普通高等教育“十一五”规划教材
21世纪大学数学创新教材
丛书主编　陈　化

# 概率论与数理统计

## （第二版）

李书刚　编

科学出版社
www.sciencep.com

普通高等教育“十一五”规划教材
21世纪大学数学创新教材

丛书主编　陈　化

# 概率论与数理统计

（第二版）

李书刚　编



科学出版社
北京

## 内 容 简 介

本书是根据作者多年来讲授概率论与数理统计课程的讲义整理编写而成的. 全书共分六章：第一至四章介绍了概率论的基础知识，第五、六章介绍了数理统计的基础知识. 每章末附有一定量的习题，并选编了多年来数学(一)考研试题.

本书可作为高等院校教材，也可供考研复习使用.

**图书在版编目(CIP)数据**

概率论与数理统计/李书刚编. —2版. —北京：科学出版社，2010.8

普通高等教育"十一五"规划教材. 21世纪大学数学创新教材

ISBN 978-7-03-028395-5

Ⅰ. ①概… Ⅱ. ①李… Ⅲ. ①概率论—高等学校—教材②数理统计—高等学校—教材 Ⅳ. ①O21

中国版本图书馆CIP数据核字(2010)第142471号

责任编辑：高 嵘 /责任校对：王望容

责任印制：彭 超 /封面设计：苏 波

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

京山德兴印刷有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2008年8月第一版

2010年8月第二版 开本：B5 (720×1000)

2010年8月第二次印刷 印张：12 1/4

印数：5 001—8 000 字数：229 000

**定价：19.00元**

# 前　　言

客观世界中发生的现象不外乎两种：一种是确定性现象，一种是随机现象.例如，在1标准大气压下水在100℃时必然沸腾，在0℃时必然结冰，就是确定现象；掷一枚硬币可能出现正面也可能出现反面，同一个人用同样的方法投掷同一颗骰子，出现的点数不尽相同，在一次投掷之前无法预测确切点数等就是随机现象.随机现象是指在一定条件下，具有多种可能结果，但事先又不能确定究竟出现哪一种结果的现象.经典的数学理论如微积分学、微分方程等都是用来研究确定性现象的，对随机现象无能为力.随着社会生产和科学的发展，人们对随机现象越来越重视，从而使研究随机现象的概率统计获得了迅速的发展，形成了数学的一个重要分支，它广泛地应用于工业、农业、军事和科学技术中，并且还不断地向其他学科渗透，其势头至今不减.

本书主要讲概率论，内容包括随机事件及其概率、随机变量及其分布、数字特征、大数定律和中心极限定理.另外介绍数理统计的基础知识，内容包括统计量及其分布、参数估计和假设检验.全部讲授约需50学时左右.习题安排了基础题(A类)和提高题(B类)，其中提高题摘自20年来数学(一)考研试题，学有余力的同学做一做这类题目对提高自己的解题能力大有好处.

本书第一版经过了两年多的使用，教学效果良好，可以满足目前的教学需要.根据师生使用本书后所提的意见和建议，这次修订改写了个别地方，使之更方便教学.

由于编者水平有限，书中难免有缺点和错误，欢迎广大师生批评指正.

编　者

2010年3月

## 《21 世纪大学数学创新教材》丛书编委会

# 丛　书　序

《21 世纪大学数学创新教材》为大学本科数学系列教材，大致划分为公共数学类、专业数学类两大块，创新是其主要特色和要求. 经组编委员会审定，列选科学出版社普通高等教育"十一五"规划教材.

