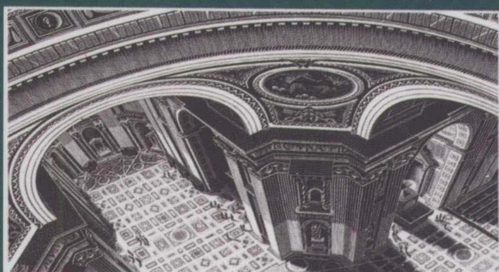
俄罗斯数学精品系列

463 Old Problems of Russian Geometric

463个 俄罗斯几何老问题



《463个俄罗斯几何老问题》
编写组 编

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

463 OLD PROBLEMS OF RUSSIAN GEOMETRIC

463个俄罗斯几何老问题

● 《463个俄罗斯几何老问题》编写组 编

哈爾濱工業大學出版社
HITP HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内 容 简 介

本书先讲定理的构成及推证方法.如命题的条件与结论，直接证法与间接证法，综合证法与分析证法，演绎法，归纳法，数学归纳法等，使读者对证题方法有一个较全面的了解.然后列出几何证明题463个，其中大约$\frac{2}{3}$为平面几何题，$\frac{1}{3}$为立体几何题.每题均有解答，但解答并不附在各题之后，而放在书的后半部.这样可令读者先独立解答，然后再与书上的解答对照，而不削弱读者的创造性.

本书适合初、高中师生，师范类院校及教育学院师生使用.

图书在版编目(CIP)数据

463个俄罗斯几何老问题/《463个俄罗斯几何老问题》编写组编.—哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社，2012.1

ISBN 978-7-5603-3454-7

Ⅰ.①4… Ⅱ.①4… Ⅲ.①平面几何②立体几何 Ⅳ.①O123.1②O123.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第271826号

策划编辑 刘培杰 张永芹
责任编辑 唐 蕾
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街10号 邮编150006
传 真 0451-86414749
网 址 http://hitpress.hit.edu.cn
印 刷 哈尔滨市石桥印务有限公司
开 本 787mm×1092mm 1/16 印张12.5 字数218千字
版 次 2012年1月第1版 2012年1月第1次印刷
书 号 ISBN 978-7-5603-3454-7
定 价 28.00元

◎目录

绪　论

1. 逻辑思维的发展，在学校教育中是最重要的因素之一.

在几何学中，证明题（定理）对于逻辑思维的发展具有极大的意义. 它们帮助学生发展思维的确定性、系统性、可靠性. 通过这些习题，教师能教会学生一些证明方法，如分析法与综合法.

2. 经验证明，尽可能早一些开始解证明题是有益处的，但需按照由易到难的程度提出.

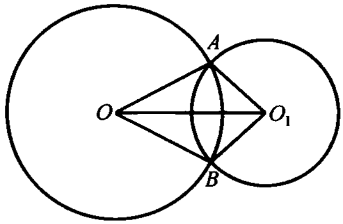
经常是在练习的第一步中，让学生学会辨别结论的条件，然后直接转变到证明题，学生应当理解如何证明定理，即由判断与推理从定理的条件转到它的结论. 论证可引用定义、公理及以前的定理作根据. 在这样判断的结果中，所证明的命题得到真伪的判定.

在开始时，应该解比较容易的习题，即只用一个定理可证明的，然后解用两个定理可证明的（例如，21～28 题）.

学生看过习题的词句以后，首先应该作出图形，标出并且记明什么是已知的（条件）及什么是需要证明的（结论）. 图形上不应该包含原题上没有的多余的条件. 例如，若给出一个三角形，则不可以画成等腰三角形，因为这样或许会扰乱正规的证明过程（部分的情形构成讨论的问题）. 然后学生拟出解题计划及证明的基本要素，当他进行解题时，没有必要要求他作详细的说明. 当学生把解答进行到结论时，他应该建立每一个证明的步骤并且简明地记录下来.

容易的习题可以在课堂上口头解答. 在这种情形，准备一张表是有益处的. 把表挂在黑板上由学生口头解答习题.

3. 做证明题时，应当教会学生发现条件与结论间的关系（图 1）.



