

GAOZHONG SHUXUE
KEWAI XITIJ

高中数学
课外习题集

第二册

吕学礼 等编

人民教育出版社

高中数学课外习题集

(第二册)

吕学礼等编

人民教育出版社

高中数学课外习题集

第二册

吕学礼 等编

*

人民教育出版社出版

新华书店总店科技发行所发行

京东印刷厂印装

③

开本787×1092 1/32 印张8 字数166,000

1988年7月第1版 1988年7月第1次印刷

印数 1—264,000

ISBN 7-107-10138-2

G·968 定价1.40元

说 明

国家教育委员会、国家出版局、国家工商行政管理局联合颁发的(86)教中小材字 012 号文件指出:“为适应中小学教学需要,人民教育出版社可以编写出版与教科书配套的教师用教学参考书和补充习题集。”为了贯彻这一文件精神,我社根据中学教学的实际需要,配合初、高中的数学、物理、化学教科书,选编了这套课外习题集,供教师教学参考和指导学有余力的学生课外学习使用,以培养他们的学习兴趣和发展他们的才能;同时也可以帮助一般学生进一步巩固基本知识,提高基本技能,拓宽知识视野,增强运用知识的能力。

《高中数学课外习题集》分为三册,各册书(除了总复习部分以外)均按现行高中课本分章编写,每章习题分为 A、B 组, A 组题是基本题,一般不超过现行课本的要求, B 组题带有一定的灵活性和启发性,每册书后附有全部习题的答案或提示。

本书是《高中数学课外习题集》中的第二册,内容包括高中代数的不等式,数列、极限、数学归纳法,行列式和线性方程组,复数,排列、组合、二项式定理,概率;平面解析几何的直线,圆锥曲线,参数方程、极坐标。参加本书编写工作的有蔡上鹤、饶汉昌、鲍珑、曾宪源、高存明、李慧君等,责任编辑是蔡上鹤,校订者是吕学礼。

人 民 教 育 出 版 社

1988年1月

目 录

	习题部分	解答部分
第一章 不等式.....	1	115
第二章 数列、极限、数学归纳法.....	14	135
第三章 行列式和线性方程组.....	29	154
第四章 复数.....	38	171
第五章 排列、组合、二项式定理.....	53	190
第六章 概率.....	65	207
第七章 直线.....	70	212
第八章 圆锥曲线.....	83	221
第九章 参数方程、极坐标.....	106	244

一、习题部分

第一章 不 等 式

A

1. 填空:

- (1) _____ 的式子叫做不等式.
 - (2) 填上适当的不等号:
 - ① “ $a-b$ 是正数” 等价于 “ a _____ b ”;
 - ② “ $a-b$ 是非负数” 等价于 “ a _____ b ”;
 - ③ “ a 不大于 b ” 等价于 “ a _____ b ”;
 - ④ “ a 大于 b 或小于 b ” 等价于 “ a _____ b ”;
 - ⑤ “ $a > b$ ” 等价于 “ b _____ a ”.
 - (3) 在不等式 $a > b$ 和 $a < b$ 中, a 叫做不等式的 _____ 边, b 叫做不等式的 _____ 边.
 - (4) 形式是 $a > b$ 和 $c > d$ 的两个不等式, 或者形式是 $a < b$ 和 $c < d$ 的两个不等式, 叫做 _____ 向不等式; 形式是 $a > b$ 和 $c < d$ 的两个不等式, 或者形式是 _____ 的两个不等式, 叫做异向不等式.
2. 下列语句对不对? 如果不对, 应怎样改正?
- (1) 3 不小于 3, 即 $3 \geq 3$.
 - (2) 2 不大于 3, 即 $2 \leq 3$.
 - (3) 两个或者几个同向不等式两边分别相乘, 所得不等

式与原不等式同向.

(4) 对于任意两个实数 a, b , 在 $a > b$ 和 $a < b$ 这两种情况中有且只有一种成立.

3. 课本上说: “如果 $a-b$ 是正数, 那么 $a > b$; 如果 $a-b$ 是负数, 那么 $a < b$; 如果 $a-b$ 等于零, 那么 $a = b$. 反过来也对.” 用具体的数学语言把这里的“反过来也对”的含意说出来.

4. 比较下列各组中两个代数式的值的大小:

(1) $(x+3)(x-5)$ 与 $(x+2)(x-4)$;

(2) $(x+1)(x^2-x+1)$ 与 $(x-1)(x^2+x+1)$.

