高中数理化文集

GAOZHONGSHULIHUAWENJI

主编/侯秀姣
韩可立
宋金榜

河南教育出版社

高中数理化文集

主　编　侯秀姣　韩可立　宋金榜
副主编　杨钟珩　刘庆玮
编　委　杨钟珩　刘庆玮　侯秀姣
韩可立　宋金榜　田发银
潘康伯

河南教育出版社

(豫)新登字 03 号

高中数理化文集

*

侯秀姣　韩可立　宋金榜　主编

河南教育出版社出版发行

(郑州农业路 73 号　邮编 450002)

河南第一新华印刷厂印刷

787×1092 毫米　32 开本　10.5 印张　246 千字

1993 年 4 月第 1 版　　1993 年 4 月第 1 次印刷

印数 1—5,000 册

ISBN 7-5347-1316-1/G・1290

定价 6.00 元

前　言

如培根所说:“有些书只需品尝,有些书需要吞咽,还有少数的书应该细嚼。”无疑,《高中数理化文集》是值得每个想学好数理化的同学“细嚼”的好书。她收入了对高中生学习数理化具有重要指导作用的优秀文稿一百多篇。这些首次面世的作品,内容新颖,说理透彻,见解独到。这本《文集》汇集了全国知名的特级教师、高级教师和具有丰富教学经验的教研员以及教学新秀的智慧,知识容量大,信息密集,具有新颖、系统、实用、实惠等特点,是适合高中各年级学生阅读的较为理想的学习指导用书。

本书编写过程中得到了全国广大中学数理化教师的大力支持,在此向他们表示真诚的感谢。由于水平和时间关系,书中可能出现的缺点或错误之处,欢迎广大读者批评指正。

编者

目　　录

·数学部分·

·物理部分·

·化学部分·

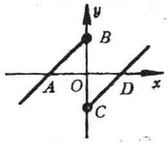
学会“设计”函数

江苏无锡市第三中学　　季能成

高一《代数》在“映射与函数”一节中着重讲述了根据函数表达式讨论 函数性质(如单调性、奇偶性、反函数的存在性等)的方法.在此基础上,如果还能够按照指定要求“设计”出具有某种特性的函数,将有助于我们进一步理解、深化函数的有关概念,增强对有关函数命题的辨析、判断能力.

“设计”函数时,可先作出合乎要求的图象(为简单计,一般可画直线或直线段),然后再将图象“译”成函数的表达式.请看几例:

例 1　设计一个函数 $f(x)$,使其单调增区间是 $(-\infty, 0]$、$(0, +\infty)$.



如图,设 A、B、C、D 四点坐标分别是 $(-1,0)$、$(0,1)$、$(0,-1)$、$(1,0)$.易见,此图象对应的函数表达式是

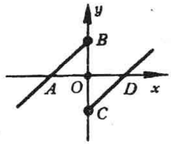
$$y = f(x) = \begin{cases} x+1, x \leqslant 0; \\ x-1, x > 0. \end{cases}$$

说明:显然,所设计的函数 $f(x)$ 的单调增区间不能写成 $(-\infty, +\infty)$. 这就是说,原来被分割的单调区间不能合并成连续的区间;反之,原来连续的单调区间也不能被分割.

例 2　设计一个没有反函数的奇函数.

如图所示,A、B、C、D 的坐标同例 1.这是一个奇函数的

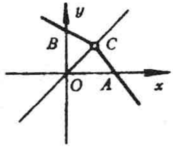
图象，其函数表达式是



$$y = f(x) = \begin{cases} x + 1, & x < 0; \\ 0, & x = 0; \\ x - 1, & x > 0. \end{cases}$$

显然，这个函数对应的映射不是一一映射，因此它没有反函数.

例 3　设计一个函数 $f(x)$，使 $y = f(x)$ 与其反函数 $y = f^{-1}(x)$ 的公共点不在直线 $y = x$ 上.



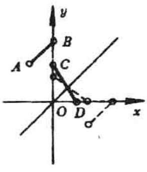
如图所示，设 A、B、C 三点坐标分别是 $\left(\frac{3}{2},0\right)$、$\left(0,\frac{3}{2}\right)$、$(1,1)$.

该图象对应的函数表达式是

$$y = f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}, x < 1; \\ -2x + 3, \quad x > 1. \end{cases}$$

可以看出，函数 $y = f(x)$ 与其反函数 $y = f^{-1}(x)$ 的图象完全重合，它们的公共点即是图象自身，且都不在直线 $y = x$ 上(注意函数 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处不予定义).

例 4　设计一个非单调函数 $y = f(x)$，但它存在反函数.



