的大力支持，在此表示衷心的感谢。这套书的出版也标志着新东方由单一的英语培训迈向多元化培训，在新东方的发展史上具有划时代的意义。

新东方考研数学丛书编委会

前 言

编者曾在校内和社会上讲授考研数学达 21 年，目前又在新东方在线（网上）和新东方学校的各类考研辅导班讲课。经过长期实践，编者对考研数学的考试大纲有深刻的理解，对历年命题有精辟的剖析。现把这些经验编辑成书，使参加考研的应试者乘上奔向考试的直通特别快车，在短时期内，得到有效的数学训练，迅速提高应试水平，达到事半功倍的优异效果。

本书具有下面的特点：

1. 贯彻“少而精”的原则

在深刻地理解考试大纲和精辟地剖析历年真题的基础上，突出重点，精选内容，由浅入深地分析，用较少的篇幅，达到全面复习、系统掌握的考研高水平要求。

2. 贯彻“数学体系与实战训练相结合”的原则

本书整体上按数学体系分章和节，但每一节又分“（甲）内容要点”和“（乙）典型例题”两大部分；在内容要点中，既全面阐述考核点的有关内容，又对重点和难点进行深刻剖析。典型例题为各节的主体，全面体现考试题型中的重要方法和主要技巧，覆盖全部考试内容的实际要求。

3. 贯彻“循序渐进与融会贯通相结合”的原则

内容安排既按数学体系循序渐进，又结合考研命题综合性强的特点，不拘泥于大学数学的前后顺序，结合多个考核点加以融会贯通。例如“极限”这一节，把后面微分学和积分学中的方法都结合起来，集中在第一章讨论。这样就开阔了考生的思路，达到温故而知新的境界。

4. 贯彻“统筹兼顾与浑然一体相结合”的原则

本书把工科类和经济类三种不同规格的考研数学要求加以统筹兼顾，又把基础班、强化班和冲刺班的不同要求统一成整体，适合最广泛考研应试者的各种要求。

有些内容前面有星号（＊）或双星号（＊＊），表示要求比较高或很高。根据考研形势变化，一般考生可以不看，想考高分的考生也只需酌情看少部分，关键在于理解和掌握有关方法和技巧，提高分析问题的能力。这些难度较大的题对于参加高等数学竞赛的考生很有参考价值。

本书是考研应试者备考不可缺少的工具书，也是在读大学本科生学习高等数学的重要参考书。

由于编者精力有限，书中的错误和不妥之处在所难免，望读者指正，以便再版时进一步完善。

汪诚义

目　录

第一章　函数、极限、连续

§1.1　函数　1
§1.2　极限　9
§1.3　连续　30
习题及答案　41

第二章　一元函数微分学

§2.1　导数与微分　47
§2.2　微分中值定理　65
§2.3　导数的应用　79
习题及答案　98

第三章　一元函数积分学

§3.1　不定积分　104
§3.2　定积分和反常积分的概念与计算方法　128
§3.3　有关变限积分和积分证明题的一些技巧　142
§3.4　定积分的应用　154
习题及答案　167

第四章　常微分方程

§4.1　基本概念和一阶微分方程　174
§4.2　特殊的高阶微分方程　188
§4.3　微分方程的应用　200
§4.4　差分方程(数学三)　208
习题及答案　210

第五章　向量代数与空间解析几何(数学一)

§5.1　向量代数　215
§5.2　平面与直线　221
§5.3　曲面与空间曲线　228
习题及答案　235

第六章　多元函数微分学

§6.1　多元函数的概念、极限与连续性　237
§6.2　多元函数的偏导数与全微分　241
§6.3　多元函数微分法　249
§6.4　多元函数微分法的几何应用(数学一)　256
§6.5　多元函数的极值与最值　258
习题及答案　266

第七章　多元函数积分学

§7.1　二重积分　269
§7.2　三重积分(数学一)　285
§7.3　曲线积分(数学一)　295
§7.4　曲面积分(数学一)　303
习题及答案　314

第八章　无穷级数(数学一和数学三)

