# 重难点手册

★四千万学子的制胜宝典
★八省市名师的在线课堂
★十八年书业的畅销品牌

配人教A版

新课标

## 高中数学

### 选修 2-2

蔡上鹤 主审
汪江松 主编

华中师范大学出版社


# 汪江松

## 教授（编审）


《中学数学》杂志主编，湖北大学硕士研究生导师，湖北省奥林匹克学校校长，中国优选法统筹法研究会理事，全国初等数学研究会副理事长，“希望杯”全国数学邀请赛组委会常委，湖北省科技期刊专家委员会委员，湖北省中学教师培训专家库成员，华中师范大学出版社特聘作者。长期从事数学教学和数学教育研究工作。出版有《初高中数学重难点手册》（该丛书出版16年来多次荣获优秀畅销书奖）、《高中数学解题方法与技巧》、《趣味数学》（丛书）、《几何明珠》、《成功数学新捷径（初中）》、《初中数学竞赛讲座》等著作40余部。在《数学通报》、《数学教育学报》、《湖北大学学报》、《山东教育》、《编辑学刊》、《科学进步与对策》、《中学数学》、《数学通讯》等20余家刊、报上发表论文50余篇，其中多篇论文被全文转载或获得湖北省数学学会优秀论文奖和湖北大学科研奖。




ISBN 978-7-5622-3918-5

9 787562 239185 >

责任编辑/靳春玲
责任校对/张晶晶
封面设计/新视点

定价：16.80元

HZSFDXCBS

# 重难点手册

★四千万学子的制胜宝典
★八省市名师的在线课堂
★十八年书业的畅销品牌

配人教A版

新课标

## 高中数学
### 选修 2-2

蔡上鹤 主审
汪江松 主编

华中师范大学出版社

新出图证(鄂)字 10 号

图书在版编目(CIP)数据

重难点手册——高中数学选修 2-2(配人教 A 版)/汪江松 主编. —2 版.
—武汉:华中师范大学出版社,2009.12
ISBN 978-7-5622-3918-5

Ⅰ.重…　Ⅱ.汪…　Ⅲ.数学课-高中-教学参考资料
Ⅳ.G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 051608 号

重难点手册——高中数学选修 2-2(配人教 A 版)

主编:汪江松
责任编辑:靳春玲　　责任校对:张晶晶　　封面设计:新视点
选题设计:第一编辑室 (027-67867361)
出版发行:华中师范大学出版社 ©
社址:湖北省武汉市珞喻路 152 号　　邮编:430079
销售电话:027-67863040　027-67867371　027-67867076
传真:027-67863291　　邮购:027-67861321
网址:http://www.ccnupress.com　　电子信箱:hscbs@public.wh.hb.cn
印刷:仙桃市新华印务有限责任公司　　督印:章光琼
字数:320 千字
开本:880mm×1230mm　1/32　　印张:10.25
版次:2009 年 12 月第 2 版　　印次:2009 年 12 月第 1 次印刷
定价:16.80 元

欢迎上网查询、购书

# 目 录

第一章 导数及其应用 …… 1
1.1 变化率与导数 …… 1
1.1.1 变化率问题 导数的概念 …… 1
1.1.2 导数的几何意义 …… 8
1.2 导数的计算 …… 17
1.2.1 几个常用函数的导数与基本初等函数的导数公式 …… 17
1.2.2 导数的运算法则 …… 24
1.3 导数在研究函数中的应用 …… 35
1.3.1 函数的单调性与导数 …… 35
1.3.2 函数的极值与导数 …… 47
1.3.3 函数的最大(小)值与导数 …… 62
1.4 生活中的优化问题举例 …… 78
1.5 定积分的概念 …… 93
1.6 微积分基本定理 …… 98
1.7 定积分的简单应用 …… 104
第一章综合评价 …… 110
第二章 推理与证明 …… 114
2.1 合情推理与演绎推理 …… 114
2.1.1 合情推理 …… 114
2.1.2 演绎推理 …… 130

