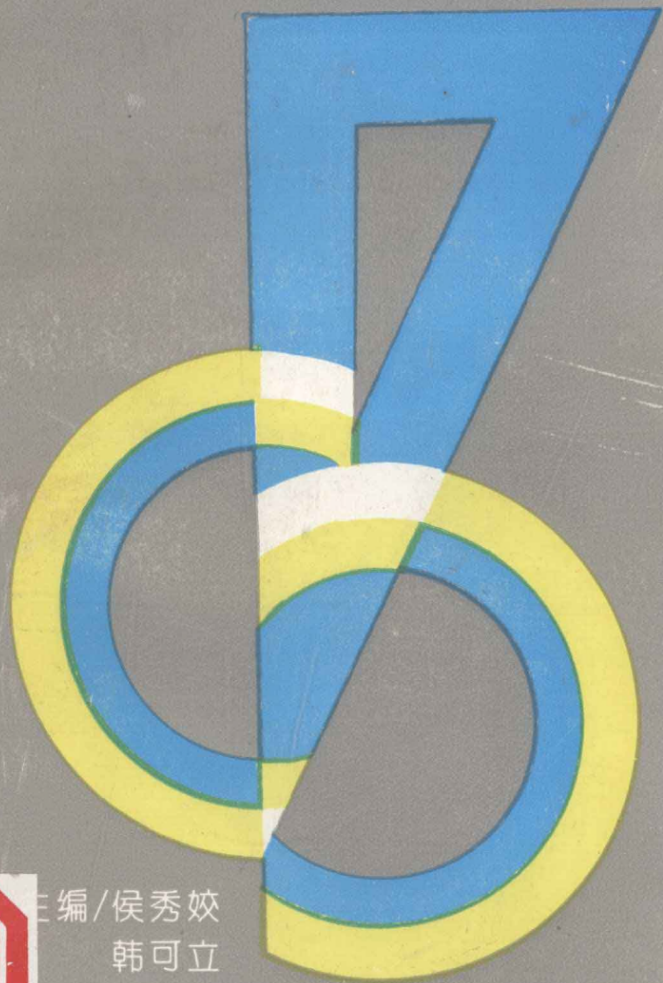


GAOZHONGSHULIHUAWENJI

河南教育出版社

高中数理化文集



主编/侯秀姣
韩可立
宋金榜

高中数理化文集

主 编	侯秀姣	韩可立	宋金榜
副主编	杨钟珩	刘庆玮	
编 委	杨钟珩	刘庆玮	侯秀姣
	韩可立	宋金榜	田发银
	潘康伯		

河南教育出版社

(豫)新登字 03 号

高中数理化文集

*

侯秀数 韩可立 宋金榜 主编

河南教育出版社出版发行

(郑州农业路 73 号 邮编 450002)

河南第一新华印刷厂印刷

787×1092 毫米 32 开本 10.5 印张 246 千字

1993 年 4 月第 1 版 1993 年 4 月第 1 次印刷

印数 1—5,000 册

ISBN 7-5347-1316-1/G · 1290

定价 6.00 元

前 言

如培根所说：“有些书只需品尝，有些书需要吞咽，还有少数的书应该细嚼。”无疑，《高中数理化文集》是值得每个想学好数理化的同学“细嚼”的好书。她收入了对高中生学习数理化具有重要指导作用的优秀文稿一百多篇。这些首次面世的作品，内容新颖，说理透彻，见解独到。这本《文集》汇集了全国知名的特级教师、高级教师和具有丰富教学经验的教研员以及教学新秀的智慧，知识容量大，信息密集，具有新颖、系统、实用、实惠等特点，是适合高中各年级学生阅读的较为理想的学习指导用书。

