21世纪大学数学精品教材

◎丛书主编 蔡光兴 戴明强

工程数学方法与提高

戴明强 刘子瑞 主编

科学出版社

21 世纪大学数学精品教材

丛书主编　蔡光兴　戴明强

工程数学方法与提高

戴明强　刘子瑞　主编

科 学 出 版 社

北 京

内 容 简 介

本书为工程数学课程(包括线性代数、概率论、数理统计、复变函数、积分变换、数理方程与特殊函数)的教学辅导书，与工程数学教材配套使用. 全书共分六篇三十章，每章由内容概要框图、学习目的要求、疑难解析、例题选讲、综合与提高、练习题等六部分组成，各篇后附有若干套测试题，书末附有习题参考答案.

本书结构新颖，针对教学改革、学时偏紧、注重能力培养等教学新特点，既顾及工程数学课程教学要求，又考虑学生考研需要，同时兼顾远程教学、成人教育、自学考试等教学形式的特殊性，是一本较为理想的工程数学辅导教材.

图书在版编目(CIP)数据

工程数学方法与提高/戴明强，刘子瑞主编. —北京：科学出版社，2012. 5
21世纪大学数学精品教材
ISBN 978-7-03-034126-6

Ⅰ.①工… Ⅱ.①戴… ②刘… Ⅲ.①工程数学-高等学校-教材 Ⅳ.①TB11

中国版本图书馆CIP数据核字(2012)第077835号

责任编辑：王雨舸 / 责任校对：董艳辉
责任印制：彭 超 / 封面设计：苏 波

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

武汉市新华印刷有限责任公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

开本：787×1092 1/16
2012年5月第 一 版 印张：27 1/4
2012年5月第一次印刷 字数：679 000

定价：45.80元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　　言

工程数学是继高等数学之后又一门重要的基础理论课程.目前,高等院校各相关专业均分若干门开设或合并开设了工程数学课程.全国统一命题的硕士研究生入学考试数学试卷也将其纳入必考范围,在数学一考试中题量约占40%左右.

与高等数学相比,工程数学所研究的问题及思想方法都很不一样,解题的技巧也多种多样.我们根据多年的工程数学教学实践,编写了这本与《工程数学》教材相配套的教学参考书.本书共分6篇30章,各章由内容概要框图、学习目的要求、疑难解析、例题选讲、综合与提高、练习题等六部分组成,它们具有以下特点:

(1)“内容概要框图”以框图的形式,简明扼要地给出了各章的内容概要及相关关系;

(2)“学习目的要求”使读者明确各章内容的具体要求和学习的重点与难点;

(3)“疑难解析”以问答的形式帮助读者澄清概念,归纳方法,揭示相关内容之间的联系;

(4)“例题选讲”通过一些典型例题帮助读者更好地理解教材内容,掌握常见的解题思路、方法及技巧;

(5)“综合与提高”选用了部分有一定综合性和难度梯次的例题,以期学有余力的读者可以通过这一部分的学习,在解题思路、方法及技巧方面有进一步的提高;

(6)“练习题”题量适中,难度恰当,供读者检查各章内容的掌握程度.

此外,本书各篇均配有2～3套测试题,读者如能较好地完成这些测试题,可以认为已经基本达到工程数学的教学大纲要求.本书在“例题选讲”、“综合与提高” 和“练习题”中收录了部分近十年来的研究生入学试题,供读者学习参考.

本书由戴明强、刘子瑞任主编,任耀峰、王胜兵、金裕红、熊萍任副主编,第一篇由戴明强、沈静、黄登斌执笔,第二篇由任耀峰、王天虹、祁锐执笔,第三篇由金裕红、瞿勇、李凌执笔、第四篇由刘子瑞、徐忠昌、周本虎执笔、第五篇由熊萍、杨美妮执笔,第六篇由王胜兵、艾小川、袁昊劼执笔.全书由戴明强、刘子瑞统稿.由于学术水平和教学经验有限,书中出现不当或错误之处难免,恳请读者批评指正.