§8.1　常数项级数　318
§8.2　幂级数　330
§8.3　将函数展开成幂级数　341
§8.4　傅里叶级数(数学一)　349
习题及答案　352

附录 1　2005 年考研数学真题精选　357
附录 2　2006 年考研数学真题精选　366
附录 3　2007 年考研数学真题精选　371
附录 4　2008 年考研数学真题精选　375
附录 5　2009 年考研数学真题精选　380
附录 6　2010 年考研数学真题精选　386

第一章

函数、极限、连续

§1.1 函　　数

(甲) 内容要点

一、函数的概念

1. 函数的定义

设 D 是一个非空的实数集，如果有一个对应规划 f，对每一个 $x\in D$，都能对应惟一的一个实数 y，则这个对应规划 f 称为定义在 D 上的一个函数，记以 $y=f(x)$，称 x 为函数的自变量，y 为函数的因变量或函数值，D 称为函数的定义域，并把实数集

$$Z=\{y \mid y=f(x), x\in D\}$$

称为函数的值域.

2. 分段函数

如果自变量在定义域内不同的值，函数不能用同一个表达式表示，而要用两个或两个以上的表达式来表示. 这类函数称为分段函数.

例如

$$y=f(x)=\begin{cases} x+1 & x<-1 \\ x^2 & -1\leqslant x\leqslant 1 \\ 5x & x>1 \end{cases}$$

是一个分段函数，它有两个分段点，$x=-1$ 和 $x=1$，它们两侧的函数表达式不同，因此讨论函数 $y=f(x)$ 在分段点处的极限、连续、导数等问题时，必须分别先讨论左、右极限，左、右连续性和左、右导数. 需要强调：分段函数一般不是初等函数，不能用初等函数在定义域内皆连续这个定理.

3. 隐函数

形如 $y=f(x)$ 的函数称为显函数，由方程 $F(x,y)=0$ 确定的 $y=y(x)$ 称为隐函数，有些隐函数可以化为显函数（不一定是一个单值函数），而有些隐函数则不能化为显函数.

4. 反函数

如果 $y=f(x)$ 可以解出 $x=\varphi(y)$ 是一个函数（单值），则称它为 $f(x)$ 的反函数，记以 $x=f^{-1}(y)$. 有时也用 $y=f^{-1}(x)$ 表示.

二、基本初等函数

1. 常值函数 $y=C$(常数)
2. 幂函数 $y=x^{\alpha}$(α 常数)
3. 指数函数 $y=a^{x}$($a>0,a\neq 1$ 常数)

   $y=e^{x}$($e=2.7182\cdots$,无理数)
4. 对数函数 $y=\log_{a}x$($a>0,a\neq 1$ 常数)

   常用对数 $y=\log_{10}x=\lg x$

   自然对数 $y=\log_{e}x=\ln x$
5. 三角函数 $y=\sin x$;$y=\cos x$;$y=\tan x$;

   $y=\cot x$;$y=\sec x$;$y=\csc x$.
6. 反三角函数 $y=\arcsin x$;$y=\arccos x$;

   $y=\arctan x$;$y=\operatorname{arccot} x$.

基本初等函数的概念、性质及其图像非常重要,影响深远.例如以后经常会用 $\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x$;$\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x$;$\lim\limits_{x\to 0^{+}}e^{\frac{1}{x}}$;$\lim\limits_{x\to 0^{-}}e^{\frac{1}{x}}$;$\lim\limits_{x\to 0^{+}}\ln x$ 等等,就需要对 $y=\arctan x$,$y=e^{x}$,$y=\ln x$ 的图像很清晰.

三、复合函数与初等函数

1. 复合函数

设 $y=f(u)$ 定义域 U

$u=g(x)$ 定义域 X,值域 U^{*}

如果 $U^{*}\subset U$,则 $y=f[g(x)]$是定义在 X 上的一个复合函数,其中 u 称为中间变量.

