高等数学（二）

王淑云 主编

专科 起点 升 本科

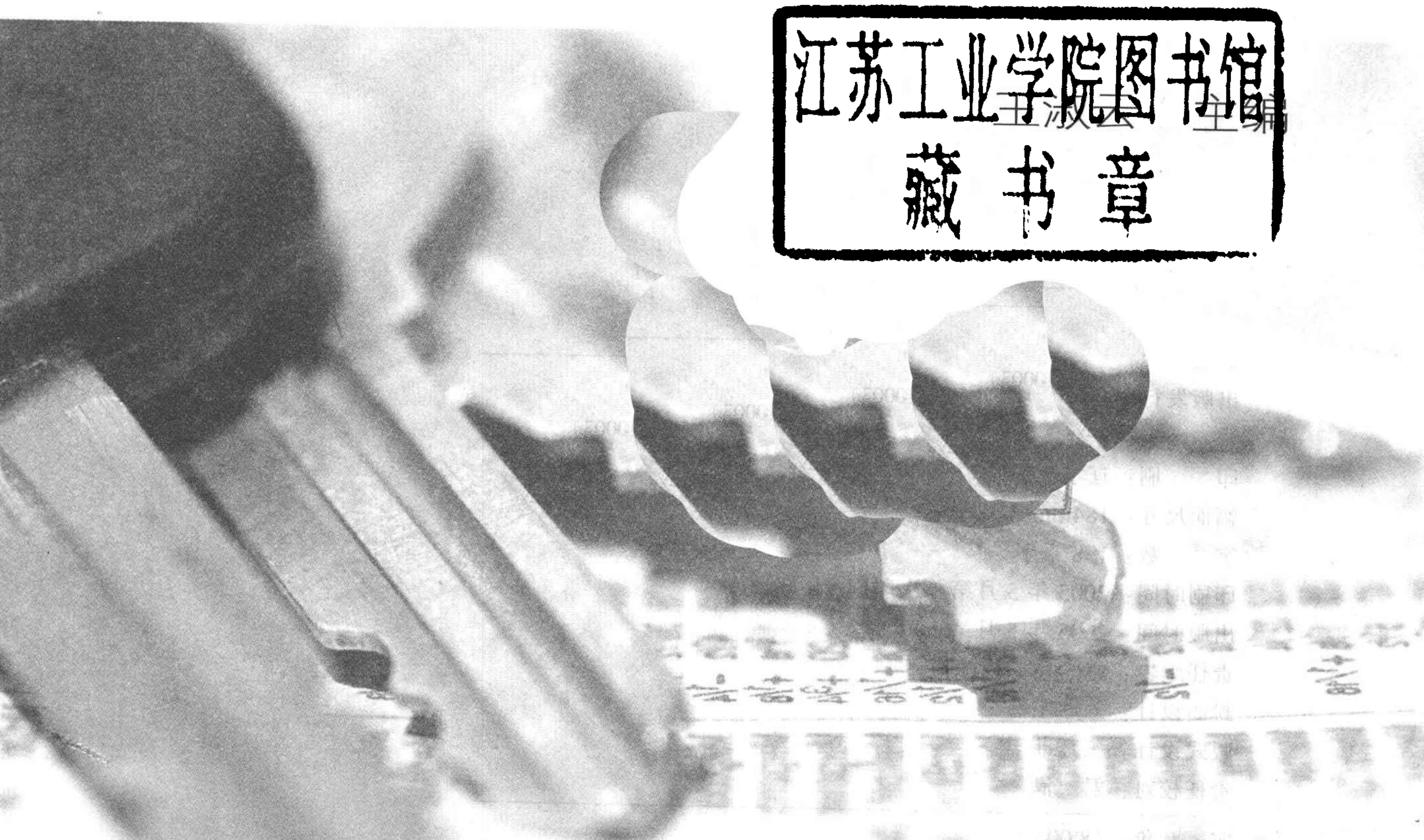
全国各类成人高考复习指导用书
辽宁人民出版社

全国各类成人高考复习指导用书　专科起点升本科

二

高等数学

王淑云　主编



辽宁人民出版社

图书在版编目（CIP）数据

高等数学·二/王淑云主编. —沈阳：辽宁人民出版社，2005.5
全国各类成人高考复习指导用书.专科起点升本科
ISBN 7-205-05900-3

Ⅰ.高… Ⅱ.王… Ⅲ.高等数学-成人教育：高等教育-升学参考资料 Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2005）第 026169 号