**一、组编机构**

《21 世纪大学数学创新教材》丛书由多所 985 和 211 大学联合组编：

**丛书主编**　陈　化

**常务副主编**　樊启斌

**副 主 编**　吴传生　何　穗　刘安平

**丛书编委**　（按姓氏笔画为序）

王卫华　王展青　严国政　李　星　杨瑞琰

肖海军　罗文强　赵东方　黄樟灿　梅全雄

彭　放　彭斯俊　曾祥金　谢民育

**二、教材特色**

创新是本套教材的主要特色和要求，创造双重品牌：

**先进.** 把握教改、课改动态和学科发展前沿，学科、课程的先进理念、知识和方法原则上都要写进教材或体现在教材结构及内容中.

**知识与方法创新.** 重点教材、高层次教材，应体现知识、方法、结构、内容等方面的创新，有所建树，有所创造，有所贡献.

**教学实践创新.** 教材适用，教师好教，学生好学，是教材的基本标准. 应紧跟和引领教学实践，在教学方法、教材结构、知识组织、详略把握、内容安排上有独到之处.

**继承与创新.** 创新须与继承相结合，是继承基础上的创新；创新需转变为参编者、授课者的思想和行为，避免文化冲突.

**三、指导思想**

遵循国家教育部高等学校数学与统计学教学指导委员会关于课程教学的基本要求，力求教材体系完整，结构严谨，层次分明，深入浅出，循序渐进，阐述精炼，富有启发性，让学生打下坚实的理论基础. 除上述一般性要求外，还应具备下列特点：

(1) 恰当融入现代数学的新思想、新观点、新结果，使学生有较新的学术视野.

(2) 体现现代数学创新思维，着力培养学生运用现代数学软件的能力，使教材真正成为基于现代数学软件的、将数学软件融合到具体教学内容中的现代精

品教材.

(3) 在内容取舍、材料组织、叙述方式等方面具有较高水准和自身特色.

(4) 数学专业教材要求同步给出重要概念的英文词汇,章末列出中文小结,布置若干道(少量)英文习题,并要求学生用英文解答. 章末列出习题和思考题,并列出可进一步深入阅读的文献. 书末给出中英文对照名词索引.

(5) 公共数学教材具有概括性和简易性,注重强化学生的实验训练和实际动手能力,加强内容的实用性,注重案例分析,提高学生应用数学知识和数学方法解决实际问题的能力.

**四、主编职责**

丛书组编委员会和出版社确定全套丛书的编写原则、指导思想和编写规范,在这一框架下,每本教材的主编对本书具有明确的责权利:

1. 拟定指导思想

按照丛书的指导思想和特色要求,拟出编写本书的指导思想和编写说明.

2. 明确创新点

教改、课改动态,学科发展前沿,先进理念、知识和方法,如何引入教材;知识和内容创新闪光点及其编写方法;教学实践创新的具体操作;创新与继承的关系把握及其主客体融合.

3. 把握教材质量

质量是图书的生命,保持和发扬科学出版社"三高"、"三严"的传统特色,创出品牌;适用性是教材的生命力所在,应明确读者对象,篇幅要结合大部分学校对课程学时数的要求.

4. 掌握教材编写环节

(1) 把握教材编写人员水平,原则上要求博士、副教授以上,有多年课程教学经历,熟悉课程和学科领域的发展状况,有教材编写经验,有扎实的文字功底.

(2) 充分注意著作权问题,不侵犯他人著作权.

(3) 讨论、拟定教材提纲,并负责编写组的编写分工、协调与组织.

(4) 拟就内容简介、前言、目录、样章,统稿、定稿,确定交稿时间.

(5) 负责出版事宜,敦促编写组成员使用本教材,并优先选用本系列教材.

《21世纪大学数学创新教材》组编委员会

2009年6月

# 目　录

# 第一章　随机事件及其概率

## 第一节　随机事件及其运算

概率论是研究随机现象数量规律的一门数学学科. 对随机现象进行研究，就要进行观察、试验. 为了叙述方便，我们把对自然现象或社会现象进行的观察或实验，都称为**试验**. 如果一个试验在相同条件下重复进行，而每次试验的可能结果不止一个，但在进行一次试验之前却不能断言它出现哪个结果，则称这种试验为**随机试验**. 以下所说的试验都是指随机试验.

在试验中，可能发生也可能不发生的事情，称为**随机事件**，简称**事件**.