2. 初等函数

由基本初等函数经过有限次四则运算和复合所构成的用一个分析表达式表示的函数称为初等函数.

四、考研数学中常出现的非初等函数

1. 用极限表示的函数

(1) $y=\lim\limits_{n\to\infty}f_{n}(x)$

(2) $y=\lim\limits_{t\to x}f(t,x)$

2. 用变上、下限积分表示的函数

(1) $y=\int_{0}^{x}f(t)\mathrm{d}t$,其中 $f(t)$连续,则$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x)$

(2) $y=\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}f(t)\mathrm{d}t$,其中 $\varphi_1(x)$,$\varphi_2(x)$可导,$f(t)$连续,则

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f[\varphi_2(x)]\varphi'_2(x)-f[\varphi_1(x)]\varphi'_1(x)$$

五、函数的几种性质

1. 有界性:设函数 $y=f(x)$在 X 内有定义,若存在正数 M,使 $x\in X$ 都有 $|f(x)|\leqslant M$,则称 $f(x)$在 X 上是有界的.

2. 奇偶性：设区间 X 关于原点对称，若对 $x\in X$，都有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 在 X 上是奇函数；若对 $x\in X$，都有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 在 X 上是偶函数. 奇函数的图像关于原点对称；偶函数图像关于 y 轴对称.

3. 单调性：设 $f(x)$ 在 X 上有定义，若对任意 $x_1\in X,x_2\in X,x_1<x_2$ 都有 $f(x_1)<f(x_2)$ $[f(x_1)>f(x_2)]$，则称 $f(x)$ 在 X 上是单调增加的[单调减少的]；若对任意 $x_1\in X,x_2\in X,x_1<x_2$ 都有 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$ $[f(x_1)\geqslant f(x_2)]$，则称 $f(x)$ 在 X 上是单调不减[单调不增].

（注意：有些书上把这里单调增加称为严格单调增加；把这里单调不减称为单调增加.）

4. 周期性：设 $f(x)$ 在 X 上有定义，如果存在常数 $T\neq 0$，使得任意 $x\in X,x+T\in X$，都有 $f(x+T)=f(x)$，则称 $f(x)$ 是周期函数，称 T 为 $f(x)$ 的周期.

由此可见，周期函数有无穷多个周期，一般我们把其中的最小正周期称为周期.

（乙）典型例题

一、求函数的定义域

【例 1】 求函数 $f(x)=\ln\ln\ln x+\sqrt{100-x^2}$ 的定义域.

解 $\ln\ln\ln x$ 要有定义，$x>e$，

$\sqrt{100-x^2}$ 要有定义，$x^2\leqslant 100,|x|\leqslant 10$，

因此，$f(x)$ 的定义域为 $(e,10]$.

$x^2-x\geq 0$

$x(x-1)\geq 0$

$x\geq 1$ 或 $x\leq 0$.

【例 2】 求 $y=\sqrt{x-\sqrt{x}}+\dfrac{1}{\ln|x-5|}$ 的定义域.

$x\neq 5,6$.

$x\geq 0$

解 $\sqrt{x-\sqrt{x}}$ 要有定义，$x\geqslant 1$ 和 $x=0$

$\dfrac{1}{\ln|x-5|}$ 要有定义，$x\neq 5,x\neq 4,x\neq 6$，

因此，定义域为 $\{0\}\cup[1,4)\cup(4,5)\cup(5,6)\cup(6,+\infty)$.

【例 3】 设 $f(x)$ 的定义域为 $[-a,a](a>0)$，求 $f(x^2-1)$ 的定义域.