出版发行：辽宁人民出版社
（地址：沈阳市和平区十一纬路 25 号 邮编：110003）
印　　刷：辽宁星海彩色印刷中心
幅面尺寸：184mm×260mm
字　　数：198 千字
印刷时间：2005 年 5 月第 1 次印刷
出版时间：2005 年 5 月第 1 版
责任编辑：赵学良　成咏梅
封面设计：刘冰宇
版式设计：王珏菲
责任校对：君　满

定　　价：18.00 元

主　　编　王淑云
副 主 编　马振生　付　瑶
参编人员　王彩玲　张淑婷　张君施　关天月
宋东哲　朱庆来　阚君满

使用说明

《高等数学（二）》是文史财经类专科起点升本科的必考科目之一，为了满足广大考生备考的需要，我们依据2005年《全国各类成人高等学校招生复习考试大纲〈专科起点升本科〉》编写此书，以供广大考生备考之用。

编写过程中，我们始终遵循以下原则：

1．贴近考生、贴近考试；

2．重点突出、简明扼要、便于自学。

本书正文共分六个单元，每个单元设知识精讲、重点难点解析、真题选讲、典型例题和单元基础训练五部分。知识精讲，是将本单元要考的知识点，包括概念、理论、公式、方法提炼出来，做到简明易懂，体现了重点突出、简明扼要的原则。重点难点解析，指出了本单元的重点和难点，其中，重点是指考试常考之点，难点是指易混易错之点。真题选讲，我们将近年考题选做例题，一方面进行基础知识复习，另一方面使考生了解常考题型和考试难易程度，体现贴近考生、贴近考试的原则。典型例题，给出了一些有代表性的题目。单元基础训练是考虑到选讲的题目有一定的局限性，我们根据多年的辅导经验积累，精心编制了单元基础训练一、二，希望能够覆盖考点。基础训练后设参考答案，为考生复习提供方便。

考生阅读此书时，一定要先读后练或边读边练。所谓读，就是要读懂知识精讲和考题选讲；所谓练，就是要做两个基础训练。本书最后按照大纲要求的考试题型、分值比例和难易程度精心编写了五套模拟题，在加大对知识点的覆盖面的同时突出考试重点、难点、热点，期望有一定的预见性和前瞻性。

本书还附录了《大纲》中所附的“考试形式、试卷结构及样题”，以供考生参考。

由于时间仓促，难免有所疏漏，诚恳地希望广大读者提出宝贵意见。

目　　录

第一单元

极限与连续

知识结构

- **极限与连续**
  - 极限
    - 定义
      - 数列极限
      - 函数极限
        - $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$
        - $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$
        - 左、右极限
    - 性质
      - 唯一性
      - 有界性
      - 四则运算性质
    - 存在准则
      - 单调有界原理
      - 夹逼准则
    - 两个重要极限
      - $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$
      - $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$
  - 无穷小与无穷大
    - 定义
      - 无穷小
      - 无穷大
    - 运算性质
      - 有限无穷小之和为无穷小
      - 有限无穷小之积是无穷小
      - 有界函数与无穷小之积是无穷小
    - 无穷小比较
      - 高阶无穷小
      - 同阶无穷小
      - 等价无穷小

$$
\text{连续}\begin{cases}
\text{定义}\begin{cases}\text{函数在一点连续定义}\\\text{连续函数}\\\text{左、右连续}\end{cases}\\
\text{连续函数运算}\begin{cases}\text{连续函数的和、差、积、商的连续性}\\\text{连续函数的复合函数是连续函数}\\\text{初等函数的连续性}\end{cases}\\
\text{闭区间连续函数性质}\begin{cases}\text{最值性}\\\text{有界性}\\\text{介值性}\\\text{零值性}\end{cases}
\end{cases}
$$

知识精讲

数列极限

1. 数列极限定义

对数列 $\{x_n\}$，当 n 无限增大 $n\to\infty$ 时，x_n 无限趋于常数 A，则称 A 是数列 $\{x_n\}$ 的极限，记为$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$. 数列 $\{x_n\}$ 有极限 A，也称数列 $\{x_n\}$ 收敛于 A.