2.2 直接证明与间接证明 …… 149
2.2.1 综合法和分析法 …… 149
2.2.2 反证法 …… 167
2.3 数学归纳法 …… 181
第二章综合评价 …… 205
**第三章 数系的扩充与复数的引入** …… 208
3.1 数系的扩充和复数的概念 …… 208
3.1.1 数系的扩充和复数的概念 …… 208
3.1.2 复数的几何意义 …… 216
3.2 复数代数形式的四则运算 …… 223
3.2.1 复数代数形式的加减运算及其几何意义 …… 223
3.2.2 复数代数形式的乘除运算 …… 229
第三章综合评价 …… 238
**答案详解与提示** …… 241

# 第一章

# 导数及其应用

## 1.1 变化率与导数

### 1.1.1 变化率问题 导数的概念

#### 课程目标点击

1. 了解函数的平均变化率的概念，会根据具体的函数求出函数的平均变化率.

2. 理解瞬时速度的含义，了解并感受当 $\Delta t \to 0$ 时，用平均速度来逼近 $t_0$ 时刻瞬时速度的思想.

3. 理解导数的概念，能利用导数的定义求某些函数的导数.

#### 重点难点突破

**1. 函数的平均变化率**

设 $x_1, x_2$ 是函数 $f(x)$ 在其定义域内的不同的两点，函数 $f(x)$ 的变化率可用式子 $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ 表示，我们把这个式子称为函数 $f(x)$ 从 $x_1$ 到 $x_2$ 的平均变化率.

习惯上，我们用“增量”的观点，记 $\Delta x = x_2 - x_1$，即把 $\Delta x$ 看做是相对于 $x_1$ 的一个增量，用 $x_1 + \Delta x$ 代替 $x_2$；类似地，$\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$，于是平均变化率

可以表示为$\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

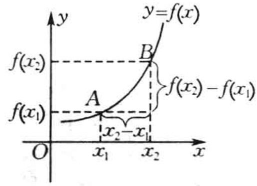

图1.1-1

如图1.1-1，当$x$从$x_1$变到$x_2$时，曲线$y=f(x)$的函数值由$f(x_1)$变到$f(x_2)$，则

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}.$$

这样，我们不难看到平均变化率的几何直观.

**注意** ①式中的$\Delta x,\Delta y$可正可负，$\Delta y$可为零，但$\Delta x$不可为零；②在变化率中，当$x_1$取定后，$\Delta x$取不同的数值时，函数的平均变化率不同；当$\Delta x$取定值时，若$x_1$取不同的数值，函数的平均变化率也不相同.

**2. 瞬时速度**

设运动物体的位移与时间的关系是$s=s(t)$，如果当$\Delta t$无限趋近于0时，$s(t)$在$t_0$到$t_0+\Delta t$之间的平均变化率$\frac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t}$$\left(即\frac{\Delta s}{\Delta t}\right)$无限趋近于常数，我们把这个常数称为物体在$t=t_0$时刻的瞬时速度.

**3. 导数的概念**

我们略去上面瞬时速度的物理意义，还原成数学的模型，就是函数$y=f(x)$在$x=x_0$处的瞬时变化率，即导数的概念.

设函数$y=f(x)$在区间$(a,b)$上有定义，$x_0\in(a,b)$，若$\Delta x$无限趋近于0，比值$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$无限趋近于一个常数$A$，即

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=A,$$

则称函数$f(x)$在$x_0$处可导，并称常数$A$为函数$y=f(x)$在$x=x_0$处的导数，记做$f'(x_0)=A$或$y'|_{x=x_0}=A$.

注意：当$\Delta x\to 0$时，$\frac{\Delta y}{\Delta x}\not\to$常数$A$，则称$f(x)$在$x_0$处不可导，或导数不存在.

由导数的定义知，路程关于时间$t$的导数就是瞬时速度.

**方法总结**

由导数的定义知，求函数$y=f(x)$在$x_0$处导数的一般步骤：

① 求函数的增量$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$；

② 求平均变化率$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$；

③ 取极限得导数$f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

上述三步简称为：求增量($\Delta y$)，作增量之比，取极值.