本书编写过程中得到了全国广大中学数理化教师的大力支持，在此向他们表示真诚的感谢。由于水平和时间关系，书中可能出现的缺点或错误之处，欢迎广大读者批评指正。

编者

目 录

• 数学部分 •

学会“设计”函数	季能成(1)
函数的奇偶性与解题	王华民(3)
“ Δ 法”求函数的最值和值域防误策略	石来根(5)
判别式法解题失误例谈	韩剑华(9)
判别式的一些应用	韩高印(11)
应当提高利用方程解题的自觉性	袁 桐等(15)
迅速判断 $\frac{\theta}{n}$ 所在范围的方法	贾国涛(18)
一道最值题的发散联想	王明耀(20)
三角函数解析式的四种求法	刘应平(23)
课本上一道例题的引伸	刘志明(26)
常量与变量转化法	姚火生(27)
多种错误, 一个原因	张国棟(29)
解题三部曲: 观察、联想、代换	林福茂(31)
算术—几何平均不等式的加强及应用	潘康伯(35)
“ $H(a) \leq G(a) \leq A(a) \leq Q(a)$ ”在证明不等式 中的应用	田发银等(38)
构造函数式推证不等式	张数尧(42)
错解分析	刘志华(45)
一道不等式的错解剖析	徐凤社(47)
柯西不等式值得注意的两个特例	张孝先(50)

谈单位圆在反三角函数中的应用	李琳(52)
谈谈利用增量证明不等式	陈后迪(54)
数列求和八法	陈锡志(57)
一类数列求和的公式解法	丁德兴(63)
函数思想在解数列题中的体现	李同林(65)
巧用公式 $C_n^m + C_n^{m-1} = C_{n+1}^m$ 求和两例	高淑清(67)
也谈数学归纳法	朱贤舜(68)
由课本一道例题所想到的	申古义(71)
求三项展开式中指定项系数的通法	王炜(73)
$z \in R \Leftrightarrow z = \bar{z}$ 在解题中的应用	张富学(75)
复合函数谈	王霖伯(77)
浅谈提高数学解题速度	周懿鑫(81)
增量方法与不等式的证明	李再湘(85)
利用图象解不等式	邱均田(88)
$\log_a b$ 和 $\log_{a+1}(b+1)$ 大小的比较	邵国强(90)
异面直线性质小议	储传能等(92)
用割裂法巧解一道高考题	周守智(95)
利用图形的不确定性解题	田光东(97)
定比分点公式的应用	黄关汉(98)
从一道学生作业中的错误谈起	邓先春(100)
斜率公式在求最值中的应用	杨同强(102)
关于一类直线方程的简捷解法	甘大旺(104)
$x_0x + y_0y = r^2$	王乐陶(106)
求二次曲线内中点弦方程的一种方法	刘让步(108)
引进参数 简捷解题	孔宪福(111)
求函数最值不容忽视隐含条件	徐东(114)
浅谈“用数解形”	李保荣(115)

用线圆共点条件巧解三角题	陈耀宇(118)
一道高考题的多种解法	谢春如(120)
浅议极坐标系中点的表示不唯一性	李国泰(123)

• 物理部分 •

从过程分解中探求解题途径	汤仲华(127)
物理过程的阶段分析法	宋力敬(130)
牛顿第一定律是牛顿第二定律的特例吗	杨寿征(132)
学习牛顿第二定律要五明确	沈定武(134)
细谈动能定理	胡友朋等(137)
动量定理的推广应用	李平申(140)
速度、加速度的概念及运用	魏肇轩等(142)
动量守恒定律应用分析一例	陈杰(147)
不要疏忽了问题的特殊情形	郑圣国(149)
做功与势能变化及常见解题法	颜华(151)
判断各种势能增减的统一方法	邓又新(155)
转换研究对象	
——解综合性物理题的有效方法	张钦(156)
$I_m = \sqrt{2} I$ 的两种简单导出方法	焦月霞(159)
电容器带电量的求解	孙贤春(161)
转动导体棒感应电动势例析	赵全明(163)
浅析“断线”问题	高民生等(165)
一道题目的多种解法	李功(168)
摆钟走时快慢问题的解法	包广治(170)
判断质点振动方向的简捷方法	刘代祥(172)
巧用图线法解物理题	边秀文(174)