如果数列 $\{x_n\}$ 无极限，则称数列 $\{x_n\}$ 发散.

2. 数列极限的性质

（1）（唯一性）数列 $\{x_n\}$ 有极限，则极限唯一.

（2）（有界性）有极限数列必有界：但反之不成立，有界是数列收敛的必要非充分条件.

3. 数列极限的四则运算

设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=B$，则 $\lim(x_n\pm y_n)=\lim\limits_{n\to\infty}x_n\pm\lim\limits_{n\to\infty}y_n=A\pm B$，$\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=\lim\limits_{n\to\infty}x_n\cdot\lim\limits_{n\to\infty}y_n=AB$，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}x_n}{\lim\limits_{n\to\infty}y_n}=\frac{A}{B}(B\neq0)$.

4. 数列极限存在准则

（1）单调有界原理：单调有界数列必有极限.

（2）夹逼准则：设有数列 $\{x_n\}$、$\{y_n\}$、$\{z_n\}$，如果满足 $y_n\leqslant x_n\leqslant z_n$，且$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\lim\limits_{n\to\infty}z_n=a$，则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

函数极限

1. $x\to\infty$ 时 $f(x)$ 的极限

（1）$x\to+\infty$ 时 $f(x)$ 的极限：设 $f(x)$ 在 $(a，+\infty)$ 上有定义，如果当 $x\to+\infty$ 时，$f(x)$ 无

限趋于常数 A，则称 A 是 $f(x)$ 是 $x \to +\infty$ 时的极限，记作 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)=A$.

（2）$x \to -\infty$ 时 $f(x)$ 的极限：设 $f(x)$ 在 $(-\infty, a)$ 上有定义，如果当 $x \to -\infty$ 时，$f(x) \to A$，则称 A 是 $f(x)$ 当 $x \to -\infty$ 时的极限，记作 $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)=A$.

（3）$x \to \infty$ 时 $f(x)$ 的极限，设 $f(x)$ 在（$-\infty$，a）$\cup$（a，$+\infty$）有定义，如果当 $|x|$ 无限增大（即 $x \to \infty$ 时）$f(x) \to A$，则称 A 为 $f(x)$ 在 $x \to \infty$ 时的极限，记为 $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)=A$.

2. $x \to x_0$ 时 $f(x)$ 的极限定义

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 某去心邻域有定义，如果当 $x \to x_0$ 时，$f(x)$ 无限趋近于常数 A，则称 $x \to x_0$ 时，$f(x)$ 以 A 为极限，记为 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)=A$.

3. 左、右极限定义

若当 x 从 x_0 左侧趋于 x_0（$x \to x_0^-$）时，$f(x)$ 无限趋近常数 A，则称 A 为 $f(x)$ 在点 x_0 处的左极限，记为 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)=A$.

若当 x 从 x_0 右侧超于 x_0（$x \to x_0^+$）时，$f(x)$ 无限趋近 A，则称 A 为 $f(x)$ 在点 x_0 处的右极限，记为 $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)=A$.

在点 x_0 的左极限也用符号 $f(x_0-0)$ 表示，在 x_0 的右极限也用 $f(x_0+0)$ 表示，即

$$f(x_0-0)=\lim_{x \to x_0^-} f(x),\ f(x_0+0)=\lim_{x \to x_0^+} f(x).$$

4. 函数极限存在的充要条件

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x)=A \Leftrightarrow$ 是 $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)=A$ 且 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)=A$.

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow$ 是 $f(x_0-0)=A$ 且 $f(x_0+0)=A$ 即左右极限存在且相等.

5. 函数极限存在的夹逼准则

设有函数 $f(x)$，$g(x)$，$h(x)$ 在点 x_0 某去心邻域有定义，如果（1）$g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$，（2）$\lim\limits_{x \to \gamma} g(x)=\lim\limits_{x \to \gamma} h(x)=\mathrm{A}$，则 $\lim\limits_{x \to \gamma} f(x)=\mathrm{A}$.

6. 函数极限的四则运算

设 $\lim\limits_{x \to \gamma} f(x)=A$，$\lim\limits_{x \to \gamma} g(x)=B$，则

$\lim\limits_{x \to x_0}[f(x) \pm g(x)]=\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x \to x_0} g(x)=A \pm B$.