## 方法技巧点拨

### 1. 求平均变化率

**例1** 求 $y=x^2-2x+3$ 在 2 到 $\frac{9}{4}$ 之间的平均变化率.

**思路点拨** 求平均变化率可分为三步：求函数的增量，求自变量的增量，求两增量之比 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 的值.

**【解】** $\Delta y=f\left(\frac{9}{4}\right)-f(2)=\left(\frac{9}{4}\right)^2-2\times\frac{9}{4}+3-2^2+2\times2-3=\frac{9}{16}$,

$\Delta x=\frac{9}{4}-2=\frac{1}{4}$,

平均变化率 $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{9}{16}\div\frac{1}{4}=\frac{9}{4}$.

### 2. 求瞬时速度

**例2** 一做直线运动的物体，其位移 $S$ 与时间 $t$ 的关系是 $S=3t-t^2$，求此物体在 $t=2$ 时的瞬时速度.

**思路点拨** 依瞬时速度的定义来求.

**【解】** $\Delta S=S(2+\Delta t)-S(2)=3(2+\Delta t)-(2+\Delta t)^2-(3\times2-2^2)$

$=3\Delta t-4\Delta t-(\Delta t)^2=-\Delta t-(\Delta t)^2$.

$\frac{\Delta S}{\Delta t}=\frac{-\Delta t-(\Delta t)^2}{\Delta t}=-1-\Delta t$.

其瞬时速度即当 $\Delta t\to0$ 时，$\frac{\Delta S}{\Delta t}\to-1$.

所以物体在 $t=2$ 时的瞬时速度为 $-1$.

**反思** 这里实质上是求 $\lim\limits_{\Delta t\to0}\frac{\Delta S}{\Delta t}=\lim\limits_{\Delta t\to0}(-1-\Delta t)=-1$.

**例3** 若质点 $M$ 按规律 $S(t)=at^2+1$(m)做直线运动，且在 $t=2$(s)时质点 $M$ 的瞬时速度为 8m/s，求常数 $a$ 的值.

**思路点拨** 当 $\Delta t\to0$ 时，$a\Delta t\to0$($a$ 为常数).

**【解】** $\Delta S=S(2+\Delta t)-S(2)=a(2+\Delta t)^2+1-(a\cdot2^2+1)$

$=4a\Delta t+a(\Delta t)^2$.

$$\frac{\Delta S}{\Delta t}=4a+a\Delta t,$$

当 $\Delta t\to 0$ 时，$\frac{\Delta S}{\Delta t}\to 4a$，即 $v(t)|_{t=2}=4a$.

由题意 $4a=8$ 得 $a=2$.

**3. 利用定义求导数**

**例 4** 求函数 $y=x+\frac{1}{x}$ 在 $x=1$ 处的导数.

**思路点拨** 当 $\Delta x\to 0$ 时求 $\frac{\Delta x}{1+\Delta x}$ 的值，可理解为用 0 代替 $\Delta x$，故 $\frac{\Delta x}{1+\Delta x}\to\frac{0}{1+0}=0$.

**【解】** $\Delta y=(1+\Delta x)+\frac{1}{1+\Delta x}-\left(1+\frac{1}{1}\right)=\Delta x-1+\frac{1}{1+\Delta x}$

$$=\frac{(\Delta x-1)(\Delta x+1)+1}{1+\Delta x}=\frac{(\Delta x)^2}{1+\Delta x},$$

所以 $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta x}{1+\Delta x}$,

故当 $\Delta x\to 0$ 时，$\frac{\Delta y}{\Delta x}\to 0$，即 $y'|_{x=1}=0$.

**例 5** 求函数 $y=\sqrt{x^2+1}$ 的导数 $y'$ 及 $y'|_{x=2}$.

**思路点拨** $y'$ 是关于 $x$ 的函数，而 $y'|_{x=2}$ 是 $y'$ 在 $x=2$ 时的函数值.

**【解】** $\Delta y=\sqrt{(x+\Delta x)^2+1}-\sqrt{x^2+1}=\frac{(x+\Delta x)^2+1-x^2-1}{\sqrt{(x+\Delta x)^2+1}+\sqrt{x^2+1}}$

$$=\frac{2x\Delta x+(\Delta x)^2}{\sqrt{(x+\Delta x)^2+1}+\sqrt{x^2+1}},$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{2x+\Delta x}{\sqrt{(x+\Delta x)^2+1}+\sqrt{x^2+1}}.$$