查理定律的推广应用及图象解法	李瑛瑛等(177)
计算型选择题的定性求解	丁敏方(179)
怎样快速选择伏安法	史克全(181)
输电导线上损耗功率的计算	黄 祥(185)
学会使用欧姆表	徐春生(188)
用“半偏法”测电流表内阻实验的定量分析	范家舟(190)
感应电动势的计算	顾建元(193)
究竟哪段重	
——一个力学问题的解法探讨	党克明(195)
混联电池组最大输出功率的讨论	吴望渊(197)
力学错解两例	刘保华(200)
得数基本相等就可认为解法对吗	孟 进(203)
用动量定理解题的常见错误	陈建华(205)
一个十分隐蔽的错误	陈龙彪(206)
一个断路自感现象的讨论	刘兴亮(208)
条件真的不足吗	曾志旺(210)
物理公式分类导析	毕景涛(212)
思路、技巧和方法	
——高中力学总复习一例	俞鉴康等(217)
弄清物理过程 巧解物理习题	王永胜(221)
多题归一复习法	王明清(223)
应用考点提高总复习课的目标教学质量	林 辉(227)

• 化学部分 •

卤素的“三性”	白凤城(231)
硫元素在反应中的变价规律	史玉春(233)

书写离子方程式五注意	千荣齐(236)
化学概念辨析三则	朱爱民等(238)
物质氧化性和还原性强弱的判断	仲启维(240)
如何学好元素周期表	白聪枝(243)
化学平衡状态的判定	周玉兰等(246)
学习原电池和电解池重在掌握规律	李居浩(249)
浅析电解过程中的变化	王新中(253)
烷基位次规律及应用	王立功(256)
最简同系物的特殊性	周改英等(257)
书写碳链同分异构体的要领	陈瑞民(260)
假设情景巧解题	徐立峰(262)
有机推导题精思妙解一例	龚行三(264)
等值分子量规律及其应用	舒继青(267)
举“二”反“三”当防错	黄若海(269)
高考审题失误探微	郑春荣(270)
24 组常见易错的物质鉴别	柳兆华(273)
巧选最佳途径 妙得最多产量	蒯世定(277)
盐类水解的应用十个为什么	李儒彬(279)
整体总价配平法	尚建云(281)
氧化-还原方程式配平小技	王孝军(283)
巧用比较法解化学计算题	闵楚文(285)
归一·换元·复位	胡嘉谋(287)
化学解题中的 x 、 y 、 z	陈士毅(290)
两类化学计算题的快解技巧	朱 丹(292)
貌似相同 实则有别	邹贵传(296)
用合金质量中间值法解一类化学题	秦兴安等(298)
烃的燃烧计算规律及应用	孙炳欣(300)

利用几何定律解化学计算题	陈 方(302)
怎样解答化学图象题	田聪芝(305)
化学药品变质综述	严济良(307)
中学化学里的三氯化铁	邵喜先(310)
能使溴水褪色的反应举隅	姚英辉(313)
化学方程式的组合与分解	王朝喜(314)
书写化学方程式的思路和规律	郭春生等(316)

· 数学部分 ·

学会“设计”函数

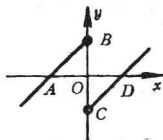
江苏无锡市第三中学 季能成

高一《代数》在“映射与函数”一节中着重讲述了根据函数表达式讨论函数性质(如单调性、奇偶性、反函数的存在性等)的方法.在此基础上,如果还能够按照指定要求“设计”出具有某种特性的函数,将有助于我们进一步理解、深化函数的有关概念,增强对有关函数命题的辨析、判断能力.

“设计”函数时,可先作出合乎要求的图象(为简单计,一般可画直线或直线段),然后再将图象“译”成函数的表达式.请看几例:

例1 设计一个函数 $f(x)$,使其单调增区间是 $(-\infty, 0]$ 、 $(0, +\infty)$.