解 要求 $-a\leqslant x^2-1\leqslant a$，则 $1-a\leqslant x^2\leqslant 1+a$，

当 $a\geqslant 1$ 时，$\because\ 1-a\leqslant 0$，$\therefore\ x^2\leqslant 1+a$，则 $|x|\leqslant\sqrt{1+a}$

当 $0<a<1$ 时，$1-a>0$，$\therefore\ \sqrt{1-a}\leqslant|x|\leqslant\sqrt{1+a}$

也即 $\sqrt{1-a}\leqslant x\leqslant\sqrt{1+a}$　或　$-\sqrt{1+a}\leqslant x\leqslant-\sqrt{1-a}$

【例 4】 设 $g(x)=\begin{cases}1,0\leqslant x<2\\2,2\leqslant x\leqslant 4\end{cases}$ 求 $f(x)=g(2x)+g(x-1)$ 的定义域，并求 $f\left(\dfrac{3}{2}\right)$.

解 $g(x)$ 的定义域为 $[0,4]$，要求 $0\leqslant 2x\leqslant 4$，则 $0\leqslant x\leqslant 2$；要求 $0\leqslant x-1\leqslant 4$，则 $1\leqslant x\leqslant 5$，于是 $f(x)$ 的定义域为 $[1,2]$.

又 $f\left(\dfrac{3}{2}\right)=g(3)+g\left(\dfrac{1}{2}\right)=2+1=3$.

二、求函数的值域

【例 1】 求 $y=e^{\frac{1}{\sqrt[3]{x^3-1}}}$ 的值域.

解 我们先求出反函数，它的定义域就是原来函数的值域.

$$\ln y=\frac{1}{\sqrt[3]{x^3-1}},x^3-1=\frac{1}{\ln^3 y},$$

$x=\sqrt[3]{1+\frac{1}{\ln^3 y}}$,它的定义域 $y>0$,且 $y\neq 1$

所以原来函数的值域为 $(0,1)\cup(1,+\infty)$.

【例 2】 求 $y=f(x)=\begin{cases}3-x^3 & x<-2\\ 5-x & -2\leqslant x\leqslant 2\\ 1-(x-2)^2 & x>2\end{cases}$ 的值域,并求它的反函数.

解 $x<-2$, $y>3+8=11$, $x=\sqrt[3]{3-y}$,

$-2\leqslant x\leqslant 2$, $3\leqslant y=5-x\leqslant 7$, $x=5-y$,

$x>2$, $y=1-(x-2)^2<1$, $x=2+\sqrt{1-y}$,

所以 $y=f(x)$ 的值域为 $(-\infty,1)\cup[3,7]\cup(11,+\infty)$

反函数

$$x=\begin{cases}2+\sqrt{1-y} & y<1\\ 5-y & 3\leqslant y\leqslant 7\\ \sqrt[3]{3-y} & y>11\end{cases}$$

【例 3】 设 $f(x)=\int_x^{x+\frac{\pi}{2}}|\sin t|\mathrm{d}t$.

(1) 证明 $f(x)$ 是以 π 为周期的周期函数

(2) 求 $f(x)$ 的值域

解 (1) $f(x+\pi)=\int_{x+\pi}^{x+\frac{3}{2}\pi}|\sin t|\mathrm{d}t=\int_x^{x+\frac{\pi}{2}}|\sin u|\mathrm{d}u=f(x)$ (做变量替换 $t=u+\pi$)

可见,$f(x)$ 以 π 为周期

(2) 只需讨论 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上的值域,为此,我们先找出 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上的最大值和最小值

$$f'(x)=\left|\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right|-|\sin x|=|\cos x|-|\sin x|$$

令 $f'(x)=0$,得两个驻点,$x_1=\frac{\pi}{4}$,$x_2=\frac{3\pi}{4}$,$f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上没有不可导点,有两个端点 0 和 π,比较 $f(0)$,$f\left(\frac{\pi}{4}\right)$,$f\left(\frac{3}{4}\pi\right)$,$f(\pi)$ 的函数值

$$f(0)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\mathrm{d}t=1,\quad f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\sin t\mathrm{d}t=\sqrt{2},$$

$$f\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}|\sin t|\mathrm{d}t=\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi}\sin t\mathrm{d}t-\int_{\pi}^{\frac{5\pi}{4}}\sin t\mathrm{d}t=2-\sqrt{2}$$

$$f(\pi)=\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}}(-\sin t)\mathrm{d}t=1$$

所以 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上最小值为 $2-\sqrt{2}$,最大值为 $\sqrt{2}$.