$\lim\limits_{x \to \gamma} f(x) \cdot g(x)=\lim\limits_{x \to \gamma} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to \gamma} g(x)=AB$.

$$\lim_{x \to \gamma} \frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x \to \gamma} f(x)}{\lim\limits_{x \to \gamma} g(x)}=\frac{A}{B}\ (B \neq 0).$$

其中 γ 代表 x_0，x_0^-，x_0^+，$-\infty$，$+\infty$，∞ 六种情况之一.

7. 两个重要极限公式

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x}=1$，$\lim\limits_{n \to \infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$.

无穷小量与无穷大量

1. 无穷小量定义

若当 $x\to\gamma$时，$f(x)\to 0$，则称$f(x)$为 $x\to\gamma$时的无穷小量.

2. 无穷小的运算

（1）有限个无穷小之和是无穷小.

（2）有限个无穷小之积是无穷小.

（3）有界函数与无穷之积是无穷小.

3. 无穷小的比较

（设γ代表 x_0，x_0^-，x_0^+，$-\infty$，$+\infty$，∞，六种情况之一），设 $x\to\gamma$ 时，α，β 均为无穷小，那么

（1）若$\lim\limits_{x\to\gamma}\dfrac{\alpha}{\beta}=0$，则称 α 为较 β 的高阶无穷小，记为 $\alpha=0$（β）.

（2）若$\lim\limits_{x\to\gamma}\dfrac{\alpha}{\beta}=C$（$C\neq 0$），则称 α 与 β 是同阶无穷小，

（3）若$\lim\limits_{x\to\gamma}\dfrac{\alpha}{\beta}=1$，则称 α 与 β 是等阶无穷小，记为 $\alpha\sim\beta$.

4. 等阶无穷小代换

设 $x\to\gamma$时，$\alpha\sim\alpha'$，$\beta\sim\beta'$，则$\lim\limits_{x\to\gamma}\dfrac{\alpha}{\beta}=\lim\limits_{x\to\gamma}\dfrac{\beta'}{\alpha'}$.

5. 无穷大定义

若当 $x\to\gamma$ 时，$f(x)$无限增大，则称$f(x)$为 $x\to\gamma$ 时的无穷大量，记为 $\lim f(x)=\infty$，这种写法只是刻化变化趋势，不是极限.

6. 无穷大与天穷小关系

若 α 是当 $x\to\gamma$时的无穷小（$\alpha\neq 0$），则$\dfrac{1}{\alpha}$是 $x\to\gamma$时无穷大；若 $x\to\gamma$时，α 为无穷大，则$\dfrac{1}{\alpha}$是 $x\to\gamma$时的无穷小.

函数连续性

1. 连续定义

设函数$f(x)$在点 x_0 某邻域有定义，如果自变量增量 $\Delta x\to 0$ 时，相应函数 y 的增量 $\Delta y\to 0$，即$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$，则称 $f(x)$在点 x_0 连续.

2. 连续函数

设 $y=f(x)$在区间（a，b）内的每一点都连续，则称 $y=f(x)$在（a，b）内连续，也 $y=f(x)$在（a，b）内是连续函数.

3. 左、右连续

若$f(x_0-0)=f(x_0)$，则称$f(x)$在点 x_0 左连续，若$f(x_0+0)=f(x_0)$，则称 $f(x)$在 x_0 右连续.

$f(x)$在点 x_0 连续的充分必要条件是$f(x)$在 x_0 左连续且右连续.

4. 函数间断点及其分类

如果$f(x)$有下列三种情况之一

(1) 在点 x_0 无定义.

(2) 在点 x_0 处，$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$不存在.

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq f(x_0)$.

则点 x_0 是函数的间断点.

如果在间断点 x_0 的左、右极存在，则称 x_0 为第一类间断点，包括可去间断和跳跃间断点.

第一类间断点以外的间断点称为第二类间断点，包括无穷间断点和振荡间断点.

5. 连续函数的运算

(1) 连续函数的和、差、积、商（分母不为零）仍是连续的.

(2) 连续函数构成的复合函数也是连续函数.

(3) 严格单调连续函数，其反函数也为严格单调连续的.