如图,设 A 、 B 、 C 、 D 四点坐标分别是 $(-1, 0)$ 、 $(0, 1)$ 、 $(0, -1)$ 、 $(1, 0)$. 易见,此图象对应的函数表达式是



$$y = f(x) = \begin{cases} x + 1, & x \leq 0; \\ x - 1, & x > 0. \end{cases}$$

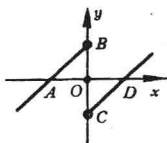
说明:显然,所设计的函数 $f(x)$ 的单调增区间不能写成 $(-\infty, +\infty)$. 这就是说,原来被分割的单调区间不能合并成连续的区间;反之,原来连续的单调区间也不能被分割.

例2 设计一个没有反函数的奇函数.

如图所示, A 、 B 、 C 、 D 的坐标同例1. 这是一个奇函数的

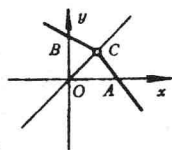
图象,其函数表达式是

$$y = f(x) = \begin{cases} x + 1, & x < 0; \\ 0, & x = 0; \\ x - 1, & x > 0. \end{cases}$$



显然,这个函数对应的映射不是一一映射,因此它没有反函数.

例 3 设计一个函数 $f(x)$, 使 $y = f(x)$ 与其反函数 $y = f^{-1}(x)$ 的公共点不在直线 $y = x$ 上.



如图所示,设 A 、 B 、 C 三点坐标分别是

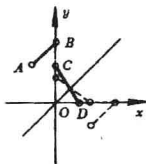
$$\left(\frac{3}{2}, 0\right), \left(0, \frac{3}{2}\right), (1, 1).$$

该图象对应的函数表达式是

$$y = f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}, & x < 1; \\ -2x + 3, & x > 1. \end{cases}$$

可以看出,函数 $y = f(x)$ 与其反函数 $y = f^{-1}(x)$ 的图象完全重合,它们的公共点即是图象自身,且都不在直线 $y = x$ 上(注意函数 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处不予定义).

例 4 设计一个非单调函数 $y = f(x)$, 但它存在反函数.



如图,设 A 、 B 、 C 、 D 坐标分别是 $(-2, 3)$ 、 $(0, 5)$ 、 $(0, 3)$ 、 $(2, 0)$, 将 $y = f(x)$ 的定义域限制在 $(-2, 2)$ 内,对应的函数表达式是

$$y = f(x) = \begin{cases} x + 5, & -2 < x < 0; \\ -\frac{3}{2}x + 3, & 0 \leq x < 2. \end{cases}$$

不难看出, $y = f(x)$ 在 $(-2, 2)$ 内虽然是非单调函数,但

由于对应的映射是一一映射,因此这个函数存在反函数 $y = f^{-1}(x)$ (反函数的图象为虚线所示).

函数的奇偶性与解题

安徽歙县行知中学 王华民

函数的奇偶性是函数的一种重要属性. 这里谈谈函数的奇偶性定义及图象的对称性质在解题中的一些应用.

一、判断函数的单调性及比较大小

例 1 已知偶函数 $f(x)$ 在 $[2, 4]$ 上单调递增, 试比较 $a = f(\log_{\frac{1}{2}} 8)$ 与 $b = f(\pi)$ 的大小.

分析: 解本题的关键是要判断 $x \in [-4, -2]$ 时 $f(x)$ 的单调性.

解: 由题设和偶函数的图象关于 y 轴对称, 可知 $f(x)$ 在 $[-4, -2]$ 上单调递减. 而 $a = f(\log_{\frac{1}{2}} 8) = f(-3)$, $f(\pi) = f(-\pi)$, 因 $-3 > -\pi$, 故 $f(-3) < f(-\pi)$, 得 $a < b$.

二、作图方面的应用

由奇偶函数的图象关于原点或 y 轴的对称性, 不仅能帮助判断函数图象的形状, 简化作图, 而且还可由图象的一边, 补作出图象的另一边. 例略.

三、化简、求值

例 2 已知 $f(x) = ax^3 + b\sin x + cx$, $g(x) = x^{10} + x^{-10}$, 若 $f(a) = 6$, $g(\beta) = 100$, 求 $f(-a)$, $g(-\beta)$.