当 $\Delta x\to 0$ 时，$\frac{\Delta y}{\Delta x}\to\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

所以 $y'=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

$$y'|_{x=2}=\frac{2}{\sqrt{2^2+1}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

## 高考真题链接

**例 1**　(2008·北京,文) 如图 1.1-2 所示,函数 $f(x)$ 的图象是折线段 $ABC$,其中 $A,B,C$ 的坐标分别为 $(0,4),(2,0),(6,4)$,则 $f(f(0))=$______;函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处的导数 $f'(1)=$______.

**思路点拨**　先依图写出分段函数 $f(x)$ 的解析式,再依 $f(x)$ 的解析式求 $f'(1)$.

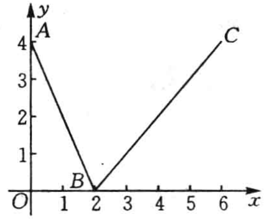

图 1.1-2

【解】 依 $A(0,4),B(2,0)$ 得线段 $AB$ 的直线方程为 $f(x)=-2x+4(0\leqslant x\leqslant 2)$;

同理得线段 $BC$ 的直线方程为

$$f(x)=x-2(2<x\leqslant 6).$$

故 $f(x)=\begin{cases}-2x+4,0\leqslant x\leqslant 2,\\ x-2,2<x\leqslant 6.\end{cases}$

所以 $f(0)=4,f(f(0))=f(4)=4-2=2.$

$$f'(1)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-2(1+\Delta x)+4-(-2+4)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-2\Delta x}{\Delta x}=-2.$$

**答案**　2;$-2$.

**反思**　$\Delta x\to 0$ 意味着 $\Delta x$ 很小很小(但可正可负),故 $f(1+\Delta x)$ 应按 $0<1+\Delta x<2$ 来代入相应的函数解析式进行计算.

**例 2**　(2009·天津,文) 设函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上的导函数为 $f'(x)$,且 $2f(x)+xf'(x)>x^2$,下面的不等式在 $\mathbf{R}$ 上恒成立的是(　　).

(A) $f(x)>0$　(B) $f(x)<0$　(C) $f(x)>x$　(D) $f(x)<x$

**思路点拨**　因为是考查 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立的情况,故依 $f'(x)$ 的定义考查 $x\to 0$ 的情况.

【解】 令 $x=0$,依条件式 $2f(0)+0\cdot f'(0)>0$,

因为 $f'(0)$ 为常数,得 $f(0)>0$.

令 $x\to 0$,依导数的定义 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的导数为 $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$.

依条件式　$2f(x+0)+(x+0)\cdot\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}>(x+0)^2$,

即 $2f(x)+f(x)-f(0)>x^2$,

$3f(x)>x^2+f(0)$,

因为 $f(0)>0$,得 $f(x)>0$.

**答案** A

## 探究创新拓展

**例 1** (2004·山东) 若函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 处的导数为 $A$,求 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(a+\Delta x)-f(a-\Delta x)}{2\Delta x}$ 的值.

**思路点拨** 依 $f'(x)|_{x=a}$ 的定义知 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}=A$,再以 $-\Delta x$ 代替 $\Delta x$ 得 $\lim\limits_{-\Delta x\to 0}\dfrac{f(a-\Delta x)-f(a)}{-\Delta x}$ 的值,然后求待求式的值.