已知：	求证：
A 与 B 为圆 O 与圆 O_1 的交点.	$\triangle AOO_1 \cong \triangle BOO_1$.

图 1

教师认为必要时，应当把某些基本法则介绍给学生，这些知识在很大的程度上可以帮助发现解法.

第一，证题时，学生应当记住要充分利用定理的条件.

第二，每一个确定的概念应当用它的定义来代替. 为了找到解法，有时需充分地应用这个法则.

下面是解题实例.

例 1 角平分线上的任一点，距它的两边等远(图 2).

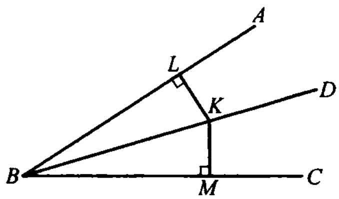


图 2

条件：	结论：
点 K 在 $\angle ABC$ 的平分线 BD 上.	自点 K 至两边 BA 与 BC 的距离相等.

这里有两个定义：

(1) 一直线分一角为两等份时，这直线称为角的平分线.

(2) 自一点到一直线的垂线足的长度，称为自这点到直线的距离.

按照定义(2) 需要自点 K 到角的两边作垂线.

由此条件与结论可以采用下面的形式.

条件：	结论：
$\angle ABD = \angle CBD$, $KL \perp AB$, $KM \perp BC$.	$KL = KM$.

证明的过程就已确定. 两直角三角形 $\triangle KBL$ 与 $\triangle KBM$ 具有公共斜边 BK 与相等的锐角 $\angle KBL$ 与 $\angle KBM$，换言之，它们是全等的，因而 $KL = KM$.

利用定义不是永远都能得出结论的. 因此常常引用一个与定义相同的条件.

我们研究下例.

例 2 试证明，四边形各边的中点为一平行四边形的顶点(图 3).

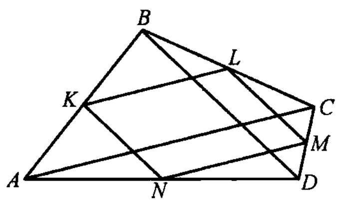


图 3

条件：	结论：
在四边形 $ABCD$ 中，K，L，M，N 为边 AB，BC，CD，DA 的中点.	$KLMN$ 为平行四边形.

证法 1 定义：对边两两平行的四边形，称为平行四边形.

条件：	结论：
在四边形 $ABCD$ 内，K，L，M，N 为边 AB，BC，CD，DA 的中点.	$KL \parallel NM$，$KN \parallel LM$.

为了证明直线 KL 与 NM 平行，必须得到这些直线平行的一个条件. 若引截线 KM 或 LN，则无根据可以认为内错角 $\angle LKM$ 与 $\angle KMN$ 或 $\angle KLN$ 与 $\angle LNM$ 相等，换言之，KL 与 NM 的平行，应该决定在别的条件上. 我们分析它们是否是第三条直线的垂直线或平行线. 最后就决定了解题的过程. 引对角线 AC，则 $KL \parallel NM$，因为它们是共底 AC 的 $\triangle ABC$ 与 $\triangle ADC$ 中的两条中点连线. 同理引对角线 BD，则得 $KN \parallel LM$.

也可以取同样能确定平行四边形的条件之一代替平行四边形的定义，而得

另一个证法.

证法 2 确定平行四边形的条件:四边形的对边相等且平行的为平行四边形.

条件:	结论:
在四边形 $ABCD$ 内,K,L,M,N 为边 AB,BC,CD,DA 的中点.	$KL \parallel NM, KL=NM$.

事实上,线段 KL 与 MN 平行且相等,因为它们是共一边 AC 的 $\triangle ABC$ 与 $\triangle ADC$ 中的两条中点连线,这就证明了这定理.

证法 2 显然是最简单的,此外,若学生在证法 1 中,发现线段 KL 与 MN 不仅平行,而且相等,他就能变更证明的过程给出证法 2.

为了证明例 2,需要证明两条直线 KL 与 MN 平行. 这是由分析结论找到的解答,而不是条件指出来必须证明这两条直线平行.