编　者
2012年3月

目　　录

第一篇　线性代数

第二篇　概率论

第三篇　数理统计

第四篇　复变函数

第五篇　积 分 变 换

第六篇　数理方程与特殊函数

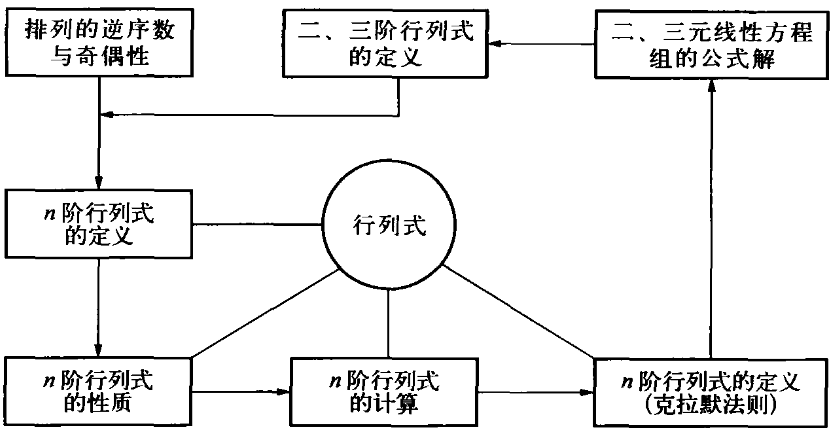
第一篇

线 性 代 数

第一章

行　列　式

一、内容概要框图



二、学习目的要求

1. 了解行列式的定义和性质.
2. 掌握三阶、四阶行列式的计算法，会计算简单的 n 阶行列式.
3. 理解线性方程组与行列式的关系.

本章重点　n 阶行列式的计算.

本章难点　n 阶行列式的定义.

三、疑 难 解 析

问 1.1　计算 n 阶排列的逆序数的常用方法有哪些？

答　计算 n 阶排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 的逆序数常用以下方法.

（1）向前计算法. 分别计算排在元素 p_i $(i=1,2,\cdots,n)$ 前面的比它大的数的个数 t_i，则逆序数 $t=t_1+t_2+\cdots+t_n$.

（2）向后计算法. 分别计算排在元素 p_i $(i=1,2,\cdots,n)$ 后面的比它小的数的个数 s_i，则逆序数 $t=s_1+s_2+\cdots+s_n$.

此外，由于计算排列的逆序数是为了确定行列式的项的代数符号，而决定代数符号的本质是排列的奇偶性，因此，有时并不要求计算出排列的逆序数，而只要求确定排列的奇偶性. 此时，可以利用对换将排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 变成标准排列 $1\ 2\ \cdots\ n$，对换次数的奇偶就是排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 的奇偶. 例如，排列 453612，将 1 与 4 对换成 153642，又将 2 与 5 对换成 123645，再将 4 与 6 对换成 123465，最后将 5 与 6 对换成 123456，共对换 4 次(偶数次)，故排列 453612 是偶排列.

问 1.2 二阶、三阶行列式的计算可按对角线法则进行，n 阶 $(n\geqslant 4)$ 行列式是否也有类似的法则？为什么？

答 $n\,(n\geqslant 4)$ 阶行列式没有与二阶、三阶行列式类似的对角线法则. 以四阶行列式为例，若按二阶、三阶行列式类似的对角线法则计算，则只能写出 8 项，而按 n 阶行列式的定义，四阶行列式共有 $P_4=4!=24$ 项. 另外，按对角线法则写出的项的代数符号也不一定正确，如次对角线元素之积 $a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}$，其列标排列 4321 的逆序数为 6，应带正号，而不是负号.

至于 n 阶 $(n\geqslant 4)$ 行列式没有对角线法则的原因，应从行列式的引入谈起. 行列式的最初引入是出于表示线性方程组的解的需要，由此定义的行列式是 $P_n=n!$ 个乘积项的代数和，每个乘积项均为位于不同行、不同列的 n 个元素相乘而得，而其代数符号由相关排列的奇偶性确定. 二阶、三阶行列式也符合 n 阶行列式的这种定义，至于二阶、三阶行列式的对角线法则完全是它们特有的规律，是一种巧合，没有普遍意义.

问 1.3 如何计算元素是具体数字且分布没有明显规律的行列式？

答 对于这样的行列式，主要是通过运用行列式的性质(交换某两行(列)、提取某行(列)的公因子、将某一行(列)的 k 倍加到另一行(列))，将原行列式化为简单的或容易计算的行列式，从而得出行列式的值. 这些简单的或容易计算的行列式主要有：

(1) 三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,\,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,\,n-1} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,\,n-1}\cdots a_{n1}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,\,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{2,\,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,\,n-1}\cdots a_{n1}$$

(2) 某一行(列)全为零元素的行列式；

(3) 某两行(列)元素对应成比例的行列式；

(4) 范德蒙德行列式等.

有时候结合利用行列式的按行(列)展开性质可以简化计算.

问 1.4 行列式的计算有哪些方法？

答 计算行列式常用以下方法，读者可参看例题选讲加以体会.