**【解】** 由 $f(x)$ 在 $x=a$ 处的导数为 $A$ 知 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}=A$,

又以 $-\Delta x$ 代替 $\Delta x$,

所以 $\lim\limits_{-\Delta x\to 0}\dfrac{f(a-\Delta x)-f(a)}{-\Delta x}=A$.

$$\begin{aligned}&\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a-\Delta x)}{2\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)+f(a)-f(a-\Delta x)}{2\Delta x}\\&=\frac{1}{2}\left[\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a)-f(a-\Delta x)}{\Delta x}\right]\\&=\frac{1}{2}\left[A+\lim_{-\Delta x\to 0}\frac{f(a-\Delta x)-f(a)}{-\Delta x}\right]\\&=\frac{1}{2}(A+A)=A.\end{aligned}$$

**反思** 这里依导数的定义知,在 $x=a$ 的附近以 $-\Delta x$ 代替 $\Delta x$,$f(a)$ 的极限存在并且极限值相等.

**例 2** 试判断 $f(x)=\begin{cases}x, & x\geq 0,\\ -x, & x<0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处是否可导.

**思路点拨** 因为 $f(x)$ 在 $x=0$ 的两边是分段函数,故应分 $\Delta x>0$ 与 $\Delta x<0$ 来考虑.

【解】 当 $\Delta x>0$ 时，

$$\Delta y=f(0+\Delta x)-f(0)=\Delta x-0=\Delta x,$$

$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{\Delta x}{\Delta x}=1$，即当 $\Delta x\to0^{+}$ 时，$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\to1$；

当 $\Delta x<0$ 时，

$$\Delta y=f(0+\Delta x)-f(0)=-\Delta x-0=-\Delta x,$$

$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{-\Delta x}{\Delta x}=-1$，即当 $\Delta x\to0^{-}$ 时，$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\to-1$.

故当 $\Delta x\to0$ 时，$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$不趋于某一常数，即 $f(x)$在 $x=0$ 处不可导.

**反思** 本例与上例呼应，说明函数在某一点可导，其左右极限应存在且相等，否则就不可导.

## 三级题型测训

### Ⅰ 夯实基础

1. 在平均变化率等概念的定义中，自变量的增量 $\Delta x$ 满足(　　).

(A) $\Delta x>0$　　(B) $\Delta x<0$　　(C) $\Delta x\neq0$　　(D) $\Delta x=0$

2. 一质点的运动方程为 $S=5-3t^2$，则在一段时间$[1,1+\Delta t]$内相应的平均速度为(　　).

(A) $3\Delta t+6$　　(B) $-3\Delta t+6$　　(C) $3\Delta t-6$　　(D) $-3\Delta t-6$

3. 某质点沿直线运动的方程为 $y=-2t^2+1$，则该质点从 $t=1$ 到 $t=2$ 时的平均速度为(　　).

(A) $-4$　　(B) $-8$　　(C) $6$　　(D) $-6$

4. 在曲线 $y=2x^2-1$ 的图象上取一点$(1,1)$及邻近一点$(1+\Delta x,1+\Delta y)$，则$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$等于(　　).

(A) $4\Delta x+2(\Delta x)^2$　　(B) $4+2\Delta x$

(C) $4\Delta x+(\Delta x)^2$　　(D) $4+\Delta x$

5. 如果质点按规律 $S=3t^2$ 运动，则在 $t=3$ 时的瞬时速度为(　　).

(A) 6　　(B) 18　　(C) 54　　(D) 81

6. 已知 $S=\dfrac{1}{2}gt^2$，$t$ 从 3 秒到 3.1 秒的平均速度是________.

7. 求 $y=x^2-2x+1$ 在 $x=-2$ 附近的平均变化率.

## Ⅱ 能力提升

8. 设函数 $f(x)$可导,则$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(1+\Delta x)-f(1)}{3\Delta x}$等于(　　).

(A) $f'(1)$　　(B) $3f'(1)$　　(C) $\dfrac{1}{3}f'(1)$　　(D) $f'(3)$

9. 设 $f(x)=\dfrac{1}{x}$,则$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$等于(　　).

(A) $-\dfrac{1}{a}$　　(B) $\dfrac{2}{a}$　　(C) $-\dfrac{1}{a^2}$　　(D) $\dfrac{1}{a^2}$

10. 设 $f(x)=ax+4$,若 $f'(1)=2$, 则 $a=$(　　).

(A) 2　　(B) $-2$　　(C) 3　　(D) 不确定

11. 一木块沿某一斜面自由下滑,测得下滑的水平距离 $S$ 与时间 $t$ 之间的函数关系为 $S=\dfrac{1}{8}t^2$, 则 $t=2$ 秒时,此木块在水平方向的瞬时速度为(　　).