同样的,在例 1 里,证明两条线段 KL 与 KM 相等的必要性也是依据分析结论得到的.

所以,分析结论能够使学生易于找出证明的方法,但在证明的过程里,分析是把结论与条件结合起来,使他们不至于迷失了证明的正确途径.

例 3 如图 4,在四边形 $ABCD$ 中,$\angle B,\angle D$ 为直角,从对角线 AC 上一点 M 作 MP,MQ 垂直于 BC,AD 两边. 求证 $\frac{MP}{AB}+\frac{MQ}{CD}=1$.

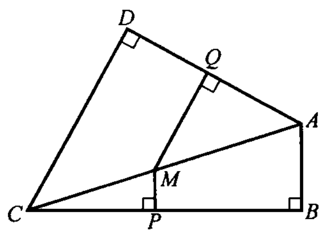


图 4

条件:	结论:
在四边形 $ABCD$ 中,$\angle B=\angle D=90^\circ$,$MP\perp BC,MQ\perp AD$.	$\frac{MP}{AB}+\frac{MQ}{CD}=1$.

分析结论,我们看出线段 MP,MQ,AB,CD 为直角三角形 $\triangle CMP$,$\triangle AMQ$,$\triangle ABC$,$\triangle ACD$ 的边,而且 $MP \parallel AB,MQ \parallel CD$. 即能从这些三角形

的相似决定这些线段的相依关系. $\triangle MPC \backsim \triangle ABC$,从而

$$\frac{MP}{AB}=\frac{CM}{CA} \tag{1}$$

$\triangle AMQ \backsim \triangle ACD$,从而

$$\frac{MQ}{CD}=\frac{MA}{CA} \tag{2}$$

当转向结论时,我们又看出,为了证明,需要将式(1) 与(2) 相加,则得

$$\frac{MP}{AB}+\frac{MQ}{CD}=\frac{CM}{CA}+\frac{MA}{CA}=\frac{CM+MA}{CA}=\frac{CA}{CA}=1$$

例 3 是用综合法证明的,结论的分析只是为了指导解答.

在某些情况中,当这样的证明是困难的时候,可以从结论出发引出分析的证明.但在这种情况下,为了不离开正确的证明方法,需要随时注意条件.

例 4 如图 5,在 $\triangle ABC$ 内,M 为边 AC 的中点,N 为边 AB 上的一点,联结 MN. 若 $AC > AN > MN$ 及 $CM > MN$,则 $AC-AN > CM-MN$. 试证明.

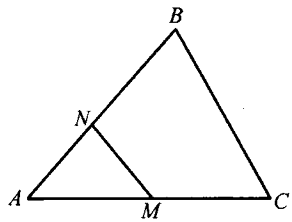


图 5

条件:	结论:
在 $\triangle ABC$ 内,$AM=MC$,$AC>AN>MN$ 及 $CM>MN$.	$AC-AN>CM-MN$.

证法 1 (分析法)我们把结论写成

$$AC-AN \gtrless CM-MN \tag{1}$$

但 $AC=2AM$ 及 $AM=CM$,即 $2AM-AN \gtrless AM-MN$,或

$$AM \gtrless AN-MN \tag{2}$$

但从 $\triangle AMN$ 得 $AM>AN-MN$,因三角形的一边大于其他两边的差,因而在不等式(1) 内,应当取大于的符号,即 $AC-AN>CM-MN$.

在找到分析证法时,如果把它的顺序反过来,很容易得出综合证法.

证法 2 (综合法)从 $\triangle AMN$ 得 $AM>AN-MN$,或者两端加上线段 AM

得 $2AM > AM + AN - MN$. 但 $2AM = AC$,以 AC 代替 $2AM$ 并且把 AN 移到不等式的左端以后,得到 $AC - AN > AM - MN$.

在所有研究过的例(定理)里,证明是由条件到结论(综合证法),或反过来,由结论到条件(分析证法). 在证明的过程里,若分析与综合的方法交错使用,这样的证明叫做直接证法.

4. 除直接证法外,还使用间接证法(从反面出发). 它建立在这样的基础上,除了应证明的结论,任何另外的结论实际上都没有可能性. 由相反的假设或者结论总引出与条件或者以前已证明过的定理或公理相矛盾的结果.