(1) 利用行列式的定义计算. 当一个行列式中不为 0 的元素个数很少时，常用定义计算；

(2) 利用行列式的性质将行列式化为三角行列式、范德蒙德行列式等容易计算的行列式；

(3) 利用行列式的按行(列)展开性质，将行列式降阶计算；

(4) 利用加边法计算；

(5) 利用递推公式计算；

(6) 利用数学归纳法计算；

(7) 各种方法综合使用.

问 1.5 克拉默法则有什么意义？

答 克拉默法则给出了 n 个未知数 n 个方程的线性方程组的解的存在条件以及解用未知数的系数和常数项表示的表达式，其本身就可以用来求解线性方程组. 但是，克拉默法则只适用于未知数个数与方程个数相等且系数行列式不为零的线性方程组，当阶数 n（就是未知数的个数)较大时计算较为烦琐，因此克拉默法则并不常用于求解线性方程组. 克拉默法则的重要意义在于它的理论价值. 它明确给出的解的存在条件及解与未知数系数和常数项的关系式对我们分析、解决问题带来了方便. 正因为如此，我们再建立一般线性方程组的理论时，总是设法将一般的线性方程组化为能运用克拉默法则的形式.

四、例 题 选 讲

1. 用行列式定义直接计算行列式的值

例 1.1 计算 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & a_2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_n \end{vmatrix}$$

解 因为该行列式中每一行及每一列只有一个可能的非零元素，由 n 阶行列式定义知 D_n 只含一项可能的非零项 $a_1a_2\cdots a_n$，而此项中元素按定义的顺序排列时所构成的列标排列为 $(n-1)(n-2)\cdots 21n$，其逆序数为

$$0+1+\cdots+(n-2)+0=\frac{(n-2)(n-1)}{2}, \text{故 } D_n=(-1)^{\frac{(n-2)(n-1)}{2}}a_1a_2\cdots a_n$$

[注] 用 n 阶行列式的定义直接计算行列式相当不容易，因此只有在较特殊的情况下才用这种方法. 通常，仅当一个行列式的 n^2 个元素中只有少数不为零时，才考虑用定义计算行

列式.

类似地,读者可求解下面例题.

例 1.2 用定义计算下列行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}0&0&\cdots&0&1\\0&0&\cdots&2&0\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&n-1&\cdots&0&0\\n&n-1&\cdots&2&1\end{vmatrix}$$

[答案] $D_n=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}n!$

2. 将行列式化为上(下)三角行列式进行计算

上(下)三角行列式的值等于对角线上元素的乘积,因而一个行列式只要能化为上(下)三角行列式就可得到行列式的值了.

例 1.3 计算行列式

$$D_{n+1}=\begin{vmatrix}a_1&-a_1&0&\cdots&0&0\\0&a_2&-a_2&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&a_n&-a_n\\1&1&1&\cdots&1&1\end{vmatrix}$$

解法一 从第 i 行提出 a_i $(i=1,2,\cdots,n)$,再从第 1 列开始依次把第 i 列加到第 $i+1$ 列上 $(i=1,2,\cdots,n)$,得

$$D_{n+1}=\prod_{i=1}^{n}a_i\begin{vmatrix}1&-1&0&\cdots&0&0\\0&1&-1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&1&-1\\1&1&1&\cdots&1&1\end{vmatrix}$$

$$=\prod_{i=1}^{n}a_i\begin{vmatrix}1&0&0&\cdots&0&0\\0&1&0&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&1&0\\1&2&3&\cdots&n&n+1\end{vmatrix}=(n+1)\prod_{i=1}^{n}a_i$$

解法二 将各列加到第 1 列上去,再按第 1 列展开,得

$$D_{n+1}=\begin{vmatrix}0&-a_1&0&\cdots&0&0\\0&a_2&-a_2&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&a_n&-a_n\\n+1&1&1&\cdots&1&1\end{vmatrix}$$

$$=(n+1)(-1)^{n+2}\begin{vmatrix} -a_1 & & & \\ a_2 & -a_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & a_n & -a_n \end{vmatrix}$$

$$=(n+1)(-1)^{n+2}(-1)^n\prod_{i=1}^{n}a_i=(n+1)\prod_{i=1}^{n}a_i$$

例 1.4 计算 $n+1$ 阶行列式

$$D_{n+1}=\begin{vmatrix} a_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ c_1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ c_2 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & 0 \\ c_n & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix},\quad a_i\neq 0\ (i=1,2,\cdots,n)$$

解 把所有的第 $i+1$ 列 $(i=1,2,\cdots,n)$ 的 $-\dfrac{c_i}{a_i}$ 倍加到第 1 列,得

$$D_{n+1}=\begin{vmatrix} a_0-\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{b_ic_i}{a_i} & b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

故 $D_{n+1}=a_1a_2\cdots a_n\left(a_0-\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{b_ic_i}{a_i}\right)$.