(A) 2　　(B) 1　　(C) $\dfrac{1}{2}$　　(D) $\dfrac{1}{4}$

12. 某物体按照 $S(t)=3t^2+t+4$ 的规律做直线运动,求在 $t=4$ 附近物体速度的平均变化率.

13. 用导数的定义求 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$在 $x=1$ 处的导数.

## Ⅲ 探索拓展

14. 一物体做直线运动,其位移 $S$ 与时间 $t$ 的关系是 $S=3t-t^2$.

(1) 求此物体的初速度;

(2) 求 $t=0$ 到 $t=2$ 时的平均速度.

# 1.1.2　导数的几何意义

## 课程目标点击

1. 理解曲线在某一点 $P$ 处切线的定义,掌握导数的几何意义.

2. 通过对曲线切线的学习,体验以直代曲、无限逼近等数学思想方法及其内涵.

3. 理解导函数的概念,掌握函数的导函数和函数在某一点的导数之间的联系与区别.

## 重点难点突破

**1. 切线的定义**

如图 1.1-3，设 $Q$ 为曲线 $C$ 上不同于 $P$ 的一点，直线 $PQ$ 称为曲线的割线. 当点 $Q$ 沿着曲线 $C$ 向 $P$ 运动时，割线 $PQ$ 在点 $P$ 附近越来越逼近曲线 $C$. 当点 $Q$ 无限逼近点 $P$ 时，直线 $PQ$ 就最逼近于一个确定的位置，这个确定的位置就是直线 $PT$——曲线 $C$ 过点 $P$ 的切线.

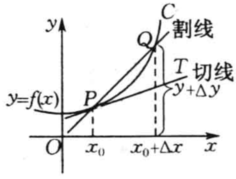

图 1.1-3

这里切线的定义与初中几何中圆的切线定义“直线和圆有唯一的公共点时，称直线和圆相切”似乎有些不同. 其实用上述逼近的方法，是完全一样的. 因为圆是一种特殊的曲线，而上述定义适合所有曲线的切线的定义，但圆的切线的定义就不适用于一般的曲线的切线. 如图 1.1-4中的曲线 $C$，直线 $l_1$ 与曲线 $C$ 有唯一的公共点 $M$，但 $l_1$ 不是曲线 $C$ 的切线；$l_2$ 虽然与曲线 $C$ 不止一个公共点，但 $l_2$ 是曲线 $C$ 在 $N$ 点处的切线.

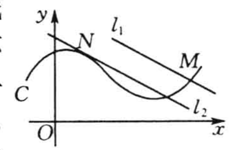

图 1.1-4

**2. 导数的几何意义**

如图 1.1-3，设曲线 $C$ 上一点 $P(x_0,f(x_0))$，过点 $P$ 的一条割线交曲线 $C$ 于另一点 $Q(x_0+\Delta x,f(x_0+\Delta x))$，则割线 $PQ$ 的斜率为

$$k_{PQ}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{(x_0+\Delta x)-x_0}=\frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

当 $Q$ 沿曲线 $C$ 无限逼近 $P$ 时，即当 $\Delta x$ 无限趋近于 0 时，$\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 无限趋近于点 $P(x_0,f(x_0))$ 处的切线的斜率，即

$$k_{切}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0).$$

即曲线 $y=f(x)$ 在点 $x_0$ 处的切线的斜率等于函数 $y=f(x)$ 在 $x_0$ 处的导数 $f'(x_0)$.

**例 1**　(2007 · 湖北，文) 已知函数 $y=f(x)$ 的图象在点 $M(1,\ f(1))$ 处的切线方程为 $y=\frac{1}{2}x+2$，则 $f(1)+f'(1)=$______.

**思路点拨**　由 $M(1,f(1))$ 处的切线的斜率即知 $f'(1)$ 的值.

**【解】**　$f(1)=\frac{1}{2}\times 1+2=\frac{5}{2}$，

又依在切点$\left(1,\dfrac{5}{2}\right)$的切线方程知　$f'(1)=k=\dfrac{1}{2}$，

故　$f(1)+f'(1)=\dfrac{5}{2}+\dfrac{1}{2}=3$.