为了使这证明能使人信服,必须把所有与要证明的结论相反的结论都要研究到.

在几何学里,一件事情的可能假定的个数是一定的. 例如,两直线 a 与 b 仅能具有三种情况中的一种:①$a \parallel b$;②a 与 b 相交;③a 与 b 异面(斜叉). 因而,为了间接证明两直线 a 与 b 异面,需证明 a 不平行于 b 并且不与 b 相交. 所以在几何学里间接证法与直接证法同样能使人信服.

例 5 梯形的相对角不等,试证明.

条件:	结论:
在梯形 $ABCD$ 内,$\angle A$ 与 $\angle C$ 为相对角.	$\angle A \neq \angle C$.

在梯形 $ABCD$ 内,证 $BC \parallel AD$. 我们所研究的 $\angle A$ 与 $\angle C$ 仅能相等或不等. 在本题里,间接证明即需证在现有的条件下两角相等的不可能性,因而留下来的只有一个结论,即两角不等.

假设说 $\angle A$ 与 $\angle C$ 相等,不能直接看出矛盾来,因此要继续证明.

按照条件 $AD \parallel BC$,即 $\angle A + \angle B = 180°$,但由假设 $\angle A = \angle C$,即 $\angle C + \angle B = 180°$. 由此得直线 AB 与 DC 为平行线,即四边形 $ABCD$ 为平行四边形,这与条件矛盾. 所以从已知条件只可以得到一个结论,即 $\angle A$ 不等于 $\angle C$.

5. 我们研究另一种证法:数学归纳法. 所有从特殊推到一般的方法均称为归纳法. 但是这种方法的结论不是都可确信的,因为不能用它来代替证明. 例如,当 $n = 1, 2, 3, \cdots, 79$ 时,代数式 $n^2 - 79n + 1\ 601$ 的值都为质数,但并不能就说,式子 $n^2 - 79n + 1\ 601$ 的值都是质数,事实上,当 $n = 80$ 时,它的值就是合数. 数学归纳法(完全归纳法)与逻辑归纳法的区别是:设需要证明的定理是含有

自然数 n 的一个公式，则：① 证明这定理当 $n=1$ 时正确；② 假设公式在 n 时正确，证出在 $n+1$ 时也正确. 此后，按照归纳法公理，这定理就被认为在 n 为任何自然数时已经证明了.

例 6　求证

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2} \tag{1}$$

(1) 当 $n=1$ 时，式(1) 正确，事实上 $1=\dfrac{1\cdot(1+1)}{2}$.

(2) 假设式(1) 在 n 时正确，我们要证明在 n 变为 $n+1$ 时的相应法则也正确. 加 $n+1$ 于式(1) 的两端，并且把右端改变

$$\begin{aligned}1+2+3+\cdots+n+(n+1)&=\frac{n(n+1)}{2}+(n+1)=\\&\frac{(n+1)(n+2)}{2}=\\&\frac{(n+1)[(n+1)+1]}{2}\end{aligned} \tag{2}$$

比较等式(2) 与(1)，我们发现相应的法则并未改变：在右端乘积的第一个因数是左端的最后一个加数，第二个因数比第一个因数多 1. 即当 $n=1$ 时等式正确，并且相应的法则在 n 变为 $n+1$ 的过程中并未破坏，所以 $n=2,3,4,5,\cdots$ 时都正确.

例 7　求证一平面上的 n 条直线不能把平面分成多于 2^n 个部分.

(1) 当 $n=1$ 时，定理正确，因一条直线分平面为两部分.

(2) 假设说这定理的变数为 n 时正确，即 n 条直线分平面所成的部分数不多于 2^n，则第 $n+1$ 条线分其中每一部分(若不与它相交，则不分) 不多于两部分，所以，分这平面所成的部分不能多于 $2\times 2^n=2^{n+1}$，则由 n 变到 $n+1$ 的过程中相应的法则保持不变. 且当 $n=1$ 时定理正确，所以当直线数为任何数时，这定理都正确.