因此,$f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上值域亦即 $(-\infty,+\infty)$ 内值域为 $[2-\sqrt{2},\sqrt{2}]$.

三、求复合函数有关表达式

1. 已知 $f(x)$ 和 $g(x)$,求 $f[g(x)]$.

【例 1】 已知 $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$，求 $f\left[\dfrac{1}{f(x)-1}\right]$.

解
$$f(x)-1=\frac{x}{x-1}-1=\frac{1}{x-1},\quad \frac{1}{f(x)-1}=x-1\quad (x\neq 1)$$

于是，$f\left[\dfrac{1}{f(x)-1}\right]=f(x-1)=\dfrac{x-1}{(x-1)-1}=\dfrac{x-1}{x-2}\quad (x\neq 1,x\neq 2)$

【例 2】 设 $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$，求 $\underbrace{f[f(\cdots f(x))]}_{n\text{重复合}}=f_n(x)$.

解
$$f_2(x)=f[f(x)]=\frac{f(x)}{\sqrt{1+f^2(x)}}=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\Big/\sqrt{1+\frac{x^2}{1+x^2}}=\frac{x}{\sqrt{1+2x^2}},$$

若 $f_k(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+kx^2}}$，则 $f_{k+1}(x)=\dfrac{f_k(x)}{\sqrt{1+f_k^2(x)}}=\dfrac{x}{\sqrt{1+kx^2}}\Big/\sqrt{1+\dfrac{x^2}{1+kx^2}}=\dfrac{x}{\sqrt{1+(k+1)x^2}}$

根据数学归纳法可知，对正整数 n，$f_n(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$

*【例 3】 设 $f(x)=\begin{cases}4-x^2 & |x|\leqslant 2\\ 0 & |x|>2\end{cases}$，求 $f[f(x)]$.

解
$$f[f(x)]=\begin{cases}4-[f(x)]^2 & |f(x)|\leqslant 2\\ 0 & |f(x)|>2\end{cases}$$

当 $|x|>2$ 时，$|f(x)|=0$，$\therefore\ f[f(x)]=4-0=4$

当 $|x|\leqslant 2$ 时，若 $|f(x)|=|4-x^2|\leqslant 2$，则要求 $2\leqslant x^2\leqslant 6$，故 $\sqrt{2}\leqslant |x|\leqslant 2$ 时，$|f(x)|\leqslant 2$，则 $f[f(x)]=4-(4-x^2)^2$，而 $|x|<\sqrt{2}$ 时，$|f(x)|>2$，则 $f[f(x)]=0$.

综合起来

$$f[f(x)]=\begin{cases}0 & |x|<\sqrt{2}\\ 4-(4-x^2)^2 & \sqrt{2}\leqslant |x|\leqslant 2\\ 4 & |x|>2\end{cases}$$

2. 已知 $g(x)$ 和 $f[g(x)]$，求 $f(x)$.

【例 1】 设 $f(e^x+1)=e^{2x}+e^x+x$，求 $f(x)$.

解 令 $e^x+1=u$，$x=\ln(u-1)$
$$f(u)=(u-1)^2+(u-1)+\ln(u-1)=u^2-u+\ln(u-1)$$
于是
$$f(x)=x^2-x+\ln(x-1)$$

【例 2】 已知 $f'(e^x)=xe^{-x}$，且 $f(1)=0$，求 $f(x)$.

解 令 $e^x=t$，$x=\ln t$，因此 $f'(e^x)=f'(t)=\dfrac{\ln t}{t}$，
$$f(x)-f(1)=\int_1^x\frac{\ln t}{t}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\ln^2 t\Big|_1^x=\frac{1}{2}\ln^2 x$$

$\because\ f(1)=0$，$\therefore\ f(x)=\dfrac{1}{2}\ln^2 x$

【例 3】 设 $f(\sqrt{x})=\sin x$，求 $f'(x)$.