**答案**　3.

**3. 导函数**

设某一物体的运动规律为 $s(t)=t^2-3t$，当 $t$ 变化时，$s(t)$是 $t$ 的一个函数，这是大家熟知的，同时 $s'(t)$也是 $t$ 的一个函数：

$$\begin{aligned}\frac{\Delta s}{\Delta t}&=\frac{s(t+\Delta t)-s(t)}{\Delta t}\\&=\frac{(t+\Delta t)^2-3(t+\Delta t)-(t^2-3t)}{\Delta t}\\&=\frac{2t\Delta t+(\Delta t)^2-3\Delta t}{\Delta t}=2t+\Delta t-3.\end{aligned}$$

$$s'(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}(2t+\Delta t-3)=2t-3.$$

我们称 $s'(t)=2t-3$ 为 $s(t)=t^2-3t$ 的导函数，也简称为导数.

而　　$s'(2)=s'(t)|_{t=2}=2\times 2-3=1$，

即当 $y=f(x)$在 $x_0$ 处可导时，$f'(x_0)$的值就等于其导函数 $f'(x)$在 $x=x_0$ 处的函数值.

**例 2**　在曲线 $y=x^2+1$ 上，过哪一点的切线分别满足下列条件：

(1) 平行于直线 $y=4x-3$；　(2)垂直于直线 $2x-6y+3=0$.

**思路点拨**　曲线 $y=x^2+1$ 上不同的点其切线的斜率不相同，依切线的几何意义知，$k=y'$是 $x$ 的函数，故应先求导函数.

**【解】**　$f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^2+1-x^2-1}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x)=2x.$$

(1) 直线 $y=4x-3$ 的斜率 $k=4$，令 $2x=4$，得 $x=2$，

故切点为(2,5).

(2) 直线 $2x-6y+3=0$ 的斜率 $k=\dfrac{1}{3}$，知 $k'=-3$.

令 $2x=-3$，得 $x=-\dfrac{3}{2}$，故切点为$\left(-\dfrac{3}{2},\dfrac{13}{4}\right)$.

## 方法技巧点拨

### 1. 已知曲线方程和点的坐标求切线方程

**例 1**　求曲线 $y=x^2+\frac{1}{x}-3$ 在 $x=2$ 处的切线方程.

**思路点拨**　关键是依导数的几何意义求出 $y'|_{x=2}$ 的值.

**【解】**　$k=y'|_{x=2}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(2+\Delta x)^2+\frac{1}{2+\Delta x}-3-2^2-\frac{1}{2}+3}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left[4+\Delta x-\frac{1}{2(2+\Delta x)}\right]=4-\frac{1}{4}=\frac{15}{4}.$$

又当 $x=2$ 时，$y=\frac{3}{2}$，即切点为 $\left(2,\frac{3}{2}\right)$.

故在 $x=2$ 处的切线方程为

$$y-\frac{3}{2}=\frac{15}{4}(x-2),\quad 即\quad 15x-4y-24=0.$$

**方法总结**

求曲线在点 $x_0$ 处的切线方程的一般步骤：

(1) 求函数 $y=f(x)$ 在点 $x_0$ 处的导数 $f'(x_0)$；

(2) 求切点 $(x_0,f(x_0))$；

(3) 依点斜式得切线方程 $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$.

### 2. 已知曲线方程和切线的斜率求切线方程

**例 2**　(2004・湖北) 与直线 $2x-y+4=0$ 平行的抛物线 $y=x^2$ 的切线方程是(　　).

(A) $2x-y+3=0$　　(B) $2x-y-3=0$

(C) $2x-y+1=0$　　(D) $2x-y-1=0$

**思路点拨**　关键是由已知条件求出切点的坐标.

**【解】**　直线 $2x-y+4=0$ 的斜率为 $k=2$.

依导数的几何意义，我们先求抛物线 $y=x^2$ 的导函数，

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^2-x^2}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2x\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x)=2x,$$

令 $2x=2$ 得 $x=1$，