简解: 易知对于定义域内的任一个 x , 均有 $f(-x) = -f(x)$, $g(-x) = g(x)$, 故 $f(x)$ 为奇函数, $g(x)$ 为偶函数. 得 $f(-a) = -f(a) = -6$, $g(-\beta) = g(\beta) = 100$.

可见由函数奇偶性,带来解题的巧妙!

四、求函数的最值

例 3 假设 $q(x), g(x)$ 均为奇函数, $f(x) = aq(x) + bg(x) + 2$ 在 $(0, +\infty)$ 上有最大值 5, 则在 $(-\infty, 0)$ 上, $f(x)$ 有().

(A) 最小值 - 5. (B) 最小值 - 3.

(C) 最小值 - 1. (D) 最大值 - 5.

简解: 令 $h(x) = aq(x) + bg(x)$, 则 $h(-x) = aq(-x) + bg(-x) = -h(x)$, $h(x)$ 为奇函数. 由奇函数的图象关于原点对称知, $h(x)$ 的最小值为 - 3, 故 $f(x)$ 的最小值为 $-3 + 2 = -1$, 应选(C).

五、解答方程

例 4 已知关于 x 的方程 $x^2 - 2a\sin(\cos x) + a^2 = 0$ 有唯一解, 求 a 的所有取值.

解: 已给方程是一个融 x 的代数式和超越式为一体的方程, 直接求解困难, 需要转换角度. 构造函数 $f(x) = x^2 - 2a\sin(\cos x) + a^2$, 因 $f(-x) = f(x)$, 故 $f(x)$ 为偶函数. 因方程 $f(x) = 0$ 有解, 设为 $x = \beta$, 则 $f(-\beta) = f(\beta) = 0$. 又方程的解唯一, 所以 $-\beta = \beta$, 得 $\beta = 0$. 将 $x = 0$ 代入原方程得 $a = 0$ 或 $a = 2\sin 1$. 不难验证, 上述 a 值即为所求.

函数的奇偶性再一次帮助我们叩开了解题的大门.

六、已知一个区间上的函数式, 求另一个区间上的函数式

例 5 定义在 R 上的奇函数 $f(x)$, 当 $x \geq 0$ 时它的函数表达式为 $y = \log_2(x^3 + x^2 + x + 1)$, 那么当 $x < 0$ 时, 它的函数表达式为().

(A) $-\log_2(-x^3 + x^2 - x + 1)$.

(B) $\log_2(-x^3 + x^2 - x + 1)$.

$$(C) -\log_2(x^3 + x^2 + x + 1).$$

$$(D) \log_2(x^3 + x^2 + x + 1).$$

(第三届“希望杯”全国数学邀请赛第1试试题)

分析:解答此题的关键是将未知区间 $(-\infty, 0)$ 中的 x 转换成已知区间 $[0, +\infty)$ 中含 x 的变量,再利用题设和奇函数的定义求解.

简解:设 $x < 0$, 则 $-x > 0$. 由题意得 $y = f(-x) = \log_2(-x^3 + x^2 - x + 1)$, 又由奇函数的定义可得 $f(x) = -f(-x) = -\log_2(-x^3 + x^2 - x + 1)$. 选(A).

由上可见,如能巧妙利用函数奇偶性解题,有时能收到出奇制胜的效果.

“ Δ 法”求函数的最值和值域防误策略

河南鹤壁市第二中学 石来根

如果函数 $y = f(x)$ 经过变形后,可以化为 x 的一元二次方程

$$f_1(y)x^2 + f_2(y)x + f_3(y) = 0. \quad ①$$

由方程有实根,故其判别式

$$\Delta = [f_2(y)]^2 - 4f_1(y)f_3(y) \geq 0. \quad ②$$

如果关于 y 的不等式②可以解出 y 的取值范围,便可求出函数 $y = f(x)$ 的最值和值域.这就是求函数的最值和值域的“ Δ 法”.但是,在利用“ Δ 法”求函数的最值和值域时,若不注意函数的定义域,一概而论,往往导致错误的结果.