3. 利用行列式性质结合行列式展开定理计算行列式

一般来说,我们可以利用行列式的性质将行列式的某一行(列)化为尽可能多的零的形式,然后将行列式按此行(列)展开,这样一个 n 阶行列式的计算就转化为 $n-1$ 阶行列式的计算问题了.

例 1.5 计算 n 阶行列式 $D_n=\begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b \\ b & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}$ 的值.

解 将行列式按第 1 列展开

$$D_n=(-1)^{1+1}a\begin{vmatrix} a & b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a & b \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}+(-1)^{n+1}b\begin{vmatrix} b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a & b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a & b \end{vmatrix}$$

$$=a^n+(-1)^{n+1}b^n$$

例 1.6 计算行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}1&n&n&\cdots&n\\n&2&n&\cdots&n\\n&n&3&\cdots&n\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\n&n&n&\cdots&n\end{vmatrix}$$

解 第 i 行减去第 n 行 $(i=1,2,\cdots,n-1)$，则

$$D_n=\begin{vmatrix}1-n&0&0&\cdots&0\\0&2-n&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&n-1-n&\vdots\\n&n&n&\cdots&n\end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{n-1}n!$$

[注] 利用行列式的展开定理计算行列式有时还需和某些特殊技巧结合使用，例如递推法、归纳法、加边法等. 看下面一些例子.

例 1.7 计算行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}9&5&&&\\4&9&5&&\\&4&9&\ddots&\\&&\ddots&\ddots&5\\&&&4&9\end{vmatrix}$$

分析 先将行列式表示为两个低阶同型的行列式的线性关系式，再利用递推关系及某些低阶(二阶、一阶)行列式的值求出 D_n 的值.

解 D_n 中第 1 列只有两个元素不为零，而元素 $a_{11}=9$ 的余子式为 D_{n-1}，按第 1 列展开，得

$$D_n=9(-1)^{1+1}D_{n-1}+4(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}5&0&&&\\4&9&5&&\\&4&9&\ddots&\\&&&\ddots&5\\&&&4&9\end{vmatrix}_{n-1}$$

$$=9D_{n-1}-20D_{n-2}$$

即有 $D_n-5D_{n-1}=4(D_{n-1}-5D_{n-2})$. 于是有

$$D_n-5D_{n-1}=4^2(D_{n-2}-5D_{n-3})=\cdots=4^{n-2}(D_2-5D_1)=4^{n-2}(61-45)=4^n$$

同理有

$$D_n-4D_{n-1}=5^2(D_{n-2}-4D_{n-3})=\cdots=5^{n-2}(D_2-4D_1)=5^{n-2}(61-36)=5^n$$

即
$$\left.\begin{aligned}D_n-5D_{n-1}&=4^n\\D_n-4D_{n-1}&=5^n\end{aligned}\right\}\Rightarrow D_n=5^{n+1}-4^{n+1}$$

利用递推法，读者可求下面例题：

例 1.8 计算行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha & & & \\ \beta & \alpha+\beta & \alpha & & \\ & \beta & \alpha+\beta & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \alpha \\ & & & \beta & \alpha+\beta \end{vmatrix}$$

其中 $\alpha \neq \beta$.

[答案] $D_n = \dfrac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta}$

例 1.9 证明

$$D_n = \begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix}$$
$$= x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n$$

证法一 （数学归纳法）

当 $k=2$ 时，$D_2 = \begin{vmatrix} x & -1 \\ a_2 & x+a_1 \end{vmatrix} = x^2 + a_1 x + a_2$，命题成立.

假设对于 $k = n-1$ 时命题成立,即

$$D_{n-1} = \begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix}$$
$$= x^{n-1} + a_1 x^{n-2} + \cdots + a_{n-2} x + a_{n-1}$$

则当 $k=n$ 时,对 D_n 按第 1 列展开,得

$$D_n = x(-1)^{1+1} D_{n-1} + a_n (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x & -1 \end{vmatrix}$$
$$= xD_{n-1} + a_n = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n$$

所以,对于 n 阶行列式 D_n 命题成立.

证法二 第 2 列乘以 x，第 3 列乘以 x^2，…,第 n 列乘以 x^{n-1}，然后统加到第 1 列,得

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ p_n(x) & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix}$$

(其中 $p_n(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$)，然后按第 1 列展开，得

$$D_n=p_n(x)(-1)^{n+1}\begin{vmatrix}-1 & & & \\ x & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & x & -1\end{vmatrix}=p_n(x)$$

结论成立.