5. 比较下列各组中两个代数式的值的大小:

(1) $(x^2+1)^2$ 与 x^4+x^2+1 ;

(2) $(\sqrt{x}-1)^2$ 与 $(\sqrt{x}+1)^2$.

6. 求证:

(1) 如果 $l > m, m = n$, 那么 $l > n$;

(2) 如果 $l < m, m < n$, 那么 $l < n$;

(3) 如果 $l < m$, 那么 $l + n < m + n$.

7. 判定下列各命题的真假, 并说明理由 (假命题可用反例说明):

(1) $a > b, c = d \implies ac > bd$;

(2) $ac > bc \implies a > b$.

8. (1) 把下列各组中两个不等式的两边分别相加. 从中可以验证什么定理?

① $25 > 16$ 与 $-2 > -7$;

$$\textcircled{2} -2 < -1 \text{ 与 } -\frac{1}{2} < \frac{1}{2};$$

$$\textcircled{3} a^2 + 1 > 0 \text{ 与 } a - 1 > a - 2.$$

(2) 从下列各组中第一个不等式的两边减去第二个不等式的两边，从中可以验证什么定理？

$$\textcircled{1} 5 > 3 \text{ 与 } 1 < 2;$$

$$\textcircled{2} 1 > -3 \text{ 与 } -6 < -4;$$

$$\textcircled{3} 6 < 8 \text{ 与 } -2 > -7.$$

(3) 把下列各组中两个不等式的两边分别相乘，从中可以验证什么定理？

$$\textcircled{1} 7 > 6 \text{ 与 } 3 > 2;$$

$$\textcircled{2} \frac{3}{4} > \frac{2}{3} \text{ 与 } 4 > 3;$$

$$\textcircled{3} \sqrt{5} > \sqrt{2} \text{ 与 } \sqrt{5} > \sqrt{3};$$

$$\textcircled{4} 3\frac{1}{7} < \sqrt{10} \text{ 与 } 7 < \sqrt{50}.$$

9. 选择题①:

(1) 已知 a, b, c 都是实数，命题甲为“ $a > b$ ”，命题乙为“ $ac^2 > bc^2$ ”，那么()

(A) 由甲能推出乙，但由乙不能推出甲。

(B) 由乙能推出甲，但由甲不能推出乙。

● 本书中的选择题都有代号为 A, B, C, D 的四个结论，其中只有一个结论是正确的。选出这个正确结论，并把代号填入题干的括号内。下同，不另注。

(C) 由甲能推出乙, 由乙也能推出甲.

(D) 由甲不能推出乙, 由乙也不能推出甲.

(2) 已知 $a < b < 0$, 那么 ()

(A) $a^2 < b^2$. (B) $\frac{a}{b} < 1$.

(C) $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$. (D) $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.

(3) 三个数 a, b, c 不全为零必须并且只需 ()

(A) a, b, c 都不是零.

(B) a, b, c 中最多有一个是零.

(C) a, b, c 中只有一个为零.

(D) a, b, c 中至少有一个不是零.

(4) 已知 $a + b > 0, b < 0$, 那么 ()

(A) $a > b > -a > -b$.

(B) $a > -a > b > -b$.

(C) $a > -b > b > -a$.

(D) $-a > -b > a > b$.

10. 已知 $c > a > b > 0$, 求证 $\frac{a}{c-a} > \frac{b}{c-b}$.

11. (1) $ab > 0$ 必须并且只需什么条件?

(2) $ab < 0$ 必须并且只需什么条件?

12. (1) 已知 $a > b, n \in \mathbb{Z}$, 且 $n > 1$, 能否断定 $a^n > b^n$? 说明理由.

(2) 已知 $a > b (a, b \in \mathbb{R}^+)$, $n \in \mathbb{Z}$, 且 $n > 1$, 求证 $a^{-n} < b^{-n}$.

13. 已知 $a > b (a, b \in \mathbb{R}^+)$, $m, n \in \mathbb{N}$, 且 $n > 1$, 求证:

(1) $a^{\frac{m}{n}} > b^{\frac{m}{n}}$;

(2) $b^{-\frac{m}{n}} > a^{-\frac{m}{n}}$.

14. 已知 $0 < \frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}$, 求证:

$$(1) \frac{a+b}{b} \leq \frac{c+d}{d}; \quad (2) \frac{a}{a+b} \leq \frac{c}{c+d}.$$

15. 已知 $a > b > 0$, 且 $m > 0$, 求证 $\frac{a+m}{b+m} < \frac{a}{b}$.