例 求函数 $y = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x} + 3}$ 的最小值.

解:令 $\sqrt{x} = t$, 函数变形为

$$y = t + \frac{1}{t+3}.$$

整理得 $t^2 + (3-y)t + 1 - 3y = 0$.

$\because t$ 是实数,

$$\therefore \Delta = (3-y)^2 - 4(1-3y) \geq 0.$$

$$\therefore y \leq -5 \text{ 或 } y \geq -1.$$

求不出函数的最小值!

错误的原因何在?主要是在以上的变形中,当 $x \geq 0$ 时 $t = \sqrt{x} \geq 0$, 而 $\Delta \geq 0$ 仅仅能够使方程 $t^2 + (3-y)t + 1 - 3y = 0$ 有实根,但不能保证方程有非负实根,解题过程出现了不等价的变形.

在利用“ Δ 法”求函数的最值和值域时,怎样才能防止错误现象发生?这里提供几种基本方法.

一、直观判断法 若函数 $y = f(x)$ 的定义域为全体实数,且能够用“ Δ 法”求函数的最值和值域,则结果可靠.

例1 求函数 $y = \frac{2x}{x^2 + x + 1}$ 的最值.

解:对于 $x \in R$, 都有 $x^2 + x + 1 \neq 0$, 函数的定义域为 $x \in R$.

将函数变形为 $yx^2 + (y-2)x + y = 0$.

当 $y \neq 0$ 时,因 x 为实数,

$$\therefore \Delta = (y-2)^2 - 4y^2 \geq 0. \quad -2 \leq y \leq \frac{2}{3}.$$

当 $y = 0$ 时, $x = 0$.

$\therefore$ 函数的最大值为 $\frac{2}{3}$, 最小值为 -2 .

例2 求函数 $y = \frac{\sec^2 x - \operatorname{tg} x}{\sec^2 x + \operatorname{tg} x}$ 的值域.

解:将函数化成 $y = \frac{\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x + 1}{\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x + 1}$.

$$(y-1)\operatorname{tg}^2 x + (y+1)\operatorname{tg} x + y-1 = 0.$$

当 $y-1 \neq 0$ 时, 因 $\operatorname{tg} x \in R$,

$$\therefore \Delta = (y+1)^2 - 4(y-1)^2 \geq 0.$$

$$\therefore \frac{1}{3} \leq y < 1 \text{ 或 } 1 < y \leq 3.$$

当 $y-1 = 0$ 即 $y = 1$ 时, $\operatorname{tg} x = 0$, 函数有意义.

$$\therefore \text{函数的值域为 } \frac{1}{3} \leq y \leq 3.$$

二、代入验证法 当函数 $y = f(x)$ 的定义域不是全体实数时, 利用“ Δ 法”求最值后, 还需要进行检验. 方法是将最值代入原函数验证, 如果在函数的定义域内有相应的 x 值与它对应, 则结果可靠.

例3 在 $\triangle ABC$ 中, 求函数 $y = \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$ 的最大值.

解:将函数化成

$$y = -\frac{1}{2} \left(\cos \frac{A+B}{2} - \cos \frac{A-B}{2} \right) \sin \frac{C}{2}$$

$$= -\frac{1}{2} \sin^2 \frac{C}{2} + \frac{1}{2} \left(\cos \frac{A-B}{2} \right) \sin \frac{C}{2}.$$

$$\therefore \sin^2 \frac{C}{2} - \left(\cos \frac{A-B}{2} \right) \sin \frac{C}{2} + 2y = 0.$$

$$\therefore 0 < \sin \frac{C}{2} < 1 \text{ 是实数,}$$

$$\therefore \Delta = \cos^2 \frac{A-B}{2} - 8y \geq 0,$$

$$y \leq \frac{1}{8} \cos^2 \frac{A-B}{2} \leq \frac{1}{8}.$$

$$\text{当 } y = \frac{1}{8} \text{ 时, } \cos \frac{A-B}{2} = 1, \sin \frac{C}{2} = \frac{1}{2} \in (0, 1),$$