**例 1**　掷一枚硬币，出现正面及出现反面都是随机事件.

**例 2**　掷一颗骰子，出现"1"点，"3"点，"5"点都是随机事件.

**例 3**　电话接线员在上午 8 时到 9 时接到的电话呼叫次数，如出现 0 次，1 次……及出现次数在 20 到 50 之间都是随机事件.

**例 4**　对某一目标发射一发子弹，弹着点与目标中心的距离为 0.1 米，0.5 米及 0.2 米到 0.3 米之间都是随机事件.

从上面的例子可以看出，在一个试验中，所出现的事件是很多的. 例 1 的事件有两个，例 2 的事件有很多个，但却是有限的. 例 3 和例 4 的事件却有无穷多个.

在一个试验下，不管事件有多少个，总可以从其中找出这样一组事件，它具有如下性质：

(1) 每进行一次试验，必然发生且只能发生这一组中的一个事件；

(2) 任何事件，都是由这一组中的部分事件组成的.

这样一组事件中的每一个事件称为**基本事件**，用 $\omega$ 来表示. 基本事件的全体，称为试验的**样本空间**，用 $\Omega$ 表示.

在例 1 中，我们取

$$\Omega = \{(\text{出现正面}),(\text{出现反面})\}.$$

在例 2 中，我们取

$$\Omega = \{(\text{出现 1 点}),(\text{出现 2 点}),\cdots,(\text{出现 6 点})\}.$$

在例 3 中，我们取

$$\Omega = \{(\text{出现 0 次}),(\text{出现 1 次}),\cdots\}.$$

在例 4 中，我们取

$$\Omega = \{(\text{弹着点与目标中心的距离 } \omega) \mid 0 \leqslant \omega < +\infty\}.$$

通常，$\Omega$ 中的基本事件就是试验中所有可能直接出现的结果. 根据这一点，我们可以对试验找出所有的基本事件.

如果我们把一个基本事件视为一个抽象的“点”，那么样本空间就是由这些抽象的“点”组成的空间. 根据性质(2)，一个事件就是由 $\Omega$ 中的部分点(基本事件)组成的集合. 通常用大写字母 $A$, $B$, $C$, …表示事件，它们是 $\Omega$ 的子集.

如果某个 $\omega$ 是事件 $A$ 的组成部分，即这个 $\omega$ 在事件 $A$ 中出现，记为 $\omega \in A$，读作 $\omega$ 属于 $A$. 如果在一次试验中所出现的 $\omega$ 有 $\omega \in A$，则称在这次试验中事件 $A$ 发生.

如果 $\omega$ 不是事件 $A$ 的组成部分，就记为 $\omega \notin A$，读作 $\omega$ 不属于 $A$. 在一次试验中，所出现的 $\omega$ 有 $\omega \notin A$，则称此试验 $A$ 没有发生.

很显然，总有 $\omega \in \Omega$，将 $\Omega$ 作为事件，则在试验中事件 $\Omega$ 总是发生的，故称 $\Omega$ 为**必然事件**. 它不是随机事件，把它作为事件主要是为了讨论问题的方便. 另一个不是随机事件而视为事件的就是不包含任何基本事件的事件，记为 $\varnothing$. 由于对一切的 $\omega$ 有 $\omega \notin \varnothing$，故在试验中，$\varnothing$ 总是不发生的，所以称 $\varnothing$ 为**不可能事件**.

如果我们有了一些事件，则可以从这些事件得出其他事件来，这就是**事件的运算**. 下面先介绍事件的包含与等价关系，再讨论事件的运算.

如果事件 $A$ 的组成部分也是事件 $B$ 的组成部分，则称事件 $A$ **包含于**事件 $B$，或称事件 $B$ **包含**事件 $A$，记为 $A \subset B$ 或 $B \supset A$. $A \subset B$ 的直观意义就是如果事件 $A$ 发生必有事件 $B$ 发生.

如果同时有 $A \subset B$, $B \subset A$，则称事件 $A$ 与事件 $B$ **等价**，或称 $A$ **等于** $B$，记为 $A = B$. 其直观意义是组成 $A$、$B$ 的基本事件完全相同，因此可以看做是一样的.