如图，设 A、B、C、D 坐标分别是 $(-2,3)$、$(0,5)$、$(0,3)$、$(2,0)$，将 $y = f(x)$ 的定义域限制在 $(-2,2)$ 内，对应的函数表达式是

$$y = f(x) = \begin{cases} x + 5, -2 < x < 0; \\ -\frac{3}{2}x + 3, 0 \leqslant x < 2. \end{cases}$$

不难看出，$y = f(x)$ 在 $(-2,2)$ 内虽然是非单调函数，但

由于对应的映射是一一映射，因此这个函数存在反函数 $y=f^{-1}(x)$（反函数的图象为虚线所示）.

函数的奇偶性与解题

安徽歙县行知中学　　王华民

函数的奇偶性是函数的一种重要属性. 这里谈谈函数的奇偶性定义及图象的对称性质在解题中的一些应用.

一、判断函数的单调性及比较大小

例 1　已知偶函数 $f(x)$ 在$[2,4]$上单调递增，试比较 $a=f\left(\log_{\frac{1}{2}}8\right)$ 与 $b=f(\pi)$ 的大小.

分析：解本题的关键是要判断$x\in[-4,-2]$时$f(x)$的单调性.

解：由题设和偶函数的图象关于 y 轴对称，可知 $f(x)$ 在 $[-4,-2]$ 上单调递减. 而 $a=f\left(\log_{\frac{1}{2}}8\right)=f(-3)$，$f(\pi)=f(-\pi)$，因 $-3>-\pi$，故 $f(-3)<f(-\pi)$，得 $a<b$.

二、作图方面的应用

由奇偶函数的图象关于原点或 y 轴的对称性，不仅能帮助判断函数图象的形状，简化作图，而且还可由图象的一边，补作出图象的另一边. 例略.

三、化简、求值

例 2　已知 $f(x)=ax^3+b\sin x+cx$，$g(x)=x^{10}+x^{-10}$，若 $f(\alpha)=6$，$g(\beta)=100$，求 $f(-\alpha)$，$g(-\beta)$.

简解：易知对于定义域内的任一个 x，均有 $f(-x)=-f(x)$，$g(-x)=g(x)$，故 $f(x)$ 为奇函数，$g(x)$ 为偶函数. 得 $f(-\alpha)=-f(\alpha)=-6$，$g(-\beta)=g(\beta)=100$.

可见由函数奇偶性,带来解题的巧妙!

四、求函数的最值

例 3 假设 $q(x), g(x)$ 均为奇函数,$f(x) = aq(x) + bg(x) + 2$ 在 $(0, +\infty)$ 上有最大值 5,则在 $(-\infty, 0)$ 上,$f(x)$ 有( ).

(A) 最小值 -5. (B) 最小值 -3.

(C) 最小值 -1. (D) 最大值 -5.

简解:令 $h(x) = aq(x) + bg(x)$,则 $h(-x) = aq(-x) + bg(-x) = -h(x)$,$h(x)$ 为奇函数. 由奇函数的图象关于原点对称知,$h(x)$ 的最小值为 -3,故 $f(x)$ 的最小值为 $-3 + 2 = -1$,应选(C).

五、解答方程

例 4 已知关于 x 的方程 $x^2 - 2a\sin(\cos x) + a^2 = 0$ 有唯一解,求 a 的所有取值.

解:已给方程是一个融 x 的代数式和超越式为一体的方程,直接求解困难,需要转换角度. 构造函数 $f(x) = x^2 - 2a\sin(\cos x) + a^2$,因 $f(-x) = f(x)$,故 $f(x)$ 为偶函数. 因方程 $f(x) = 0$ 有解,设为 $x = \beta$,则 $f(-\beta) = f(\beta) = 0$. 又方程的解唯一,所以 $-\beta = \beta$,得 $\beta = 0$. 将 $x = 0$ 代入原方程得 $a = 0$ 或 $a = 2\sin 1$. 不难验证,上述 a 值即为所求.

函数的奇偶性再一次帮助我们叩开了解题的大门.

六、已知一个区间上的函数式,求另一个区间上的函数式

例 5 定义在 R 上的奇函数 $f(x)$,当 $x \geqslant 0$ 时它的函数表达式为 $y = \log_2(x^3 + x^2 + x + 1)$,那么当 $x < 0$ 时,它的函数表达式为( ).

(A) $-\log_2(-x^3 + x^2 - x + 1)$.

(B) $\log_2(-x^3 + x^2 - x + 1)$.

(C) $-\log_2(x^3+x^2+x+1)$.

(D) $\log_2(x^3+x^2+x+1)$.

(第三届“希望杯”全国数学邀请赛第1试试题)

分析:解答此题的关键是将未知区间$(-\infty,0)$中的x转换成已知区间$[0,+\infty)$中含x的变量,再利用题设和奇函数的定义求解.

简解:设$x<0$,则$-x>0$. 由题意得$y=f(-x)=\log_2(-x^3+x^2-x+1)$,又由奇函数的定义可得$f(x)=-f(-x)=-\log_2(-x^3+x^2-x+1)$. 选(A).