解 $f(\sqrt{x})=\sin(\sqrt{x})^2$，∴ $f(x)=\sin(x^2)$，

则 $f'(x)=2x\cos(x^2)$

【例 4】 已知 $f(\sin x)=3-\cos 2x$，求证 $f(\cos x)=3+\cos 2x$.

证 $f(\sin x)=3-(1-2\sin^2 x)=2+2\sin^2 x$，

$f(u)=2+2u^2$，

$f(\cos x)=2+2\cos^2 x=3+(2\cos^2 x-1)=3+\cos 2x$

3. 已知 $f(x)$ 和 $f[g(x)]$，求 $g(x)$.

例 已知 $f(x)=\ln(1+x)$，$f[g(x)]=x$，求 $g(x)$.

解 $g(x)=f^{-1}(x)$ 实际上为求反函数问题

$$f[g(x)]=\ln[1+g(x)]=x, 1+g(x)=e^x$$

$$g(x)=e^x-1$$

4. 有关复合函数方程

例 设 $f\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)=3f(x)-2x$，求 $f(x)$.

解 令 $\dfrac{x+1}{x-1}=u$，$x+1=ux-u$，$x(u-1)=u+1$，$x=\dfrac{u+1}{u-1}$，于是

$f(u)=3f\left[\dfrac{u+1}{u-1}\right]-\left(\dfrac{2u+2}{u-1}\right)$

$$f(u)=3[3f(u)-2u]-\left(\frac{2u+2}{u-1}\right)$$

$$8f(u)=6u+2\left(\frac{u+1}{u-1}\right), f(x)=\frac{3}{4}x+\frac{1}{4}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$

四、有关四种性质

【例 1】 设 $F'(x)=f(x)$，则下列结论正确的是(　　)

(A) 若 $f(x)$ 为奇函数，则 $F(x)$ 为偶函数

(B) 若 $f(x)$ 为偶函数，则 $F(x)$ 为奇函数

(C) 若 $f(x)$ 为周期函数，则 $F(x)$ 为周期函数

(D) 若 $f(x)$ 为单调函数，则 $F(x)$ 为单调函数

解 (B)不成立，反例 $f(x)=x^2$，$F(x)=\dfrac{x^3}{3}+1$

(C)不成立，反例 $f(x)=\cos x+1$，$F(x)=\sin x+x$

(D)不成立，反例 $f(x)=2x$，$F(x)=x^2$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内

(A)成立

证明 $F(x)=F(0)+\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，$f$ 为奇函数，

$$F(-x)=F(0)+\underline{\int_0^{-x} f(t)\mathrm{d}t}=F(0)+\underline{\int_0^x f(-u)\mathrm{d}(-u)}$$

$$=F(0)+\int_0^x f(u)\mathrm{d}u=F(x) \quad ∴ F(x) 为偶函数.$$

【例 2】 求 $I=\int_{-1}^{1} x[x^5+(e^x-e^{-x})\ln(x+\sqrt{x^2+1})]\mathrm{d}x$.

解 $f_1(x)=e^x-e^{-x}$是奇函数，∵ $f_1(-x)=e^{-x}-e^x=-f_1(x)$，$f_2(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$是奇函数，

∵
$$f_2(-x)=\ln(-x+\sqrt{x^2+1})=\ln\frac{(x^2+1)-x^2}{x+\sqrt{x^2+1}}$$
$$=\ln1-\ln(x+\sqrt{x^2+1})=-f_2(x)$$

因此 $x(e^x-e^{-x})\ln(x+\sqrt{x^2+1})$是奇函数.