16. (1) 已知 $a > b > 0, c > d > 0$, 求证 $\frac{a}{d} > \frac{b}{c}$.

(2) 把第(1)小题中的结论换成“ $\frac{a}{c} > \frac{b}{d}$ ”行吗? 举例说明.

17. 已知 $a, c \in \mathbb{R}, b, d \in \mathbb{R}^+$, 且 $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}$, 求证

$$\frac{a}{b} \leq \frac{a+c}{b+d} \leq \frac{c}{d},$$

其中等号当且仅当 $ad = bc$ 时成立.

18. 已知 $a \neq 1$, 求证:

$$(1) a^2 > 2a - 1; \quad (2) \frac{2a}{1+a^2} < 1.$$

19. 已知 $a, b, c, d \in \mathbb{R}^+$, 且互不相等, 求证:

$$(1) \frac{a+b+c+d}{2} > \sqrt{ab} + \sqrt{cd};$$

$$(2) \sqrt[4]{abcd} < \frac{a+b+c+d}{4}.$$

20. 已知 $a, b \in \mathbb{R}^+$, 且 $a \neq b$, 求证:

$$(1) (a+b) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) > 4;$$

$$(2) (a+b)(a^2+b^2)(a^3+b^3) > 8a^3b^3.$$

21. 已知 $a, b, c \in \mathbb{R}^+$, 且互不相等, 求证

$$2(a^3 + b^3 + c^3) > a^2(b+c) + b^2(a+c) + c^2(a+b).$$

22. 在什么条件下, 下列代数式有表内的最小值? 把条件填入表内:

代数式	a^2	$a^2 + b^2$	$\frac{a+b}{2}$	$a^3 + b^3 + c^3$	$\frac{a+b+c}{3}$
条 件					
最小值	0	$2m^2$	m	$3m^3$	m

23. 下列代数式在什么时候取得最小值? 最小值是什么?

(1) $9x + 4x^{-1} (x \in \mathbb{R}^+);$

(2) $a^2 + 1 + a^{-2} (a \in \mathbb{R} \text{ 且 } a \neq 0).$

24. (1) 已知直角三角形两条直角边的和等于 10cm, 求面积最大时两条直角边的长. 最大面积是什么?

(2) 求证在周长相同的矩形中, 面积最大的是正方形.

25. 用分析法证明:

(1) $\sqrt{2} + \sqrt{3} < \sqrt{10};$ (2) $\sqrt{5} + \sqrt{7} > 1 + \sqrt{15};$

(3) $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5} < \sqrt{30}.$

26. 用分析法证明 $3(1+a^2+a^4) \geq (1+a+a^2)^2$. (提示: $1+a^2+a^4 = (1+a+a^2)(1-a+a^2).$)

27. 设 a, b, c 为 $\triangle ABC$ 的三条边, 用分析法证明

$$a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ca).$$

28. 画出下列函数的图象, 根据图象说明当 x 取什么值时, 函数值是正的, 是负的, 等于零, 并且用对应的不等式或者

方程的解集来检验:

- (1) $y = x - 3$; (2) $y = x + 5$;
 (3) $y = 2x - 7$; (4) $y = 3x + 1$;
 (5) $y = -x + 2$; (6) $y = -4x - 1$.

29. 在同一坐标系内画出函数 $y_1 = x + 1$ 和 $y_2 = 5 - x$ 的图象, 根据图象说明当 x 取什么值时, $y_1 > y_2$, $y_1 = y_2$, $y_1 < y_2$, 并且用对应的不等式或者方程的解集来检验.

30. 解下列不等式:

$$(1) \frac{1 - \frac{x}{5}}{4} \leq \frac{1 + \frac{x}{4}}{5}; \quad (2) \frac{x-1}{2} - \frac{x+1}{3} < \frac{x}{6};$$

$$(3) 2[x - 2(x-2)] > x - 3(x-3).$$

31. 解下列不等式组:

$$(1) \begin{cases} 6x - 8 < 3(4x - 3) + 16, \\ \frac{4(x+1)}{5} < \frac{3x}{5} + 1; \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} x > \frac{2}{3} - \frac{2x-13}{33}, \\ \frac{x}{36} + \frac{1}{9}(x-7) < \frac{x}{3} - 2\frac{2}{9}; \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} 5(x-1) + 5.5 > 2x + 2.5(x+1), \\ 51x - 85 < 34(x-1); \end{cases}$$

$$(4) \begin{cases} \frac{3x+5}{2} - \frac{2x-1}{3} > \frac{x-6}{6} + 5, \\ \frac{x-3}{5} < \frac{5x-1}{2} - \frac{6x+1}{3}. \end{cases}$$

32. 解不等式 $\frac{(x-6)(3x+15)}{4+x} > 0$ (先化成一次不等式组).