由上可见,如能巧妙利用函数奇偶性解题,有时能收到出奇制胜的效果.

“Δ法”求函数的最值和值域防误策略

河南鹤壁市第二中学　　石来根

如果函数$y=f(x)$经过变形后,可以化为x的一元二次方程

$$f_1(y)x^2+f_2(y)x+f_3(y)=0. \qquad ①$$

由方程有实根,故其判别式

$$\Delta=[f_2(y)]^2-4f_1(y)f_3(y)\geqslant 0. \qquad ②$$

如果关于y的不等式②可以解出y的取值范围,便可求出函数$y=f(x)$的最值和值域. 这就是求函数的最值和值域的“Δ法”. 但是,在利用“Δ法”求函数的最值和值域时,若不注意函数的定义域,一概而论,往往导致错误的结果.

例　求函数$y=\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}+3}$的最小值.

解：令$\sqrt{x}=t$，函数变形为

$$y=t+\frac{1}{t+3}.$$

整理得　$t^2+(3-y)t+1-3y=0.$

$\because$　t 是实数，

$\therefore$　$\Delta=(3-y)^2-4(1-3y)\geqslant 0.$

$\therefore$　$y\leqslant -5$ 或 $y\geqslant -1.$

求不出函数的最小值！

错误的原因何在？主要是在以上的变形中，当 $x\geqslant 0$ 时 $t=\sqrt{x}\geqslant 0$，而 $\Delta\geqslant 0$ 仅仅能够使方程 $t^2+(3-y)t+1-3y=0$ 有实根，但不能保证方程有非负实根，解题过程出现了不等价的变形.

在利用"Δ 法"求函数的最值和值域时，怎样才能防止错误现象发生？这里提供几种基本方法.

一、直观判断法　若函数 $y=f(x)$ 的定义域为全体实数，且能够用"Δ 法"求函数的最值和值域，则结果可靠.

例 1　求函数 $y=\dfrac{2x}{x^2+x+1}$ 的最值.

解：对于 $x\in R$，都有 $x^2+x+1\neq 0$，函数的定义域为 $x\in R$.

将函数变形为 $yx^2+(y-2)x+y=0.$

当 $y\neq 0$ 时，因 x 为实数，

$\therefore$　$\Delta=(y-2)^2-4y^2\geqslant 0.\ -2\leqslant y\leqslant\dfrac{2}{3}.$

当 $y=0$ 时，$x=0.$

$\therefore$　函数的最大值为$\dfrac{2}{3}$，最小值为 $-2.$

例 2　求函数 $y=\dfrac{\sec^2x-\mathrm{tg}x}{\sec^2x+\mathrm{tg}x}$ 的值域.

解:将函数化成 $y=\dfrac{\mathrm{tg}^2x-\mathrm{tg}x+1}{\mathrm{tg}^2x+\mathrm{tg}x+1}$.

$(y-1)\mathrm{tg}^2x+(y+1)\mathrm{tg}x+y-1=0.$

当 $y-1\neq 0$ 时,因 $\mathrm{tg}x\in R$,

$\therefore\quad \Delta=(y+1)^2-4(y-1)^2\geqslant 0.$

$\therefore\quad \dfrac{1}{3}\leqslant y<1$ 或 $1<y\leqslant 3$.

当 $y-1=0$ 即 $y=1$ 时,$\mathrm{tg}x=0$,函数有意义.

$\therefore$　函数的值域为$\dfrac{1}{3}\leqslant y\leqslant 3$.

二、代入验证法　当函数 $y=f(x)$ 的定义域不是全体实数时,利用"Δ 法"求最值后,还需要进行检验.方法是将最值代入原函数验证,如果在函数的定义域内有相应的 x 值与它对应,则结果可靠.

例 3　在 $\triangle ABC$ 中,求函数 $y=\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}$ 的最大值.

解:将函数化成

$$y=-\frac{1}{2}\left(\cos\frac{A+B}{2}-\cos\frac{A-B}{2}\right)\sin\frac{C}{2}$$

$$=-\frac{1}{2}\sin^2\frac{C}{2}+\frac{1}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}\right)\sin\frac{C}{2}.$$

$$\therefore\quad \sin^2\frac{C}{2}-\left(\cos\frac{A-B}{2}\right)\sin\frac{C}{2}+2y=0.$$

$\because\quad 0<\sin\dfrac{C}{2}<1$ 是实数,

$$\therefore\quad \Delta=\cos^2\frac{A-B}{2}-8y\geqslant 0,$$

$$y\leqslant\frac{1}{8}\cos^2\frac{A-B}{2}\leqslant\frac{1}{8}.$$

当 $y=\dfrac{1}{8}$ 时,$\cos\dfrac{A-B}{2}=1$,$\sin\dfrac{C}{2}=\dfrac{1}{2}\in(0,1)$,