于是
$$I=\int_{-1}^{1}x^6\,dx+0=2\int_0^1 x^6\,dx=\frac{2}{7}$$

【例 3】 两个周期函数之和是否仍是周期函数？

解 不一定

(1) $f(x)=\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{3}$

$f_1(x)=\sin\frac{x}{2}$ 周期为 4π

$f_2(x)=\cos\frac{x}{3}$ 周期为 6π

∵ 4π 和 6π 的最小公倍数为 12π

∴ $f(x)$是以 12π 为周期的函数

(2) $f(x)=\sin2x+\cos\pi x$

$f_1(x)=\sin2x$ 周期为 π

$f_2(x)=\cos\pi x$ 周期为 2

∵ π 和 2 没有最小公倍数

∴ $f(x)$不是周期函数

(3) $f(x)=\sin2x+(1-\sin2x)$

$f_1(x)=\sin2x$ 周期为 π

$f_2(x)=1-\sin2x$ 周期为 π

虽然 $f_1(x)$，$f_2(x)$不但都是周期函数，而且它们的周期有最小公倍数.

但是 $f(x)=f_1(x)+f_2(x)=1$，却不是周期函数.（因为没有最小正周期.）

【例 4】 设 $f(x)$，$g(x)$是恒大于零的可导函数，且 $f'(x)g(x)-f(x)g'(x)<0$，则当 $a<x<b$ 时，下列结论成立的是(　　)

(A) $f(x)g(b)>f(b)g(x)$　　(B) $f(x)g(a)>f(a)g(x)$

(C) $f(x)g(x)>f(b)g(b)$　　(D) $f(x)g(x)>f(a)g(a)$

解 ∵ $\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]'=\frac{1}{g^2(x)}[f'(x)g(x)-f(x)g'(x)]<0$，∴ $\frac{f(x)}{g(x)}$单调减少

于是 $x<b$，则有$\frac{f(x)}{g(x)}>\frac{f(b)}{g(b)}$，故(A)成立

【例 5】 设 $f(x)$在$[a,b]$上连续，且单调减少，求证：$F(x)=\frac{1}{x-a}\int_a^x f(t)\,dt$ 在(a,b)内单调减少.

证 只需证明在(a,b)内，$F'(x)<0$，则 $F(x)$在(a,b)内就单调减少

而
$$F'(x)=\frac{f(x)}{x-a}-\frac{1}{(x-a)^2}\int_a^x f(t)\,dt$$

用积分中值定理存在 $c\in(a,x)$（$\because$ $f(x)$在$[a,b]$单调减少，故 c 不会在端点取到）使
$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t=f(c)(x-a)$

于是
$$F'(x)=\frac{1}{x-a}[f(x)-f(c)]$$

再根据 $f(x)$在$[a,b]$上单调减少，故 $f(x)-f(c)<0$，
而 $x-a>0$，则 $F'(x)<0$， 证毕
（注：实际上 $F(x)$为 $f(x)$在$[a,x]$上的积分平均值，因为 $f(x)$在$[a,b]$单调减少，故 $F(x)$单调减少）

*【例 6】 求证 $f(x)=xe^{-x^2}\int_0^x e^{t^2}\mathrm{d}t$ 在$(-\infty,+\infty)$ 内有界.

证 $f(x)$在$[a,b]$上连续，则 $f(x)$在$[a,b]$上有界
而 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内连续，尚不能保证 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内有界
只要再有 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$存在和 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$存在，就能保证 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内有界
现在 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内是连续的，又是偶函数，故只要证明 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在即可（从而 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$存在）

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x e^{t^2}\mathrm{d}t}{\frac{1}{x}e^{x^2}}\left(\frac{\infty}{\infty}\text{型，用洛必达法则}\right)$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x^2}}{-\frac{1}{x^2}e^{x^2}+2e^{x^2}}=\frac{1}{2}\text{，故结论成立.}$$

五、函数方程

【例 1】 设 $f(x)$在$[0,+\infty)$上可导，$f(0)=0$，反函数为 $g(x)$，且 $\int_0^{f(x)}g(t)\mathrm{d}t=x^2e^x$，求 $f(x)$.