将事件 $A$ 与 $B$ 的组成部分合并($A$、$B$ 所共同的基本事件只取一次)而组成的事件称为事件 $A$ 与事件 $B$ 的**并**事件(或**和**事件)，记为 $A \cup B$. 由于 $A \cup B$ 发生是指属于 $A \cup B$ 的某个基本事件 $\omega$ 发生，所以 $\omega$ 不属于 $A$ 就属于 $B$，即表示不是 $A$ 发生就是 $B$ 发生，因而 $A \cup B$ 的直观意义就是 $A$、$B$ 中至少有一个发生的事件. 类似地，我们可以规定可列个事件 $A_1$, $A_2$, …, $A_i$, …的并，记为

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_i \cup \cdots, \quad \text{或} \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i,$$

它表示 $A_1$, $A_2$, …, $A_i$, …中至少有一个发生的事件.

事件 $A$、$B$ 的共同组成部分所构成的事件，称为事件 $A$ 与 $B$ 的**交**事件(或**积**事件)，记为 $A\cap B$. 有时也可省去"$\cap$"而简写为 $AB$. 若属于 $A\cap B$ 的某个 $\omega$ 发生，那就是 $A$ 与 $B$ 同时发生，所以 $A\cap B$ 的直观意义是 $A$、$B$ 同时发生的事件. 类似地，可以规定可列个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_i, \cdots$的交，记为

$$A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_i\cap\cdots,\quad 或\ \bigcap_{i=1}^{\infty}A_i,$$

它表示 $A_1, A_2, \cdots, A_i, \cdots$同时发生的事件.

属于 $A$ 而不属于 $B$ 的部分所构成的事件，称为 $A$ 与 $B$ 的**差**事件，记为 $A-B$，它表示 $A$ 发生而 $B$ 不发生的事件.

$A\cap B=\varnothing$，则表示 $A$ 与 $B$ 不可能同时发生，称事件 $A$ 与事件 $B$ **互不相容**. 基本事件是互不相容的.

$\Omega-A$ 称为事件 $A$ 的**逆**事件，或称为 $A$ 的**对立**事件，记为$\bar{A}$. 它表示 $A$ 不发生的事件. 这样可得

$$A\cup\bar{A}=\Omega,\quad A\cap\bar{A}=\varnothing.$$

前一式表示 $A$ 与$\bar{A}$ 至少有一个发生，后一式表示 $A$ 与$\bar{A}$ 不能同时发生.

必须指出，直观意义能帮助我们理解事件间的关系，但不能代替严格的数学证明. 下面我们来证明

$$\overline{\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i}=\bigcup_{i=1}^{\infty}\bar{A}_i.$$

我们首先证明

$$\overline{\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i}\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}\bar{A}_i. \tag{1.1}$$

设 $\omega\in\overline{\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i}$，则有

$$\omega\notin\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i,$$

从而可知，至少存在 $i_0$，使得 $\omega\notin A_{i_0}$，即 $\omega\in\bar{A}_{i_0}$. 于是可知

$$\omega\in\bigcup_{i=1}^{\infty}\bar{A}_i.$$

这样就证明了式(1.1).

其次，我们来证明

$$\bigcup_{i=1}^{\infty}\bar{A}_i\subset\overline{\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i}. \tag{1.2}$$

设 $\omega\in\bigcup_{i=1}^{\infty}\bar{A}_i$，则至少存在 $i_0$，使得 $\omega\in\bar{A}_{i_0}$，即 $\omega\notin A_{i_0}$. 于是可知

$$\omega \notin \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i,$$

即 $\omega \in \overline{\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i}$. 这样就证明了式(1.2).

由式(1.1)、(1.2)同时成立,可知

$$\overline{\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \overline{A}_i. \qquad \square$$

以上是证明等价关系的一般方法. 对于一些比较明显的等价关系,可以由直观意义获得,也可以借助几何直观获得. 下面介绍**文**(John Venn, 1834—1923)**图**.

用平面上的一个矩形表示样本空间 $\Omega$,矩形内的点表示基本事件 $\omega$,则事件间关系及运算就可用平面上的几何图形表示,如图 1.1 所示. 事件 $A$、$B$ 分别用两个小圆表示,阴影部分表示 $A$ 与 $B$ 的各种关系及运算.