33. 解下列不等式:

(1) $x^2 - 8x + 15 > 0$;

(2) $x^2 - 2x + 1 \geq 0$;

(3) $x^2 - 2x - 3 > 0$;

(4) $x^2 + 2x + 3 \leq 0$;

(5) $6x - 15 < x^2 + 2x$;

(6) $x^2 - 12x + 30 < 0$.

34. 求下列函数的定义域:

(1) $y = \frac{3x+1}{3x-6}$;

(2) $y = \frac{3x-1}{x^2+x+1}$;

(3) $y = \sqrt{x-1}$;

(4) $y = 2\sqrt{x-1} - \frac{5}{\sqrt{4-x}}$.

35. 解下列不等式(先化成二次不等式组):

(1) $\frac{(x-3)(x+4)}{x-2} > 0$;

(2) $\frac{(x-5)(x+5)}{x-4} \leq 0$.

36. 用排列因式的根的方法解下列不等式:

(1) $\frac{x^2+4x+3}{x^2+2x+8} > 0$;

(2) $3 - \frac{2x-17}{x-5} > \frac{x-5}{x+2}$;

(3) $\frac{(8-x)(x-5)}{x^2-5x+6} > 0$;

(4) $(3x-1)(4-x)(2x-3)^2 > 0$.

37. 解不等式 $\sqrt{x-2} < 2$.**38. 解不等式 $\sqrt{x^2-x-2} < 2$.****39. 解不等式 $\sqrt{2x+5} > x+1$.****40. 解不等式 $\sqrt{x^2-3x+2} > x+3$.****41. 解下列不等式:**

(1) $a^{2x^2+1} > a^{x^2+5}$;

(2) $a^{2x^2+1} < a^{x^2+5}$.

42. 解下列不等式:

(1) $2^{8x-1} > \frac{\sqrt{2}}{2}$;

(2) $0.5^{2x^2+5x+5} > 0.25$.

43. 解下列不等式:

$$(1) \log_a(x^2+1) > \log_a 2x;$$

$$(2) \log_a(x^2+1) < \log_a 2x.$$

44. 解下列不等式:

$$(1) \lg(x+2) - \lg(x-3) > 1;$$

$$(2) \lg(10x+5) - 1 < \lg(x^2+2x-1) - \lg(x-2).$$

45. 求证 $\frac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|} \geq \frac{|a+b|}{1+|a+b|}.$

46. 已知 $a > 0$ 且 $a \neq 1, 0 < x < 1$, 求证

$$|\log_a(1-x)| > |\log_a(1+x)|.$$

47. 解不等式 $|5x-x^2| > 6.$

48. 解不等式 $|x^2+3x-8| < 10.$

49. 解不等式 $|x+7| - |x-2| < 3.$

50. 解不等式 $|x^4-4| - |x^2+2| \geq 0.$

51. 设 n 为自然数, 解不等式

$$\left| \frac{5n}{n+1} - 5 \right| < 0.001.$$

B

52. 选择题: 已知 $a = 2 - \sqrt{5}, b = \sqrt{5} - 2, c = 5 - 2\sqrt{5}$, 那么()

(A) $a < b < c.$ (B) $a < c < b.$

(C) $b < a < c.$ (D) $c < a < b.$

53. 选择题: 已知 $a < 0, -1 < b < 0$, 那么()

(A) $a > ab > ab^2.$ (B) $ab^2 > ab > a.$

$$(C) \quad ab > a > ab^2.$$

$$(D) \quad ab > ab^2 > a.$$

54. 选择题: 如果 $0 < a < \frac{1}{2}$, 那么 ()

$$(A) \quad \log_a(1-a) > 1.$$

$$(B) \quad a^x < \left(\frac{1}{2}\right)^x.$$

$$(C) \quad \cos(1+a) < \cos(1-a).$$

$$(D) \quad (1-a)^n < a^n \quad (n \in N).$$

55. 已知 a, b, c 是一个三角形的三条边, 求证:

(1) $\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c}$ 也可以成为一个三角形的三条边;

(2) 这个以 $\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c}$ 为边的三角形是锐角三角形.