解 方程两边对 x 求导得 $g[f(x)]f'(x)=2xe^x+x^2e^x$，于是 $xf'(x)=x(2+x)e^x$，故$f'(x)=(x+2)e^x$，$f(x)=(x+1)e^x+C$，由 $f(0)=0$，得 $C=-1$ 则 $f(x)=(x+1)e^x-1$

*【例 2】 设 $f(x)$满足 $\sin f(x)-\frac{1}{3}\sin\left(\frac{1}{3}x\right)=x$，求 $f(x)$.

解 令 $g(x)=\sin f(x)$，则

$$g(x)-\frac{1}{3}g\left(\frac{1}{3}x\right)=x,$$
$$\frac{1}{3}g\left(\frac{1}{3}x\right)-\frac{1}{3^2}g\left(\frac{1}{3^2}x\right)=\frac{1}{3^2}x,$$
$$\frac{1}{3^2}g\left(\frac{1}{3^2}x\right)-\frac{1}{3^3}g\left(\frac{1}{3^3}x\right)=\frac{1}{3^4}x,$$
……
$$\frac{1}{3^{n-1}}g\left(\frac{1}{3^{n-1}}x\right)-\frac{1}{3^n}g\left(\frac{1}{3^n}x\right)=\frac{1}{3^{2(n-1)}}x,$$

各式相加，得 $g(x)-\frac{1}{3^n}g\left(\frac{1}{3^n}x\right)=x\left[1+\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{9^{n-1}}\right]$

$\because\ |g(x)|\leqslant 1$，　$\therefore\ \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{3^n}g\left(\frac{1}{3^n}x\right)=0$

$$\lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{9^{n-1}}\right]=\frac{1}{1-\frac{1}{9}}=\frac{9}{8}$$

因此 $g(x)=\frac{9}{8}x$，于是

$$f(x)=\arcsin\frac{9}{8}x+2k\pi\text{ 或}(2k-1)\pi-\arcsin\frac{9}{8}x\quad(k\text{ 为整数})$$

【例 3】 设 $b>a$ 均为常数，求方程

$\sin(x+b)\ln\left[(x+b)+\sqrt{(x+b)^2+1}\right]-\sin(x+a)\ln\left[(x+a)+\sqrt{(x+a)^2+1}\right]=0$ 的一个解.

解　$\because\ \sin t$ 和 $\ln(t+\sqrt{t^2+1})$ 均为奇函数，

$\therefore\ f(t)=\sin t\ln(t+\sqrt{t^2+1})$ 是偶函数，

如果 $(x+b)=-(x+a)$，则 $f(x+b)=f(x+a)$ 方程就成立.

因此 $x=-\frac{1}{2}(a+b)$ 是方程的一个解.

***【例 4】** 设对任意 x,y 都有 $f(xy)=f(x)+f(y)$，且 $f'(1)=a(a\neq 0)$ 试求 $x>0$ 时，$f(x)$ 的表达式.

解　令 $x=y=1$，得 $f(1)=f(1)+f(1)$，因此 $f(1)=0$，

当 $x\neq 0$ 时，$f'(x)=\lim\limits_{y\to 0}\frac{f(x+xy)-f(x)}{xy}=\lim\limits_{y\to 0}\frac{f(x)+f(1+y)-f(x)}{xy}$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{f(1+y)-f(1)}{y}\cdot\frac{1}{x}=\frac{1}{x}f'(1)=\frac{a}{x}$$

（这里相当于 $\Delta x=xy$）

因此，　　$f(x)=a\ln x+C\quad(x>0)$

由 $f(1)=0$，可确定 $C=0$

则　　$f(x)=a\ln x\quad(x>0)$

§1.2　极　　限

（甲）内容要点

一、极限的概念与基本性质

1. 极限的定义

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$　（称数列 $\{x_n\}$ 收敛于 A）

任给 $\varepsilon>0$，存在正整数 N，当 $n>N$ 时，就有 $|x_n-A|<\varepsilon$.

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$

任给 $\varepsilon>0$，存在正数 X，当 $x>X$ 时，就有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

(3) $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$

任给 $\varepsilon>0$，存在正数 X，当 $x<-X$ 时，就有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.