例 1.10 计算行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}a_1+\lambda_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2+\lambda_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n+\lambda_n\end{vmatrix}\quad(\lambda_i\neq 0,\ i=1,2,\cdots,n)$$

解 根据行列式的展开定理，D_n 可写成下面形式

$$D_n=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a_1+\lambda_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & a_1 & a_2+\lambda_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n+\lambda_n\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=2,\cdots,n+1]{c_i-a_{i-1}c_1}\begin{vmatrix}1 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_n \\ 1 & \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_1-\sum_{i=2}^{n+1}\frac{1}{\lambda_{i-1}}c_i}\begin{vmatrix}1+\sum_{i=1}^{n}a_i\lambda_i^{-1} & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_n \\ 0 & \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n\end{vmatrix}$$

$$=\left(1+\sum_{i=1}^{n}a_i\lambda_i^{-1}\right)\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$$

本题亦可用下面的加边法进行计算：

$$D_n=\begin{vmatrix}1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & a_1+\lambda_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & a_1 & a_2+\lambda_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n+\lambda_n\end{vmatrix}$$

读者可通过计算得出结果.

4. 行列式的其他例子

例 1.11 已知 2014，2158，2394，1900 都能被 19 整除，试证：下列行列式能被 19 整除.

$$D_4=\begin{vmatrix}2&0&1&4\\2&1&8&5\\2&3&9&4\\1&9&0&0\end{vmatrix}$$

证 将 D_4 的第 1、2、3 列分别乘以 10^3，10^2，10，且都加到第 4 列，得

$$D_4=\begin{vmatrix}2&0&1&2014\\2&1&8&2185\\2&3&9&2394\\1&9&0&1900\end{vmatrix}$$

因上行列式的第 4 列能被 19 整除，且前 3 列元素均为整数，故 D_4 能被 19 整除.

例 1.12 试求下列行列式中 x^4 的系数

$$f(x)=\begin{vmatrix}-x&3&1&3&0\\x&3&2x&11&4\\-1&x&0&4&3x\\2&21&4&x&5\\1&-7x&3&-1&2\end{vmatrix}$$

解 $f(x)$ 中含 x 为因子的元素有 $a_{11}=-x$，$a_{21}=x$，$a_{23}=2x$，$a_{32}=x$，$a_{35}=3x$，$a_{44}=x$，$a_{52}=-7x$，因而含有 x 为因子的元素 a_{ij_i} 的列标只能取 $j_1=1$；$j_2=1, 3$；$j_3=2, 5$；$j_4=4$；$j_5=2$.

于是含 x^4 的项中元素 a_{ij_i} 的列标只能取 $j_1=1$；$j_2=3$；$j_3=2$；$j_4=4$ 与 $j_2=1$；$j_3=5$；$j_4=4$；$j_5=2$. 相应的五阶排列分别为 13245，31542，含 x^4 的相应的项分别为

$$(-1)^{\tau(13245)}a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}a_{55}=4x^4,\quad (-1)^{\tau(31542)}a_{13}a_{21}a_{35}a_{44}a_{52}=21x^4$$

其中 τ 为逆序数函数. 故 $f(x)$ 中含 x^4 的系数为 $21+4=25$.

例 1.13 计算下列行列式

$$D_4=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1+\sin\varphi_1&1+\sin\varphi_2&1+\sin\varphi_3&1+\sin\varphi_4\\\sin\varphi_1+\sin^2\varphi_1&\sin\varphi_2+\sin^2\varphi_2&\sin\varphi_3+\sin^2\varphi_3&\sin\varphi_4+\sin^2\varphi_4\\\sin^2\varphi_1+\sin^3\varphi_1&\sin^2\varphi_2+\sin^3\varphi_2&\sin^2\varphi_3+\sin^3\varphi_3&\sin^2\varphi_4+\sin^3\varphi_4\end{vmatrix}$$

解 第 2 行减去第 1 行对应元；然后第 3 行减去第 2 行对应元；最后第 4 行减去第 3 行对应元，得

$$D_4=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\\sin\varphi_1&\sin\varphi_2&\sin\varphi_3&\sin\varphi_4\\\sin^2\varphi_1&\sin^2\varphi_2&\sin^2\varphi_3&\sin^2\varphi_4\\\sin^3\varphi_1&\sin^3\varphi_2&\sin^3\varphi_3&\sin^3\varphi_4\end{vmatrix}$$