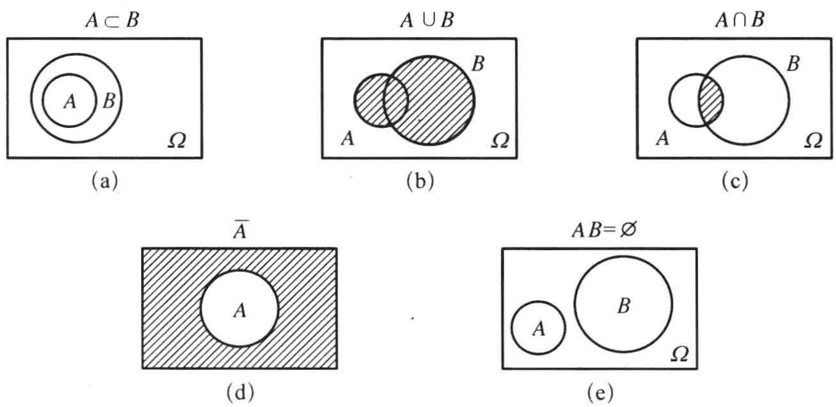


图 1.1

由图 1.1(c),可得

$$A - B = A - AB,$$

$$(A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - AB.$$

**例 5** 一口袋中装有五只同样大小的球,其中三只是白色的,两只是黑色的. 现从袋中取球两次,每次取一只,并且取出后不放回袋中. 写出该试验的样本空间 $\Omega$. 若 $A$ 表示取到的两只球是白色的事件,$B$ 表示取到的两只球是黑色的事件,试用 $A$、$B$ 表示下列事件:

(1) 两只球是颜色相同的事件 $C$;

(2) 两只球是颜色不同的事件 $D$;

(3) 两只球中至少有一只白球的事件 $E$.

**解**　假设每个球是可以区别的,则可以给每个球编上号:白$_1$,白$_2$,白$_3$,黑$_4$,黑$_5$. 于是有

$$\Omega=\{(白_1,白_2),(白_1,白_3),(白_1,黑_4),(白_1,黑_5),(白_2,白_1),(白_2,白_3),(白_2,黑_4),(白_2,黑_5),(白_3,白_1),(白_3,白_2),(白_3,黑_4),(白_3,黑_5),(黑_4,白_1),(黑_4,白_2),(黑_4,白_3),(黑_4,黑_5),(黑_5,白_1),(黑_5,白_2),(黑_5,白_3),(黑_5,黑_4)\}.$$

从而,$C=A\cup B$, $D=\overline{C}=\overline{A\cup B}$, $E=D\cup A=\overline{A\cup B}\cup A=\overline{B}$.

若我们认为白球间是无区别的,黑球也是无区别的,则有

$$\Omega=\{(白,白),(白,黑),(黑,白),(黑,黑)\}.$$

这样 $C$、$D$、$E$ 所表示的事件就更加简单了.

由这个例子可以看出,同一试验可以设计不同的样本空间,而设计的好坏取决于能否使讨论的问题得到简捷的解决.

# 第二节　概率的定义及其计算

## 一、频率

随机事件在一次试验中是否发生,事先无法确定,但在大量重复试验中,人们发现它具有一定的统计规律性,这表明它发生的可能性的大小还是可以度量的. 一般说来,一个事件 $A$ 发生的可能性大小,可用在 $n$ 次重复试验下事件 $A$ 发生的次数 $n_A$ 与 $n$ 的比值来反映. 我们将

$$F_n(A)=\frac{n_A}{n}$$

称为事件 $A$ 在 $n$ 次试验中出现的**频率**.

频率具有如下性质:

(1) 对任一事件 $A$,有 $0\leqslant F_n(A)\leqslant 1$;

(2) 对必然事件 $\Omega$,有 $F_n(\Omega)=1$;

(3) 若事件 $A$、$B$ 互不相容,则

$$F_n(A\cup B)=F_n(A)+F_n(B).$$

**证**　因为 $0\leqslant n_A\leqslant n$,所以有 $0\leqslant\dfrac{n_A}{n}\leqslant 1$,由 $F_n(A)$ 的定义就得性质(1).

由 $n_\Omega = n$，即可得性质(2).