6. 至于定理的组成与定理间的关系(正定理，逆定理，否定理，逆否定理)，在本书中基本上采取了吉西略夫的几何学教科书卷 1 § 29 ～ § 32 中所陈述的材料.

同时必须记住，定理中条件 A 与结论 B 间的关系可以有各种不同的情况.

若 A 存在则 B 也存在(1)，则可能除 A 以外另有条件使 B 也存在，这样，A

存在只是 B 存在的充分条件，但不是必要条件.

除此以外，若已知 B 存在则 A 也存在(2)，则能证明 A 不存在则 B 也不存在(3)[①]，则 A 不仅为 B 存在的充分条件，且为必要条件.

据此，若逆命题正确，则原命题的假设不但为充分条件，且为必要条件.

我们研究几个定理.

例 8　若一整数的数字和可被 9 整除，则这数可被 9 整除.

条件：	结论：
数字和可被 9 整除.	这数可被 9 整除.

定理的条件是充分的，因为具有这个条件的整数都能被 9 整除. 为了说明它的必要性，取其逆命题："若一整数可被 9 整除，则其数字和可被 9 整除." 这命题也正确，所以原定理的条件不但充分而且必要.

例 9　若两角对顶，则两角相等.

条件：	结论：
两角对顶.	两角相等.

定理的条件是充分的，因为当这条件存在时，两角相等.

逆命题："若两角相等，则两角对顶." 则不真确，因为两角有相等而不对顶的. 例如，三角形对等边的两角就是相等的. 即定理的条件不是必要的，只是充分的.

有时原定理与逆定理结合为一个定理，则它可表为"为了有 B，必要且充分的要有 A".

在这种情况，必须证条件 A：① 是必要的，即若 B 存在，则 A 也存在；② 是充分的，即若 A 存在，则 B 也存在.

例 10　为了使三角形的高线也是中线，必要且充分的是三角形为等腰三角形.

(1) 已经指出的条件是必要的，即若三角形的高线也是中线，则三角形为等腰的.

---

① 事实上，若在定理(3)中，A 不存在时 B 存在，则按照定理(2) B 存在时 A 也存在，此与定理(3)的条件矛盾.

条件：	结论：
在 $\triangle ABC$ 内，BD 为高线，也为中线.	$\triangle ABC$ 为等腰三角形.

证　由条件 $BD \perp AC$ 与 $AD = DC$. 在两直角三角形 $\triangle ABD$ 与 $\triangle BCD$ 内，两边 AD 与 DC 相等，BD 公用，所以这两直角三角形全等，由是 $AB = BC$，这就证明了定理.

(2) 已经指出条件是充分的，即若三角形等腰，则其高线也是中线.

条件：	结论：
在 $\triangle ABC$ 内，$AB = BC$.	高线 BD 为中线.

证　引 $BD \perp AC$. 在两直角三角形 $\triangle ABD$ 与 $\triangle BCD$ 内，腰 BD 公用，而斜边 AB 与 BC 由条件知其相等，所以两直角三角形全等，由是 $AD = DC$，这就证明了定理.

定理之间存在着这样的关系，即仅包含一个条件则定理是简单的. 若定理是复杂的，即含有数个条件（例如，吉西略夫的几何学教科书卷 1 § 73，§ 77），则定理间的依存关系寻求较难. 在这种情形下，把已知定理一个或数个条件与一个或数个结论交换位置，所得的一切命题，都称为逆命题.

所以，定理“若被除数与除数都能被一数整除，则由除法所得的余数也可被此数整除”有三个逆命题：

(1)“若两数相除所得的余数可被某数整除，则被除数与除数可被此数整除.”是一个完全的逆述语，但不正确.

(2)“若被除数与余数可被一数整除，则除数可被此数整除.”若余数不是 0，这命题正确.（译者注：这逆命题不正确）

(3)“若除数与余数可被一数整除，则被除数可被此数整除.”这命题总是正确的.

7. 在课堂上最好给学生容易的及中等难的习题. 在本书里尽可能地把习题按难易的程度编排.

本书中较难的习题，都标上了星号“*”.