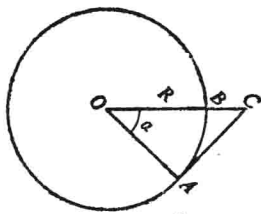
56. 已知 $\triangle ABC$ 的三条边为 a, b, c , 三个内角为 A, B, C , 求证

$$\frac{\pi}{3} \leq \frac{aA + bB + cC}{a + b + c} < \frac{\pi}{2}.$$

57. 如图, 已知 AC 为圆 O 的切线, B 为 OC 与圆的交点,

$\angle AOB = \alpha$ ($0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$), 求证

$$\sin \alpha < \alpha < \operatorname{tg} \alpha.$$



(第57题)

58. 设 $n \in N$, 求证

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} < 2.$$

59. 设 $n \in N$, 求证

$$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n} < \sqrt{\frac{1}{2n+1}}.$$

60. 设 $n, p \in N$, 求证

$$\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+p+1} < \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots \\ + \frac{1}{(n+p)^2} < \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p}.$$

61. 解下列不等式组:

$$(1) \begin{cases} \frac{5-x}{4} - \frac{x-1}{3} > \frac{x+1}{4} - 1, \\ \frac{4x-1}{5} - 1 - \frac{2x-1}{3} > \frac{15x+7}{15}; \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} \frac{2m+2}{7} - \frac{4m-3}{2} < \frac{2+13m}{14} - 1, \\ 3\frac{1}{3} - \frac{5-4m}{6} > \frac{m-2}{2} - \frac{3m+1}{3}; \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} 4x + \frac{2x-3}{2} < \frac{7x-5}{2}, \\ \frac{7x-2}{3} - 2x > 5 - \frac{x-2}{4}; \end{cases}$$

$$(4) \begin{cases} 5x - \frac{2x+3}{3} < x - 21, \\ \frac{x}{2} - 1 > 1.5x - \frac{47+x}{15}. \end{cases}$$

62. 求下列函数的定义域:

$$(1) y = \sqrt{x^2 + 2x + 4}; \quad (2) y = \sqrt{x} + \sqrt{1-x};$$

$$(3) y = \sqrt{x^2 - 4x - 12}; \quad (4) y = \sqrt{(1-x)(1+5x)};$$

$$(5) y = \sqrt{\frac{2x-4}{x+1}}; \quad (6) y = \sqrt{-\frac{x-4}{2-x}}.$$

63. 解不等式 $\frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 2x + 8} > 0$.

64. 解不等式 $\frac{(a-x)(x-b)}{ax-b} < 0$ ($a > 0, b > 0$, 且 $\frac{b}{a} > a > b$).

65. 解不等式 $\frac{(x-3)(x-5)(8-x)^3}{(x-2)(5x-7)^2} < 0$.

66. 解不等式 $\frac{(2x-5)(4x-7)^{2n}}{(4-3x)(8-x)^{2n+1}} > 0$ ($n \in \mathbb{N}$).

67. 解下列不等式:

(1) $\sqrt{3x-5} - \sqrt{x-4} > 0$;

(2) $\sqrt{(x+2)(x-5)} < 8-x$;

(3) $\sqrt{9-x^2} + \sqrt{6x-x^2} > 3$;

(4) $\sqrt[3]{2-x} + \sqrt{x-1} > 1$.

68. 解不等式 $3 \times 5^{2x+3} > 7$.

69. 解不等式 $x^{\log_a x} > a^{-2} x^{\frac{9}{2}}$.

(1) $a > 1$; (2) $0 < a < 1$.

70. 解不等式 $\log_a^2 x < \log_x^2 a$ ($0 < a < 1$).

71. 解不等式 $\left| \frac{2x+1}{x+3} + \frac{1}{2} \right| < \frac{1}{2}$.

72. 设对所有实数 x , 不等式

$$x^2 \log_2 \frac{4(a+1)}{a} + 2x \cdot \log_2 \frac{2a}{a+1} + \log_2 \frac{(a+1)^2}{4a^2} > 0$$

都成立, 求 a 的取值范围.

73. (1) 求不等式 $\sin 2x > 0$ 的解集;

(2) 当 $\sin 2x > 0$ 时, 求不等式

$$\log_{0.5}(x^2 - 2x - 15) > \log_{0.5}(x + 13)$$

的解集.

74. 求函数 $y = \arcsin(1-2x)$ 的定义域.