由于 $A \cup B$ 事件的发生就是 $A$，$B$ 两事件中至少一个发生，又知 $A$、$B$ 互不相容，故有

$$n_{A\cup B} = n_A + n_B.$$

两端除以 $n$，就得性质(3). □

性质(3)还可以推广，若事件 $A_1$，$A_2$，…，$A_m$ 两两互不相容，则

$$F_n\left(\bigcup_{i=1}^{m} A_i\right) = \sum_{i=1}^{m} F_n(A_i).$$

频率虽然在一定程度上反映了事件发生的可能性大小，但它却依赖于人的认识，即会因人而异. 因为即使同样做了 $n$ 次试验，$n_A$ 却会不一样，这种差异我们常说成是频率具有随机波动性. 但若加深认识(这里就是增加试验次数 $n$)，那么随机波动性将会减小. 即随着 $n$ 逐渐增大，$F_n(A)$也就逐渐稳定于某个常数 $P(A)$. 这个常数 $P(A)$客观上反映事件 $A$ 发生的可能性的大小.

历史上著名的统计学家蒲丰(George Louis de Buffon，1707—1788)和皮尔逊(Karl Pearson，1857—1936)曾进行过大量掷硬币的试验，所得结果如下：

| 试验者 | 掷硬币次数 | 出现正面的次数 | 出现正面的频率 |
|---|---|---|---|
| 蒲　丰 | 4 040 | 2 048 | 0.506 9 |
| 皮尔逊 | 12 000 | 6 019 | 0.501 6 |
| 皮尔逊 | 24 000 | 12 012 | 0.500 5 |

可见出现正面的频率总在 0.5 附近波动. 随着试验次数的增加，它逐渐稳定于 0.5. 这个 0.5 就能反映正面出现的可能性大小.

每个事件都有这样一个常数与之对应. 这就是说频率具有稳定性. 因而可将事件 $A$ 的频率 $F_n(A)$，在 $n$ 无限增大时所逐渐稳定的那个常数 $P(A)$定义为事件 $A$ 发生的概率. 这就是概率的统计定义. 然而这个定义本身存在着很大缺点，即这里的“逐渐稳定”含义不清，要对“逐渐稳定”的含义作出具体说明就总会或多或少地带有人为的主观性. 是否能去除这个含混不清的“逐渐稳定”，而将客观上表征该事件发生可能性大小的一个数，及它所固有的性质来作为概率的定义呢？我们自然马上会意识到这个数应该具有频率所具有的几个性质. 这个工作由数学家柯尔莫哥洛夫(Andrei Nikolayevich Kolmogorov，1903—1987)于 1933 年完成. 他给出了概率的公理化定义，从而使概率论迅速发展成为一个严谨的数学分支.

## 二、概率定义

设 $\Omega$ 为样本空间，对每一个事件 $A$ 都有一个实数 $P(A)$，若满足下列三个条件：

(1) $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$；

(2) $P(\Omega) = 1$；

(3) 对于两两互不相容的事件 $A_1, A_2, \cdots$ 有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i),$$

则称 $P(A)$ 为**事件 A 的概率**.

条件(3)常称为可列(完全)可加性，也称为加法定理.

由概率的定义可以得到概率的如下性质.

**性质 1**　不可能事件的概率为零，即 $P(\varnothing) = 0$.

**证**　因为

$$\Omega = \Omega \cup \varnothing \cup \cdots,$$

所以

$$P(\Omega) = P(\Omega) + P(\varnothing) + \cdots,$$

故

$$P(\varnothing) = 0. \qquad \square$$

**性质 2**　概率具有有限可加性，即若事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 两两互不相容，则

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n).$$

**证**　因为

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \cup \varnothing \cup \varnothing \cup \cdots,$$

由可列可加性及性质 1 有

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n). \qquad \square$$

**性质 3**　对任何事件 $A$ 有

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}).$$

**证**　由 $A \cup \bar{A} = \Omega$，$A \cap \bar{A} = \varnothing$，故得

$$1 = P(A \cup \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A}).$$

将 $P(\bar{A})$ 移至等号左端即得