当利用本书习题解答这一部分时，必须了解这些解答是直接从证明的要点开始的，且带有某些简要性. 所有解答的推究部分和解答的探求，如果在前边习题中已经见过，则在后面通常都省略了. 运用这些解答时，事先应该充分地分析

条件、结论并作出图(如果原来没有图),进行结论的分析,有时要用许多过渡的次要的部分证明来补充.

为了让教师便于选择习题,下面列出一些习题的题号,在这些习题里,都具有证明法的基本意义.

(1) 全等:21 ～ 29,32,70.

(2) 相似:201,202,205,214,223(2).

(3) 代数的应用:14,16,61,68,69,71,73,226,228,233,263,312 ～ 314,394(2).

(4) 轨迹:33,185(1),211,381,382.

(5) 对称,伸直:50,120.

(6) 平移:41,213,330,420(1).

(7) 作图:302(1),394(1).

(8) 割补,等积:248(1),252,254,257,266(1) 和(2).

第一章 平面几何学

§1 问题与练习题

1. 下列命题中，哪些是定义？哪些是公理？哪些是定理？

(1)于等量上各加等量，则得相等的量.

(2)整数的末位数字若可被 2 整除，则该整数可被 2 整除.

(3)分数的分子分母同被一不等于 0 的数乘，分数的值不变.

(4)两负数相乘的积为一正数.

(5)若能使两线段的端点都重合，则两线段相等.

(6)两角有一公共边，一角的另一边为他一角的另一边的延长线，这两角称为补角.

(7)一角的两边为另一角的两边的延长线，则这两角称为对顶角.

(8)对顶角相等.

(9)若一三角形的两边及其夹角等于另一三角形的两边及其夹角，则此两三角形全等.

(10)若一三角形的两边及一边的对角等于另一三角形的两边及一边的对角，则此两三角形全等.

(11)正三角形内所有的边彼此都相等.

2. 在第 1 题的各命题中，其表现为定理的，试说明什么是它的假设，什么是结论.

3. 在第 1 题中，哪些命题是不正确的？

4. 把下面各定理，都公式化的写出来，假设的开始用“若”字，结论的开始用“则”字.

(1) 整数，其末位数字为 5 或 0 的，可被 5 整除.

(2) 整数，其各位数字和可被 3 整除的，可被 3 整除.

(3) 在等腰三角形内两底角相等.

(4) 对顶角相等.

(5) 两三角形由三对对应边相等而全等.

(6) 两直角三角形由两对对应的直角边相等而全等.

(7) 三角形内大角对大边.

5. 回答下列问题,并指出其基本根据(定义,公理,定理).

(1)$a=5,b=a,b$ 等于多少?

(2)246 是否能被 6 整除?

(3) 三个连续自然数的积与中间那数的和等于中间数的立方,试证明.

(4) 为什么所有圆上的点与圆心等距离?

(5) 互为补角的两个角能否都是钝角?

(6) 当两直线相交成一直角时,其余三个角如何?

(7) 经过一点可引多少直线平行于已知直线?

(8) 为什么等边三角形内各角彼此相等?

(9) 为什么正三角形内各边彼此相等?

6. 把“必要”,“充分”,“必要且充分”,填在下列命题中空白的位置上.

(1) 一数为 7 整除,是这数可被 21 整除的________条件.

(2) 一数的末位数字为 5,是这数可被 5 整除的________条件.

(3) 一个奇数的末位数字为 5,是这数可被 5 整除的________条件.

(4) 一数的末位数字可被 5 整除,是这数可被 5 整除的________条件.

(5) 两数都是偶数,是两个数的和为偶数的________条件.

(6) 一数被 3 整除,是这数可被 6 整除的________条件.

(7) 一个偶数被 3 整除,是这数可被 6 整除的________条件.

(8) 一数的末位数字为 4,是这数是偶数的________条件.

7. 指出下列定理((1) ~ (5))的假设是否必要,充分或必要且充分.

(1) 若两个乘数中至少有一个为零,则其积为零.

(2) 奇数的平方和是偶数.

(3) 三角形内两个较小边的和大于第三边.

(4) 等腰三角形顶角的平分线与其对边中线重合.

(5) 角平分线上的每一点,与其两边等远.