6. 闭区间上连续函数的性质

(1) 设 $y=f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 必有最大值 M 和最小值 m.

(2) 设 $y=f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有界，即存在正数 M，使对一切 $x\in[a, b]$，均有$|f(x)|\leq M$.

(3) 如果 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，且 $f(a)\neq f(b)$，则对于介于 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间的任何值 C，在 (a, b) 内至少有一点 ξ，使有 $f(\xi)=C$.

(4) 如果 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，且 $f(a)$ 与 $f(b)$ 异号，则至少存在点 $\xi\in(a, b)$，使有 $f(\xi)=0$.

重点与难点解析

本单元重点

极限运算和函数连续性概念.

求极限是必考题型之一，因此，考生在复习时必须重视和掌握求极限的方法.

1. 初等变形及四则运算法则.

2. 两个重要极限公式

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,\quad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e\ \text{或}\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$$

3. 有界函数乘无穷小是无穷小.

4. 等阶无穷小代换.

5. 函数连续性定义，即$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.

6. 夹逼准则.

7. 洛必达法则（在第二单元复习）.

8. 导数定义（在第二单元复习）.

连续是高等数学中的重要概念，也是考试的主要知识点之一，考生要很好的理解连续，左、右连续概念，要掌握判别函数在一点连续的方法，特别是分段函数在分界点处连

续性的判别方法. 要掌握函数在一点连续的三要素：①$f(x)$在点 x_0 有定义；②极限$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在；③$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.

不具备三要素之一的点即为间断点.

本单元难点

难点 1 分段函数在段与段界点处的极限及连续性的判断. 解决好这一问题，一是极限，左、右极限，连续，左右连续概念清楚；二是掌握函数在一点 x_0 处连续的充要条件是左连续且右连续，函数在一点极限存在的充要条件是左、右极限存在且相等. 有的同学对求分段函数界点处极限，有的时候用左、右极限，有时候不用左右极限，弄不清楚，一般说，当界点 x_0 处的左、右表达式不同，则用左右极限计算，当界点处的左、右表达式是同一个，则不必分左、右极限计算；确定分段函数表达式中的待定参数，有的学员道理说不清楚，不知如何下手，应当说确定分段函数表达式中的待定参数往往依据分段函数在界点处的连续性. 连续必左连续，必右连续，必左、右极限存在且相等. 用那条结论确定呢？取决于参数含在界点的左边表达式还是界右边表达式，一般说未知参数含在界点 x_0 右边 $(x>x_0)$ 表达式，用右连续确定，即用$f(x_0+0)=f(x_0)$来确定，未知参数含在界点左边 $(x<x_0)$ 表达式中，用左连续，即$f(x_0-0)=f(x_0)$确定，如果未知参数在界点左、右表达式都有，则除了用左、右连续外，还要用到左右极限相等，即$f(x_0-0)=f(x_0+0)$，要知道 n 个待定参数就需要 n 个等式确定.

难点 2 等阶无穷代换求极限. 首先必须掌握一些等阶无穷小，常用的有 $x\to 0$ 时，$\sin x\sim x$，$\tan x\sim x$，$\arctan x\sim x$，$\arcsin x\sim x$，$e^x-1\sim x$，$\ln(1+x)\sim x$. 其次，必须把握等阶无穷小的运用原则，(1) 必须是$\left(\frac{0}{0}\right)$型极限；(2) 分子可用等阶无穷小代换，分母可用等阶无穷小代换，如果分子或分母是若干无穷小代数和，则代数和中的无穷小不能用等阶无穷小代换，如下二式，①是正确的，②是错的.

①$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x(e^x-1)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\left(\frac{x}{2}\right)^2}{x^2}=\dfrac{1}{2}$.

②$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{0-0}{x^3}=0$.

真题选讲

函数的极限与连续内容在近年考试中所占卷面分数比例约 17.3%，24 分~26 分. 考试题型多见选择题和填空题。近两年也有计算题，考核的知识点是①两个重要极限；②左、右极限；③无穷小比较；④连续性概念，新大纲规定本单元内容占卷面总分约 15%.

例 1： (2002 年) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{x}=$______.

分析： 这个极限和重要极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ 很接近，但有区别. 区别在于分数上面 sin 后面 $2x$ 与分母 x 不同，如果能凑成相同就可以用这个公式.

解： $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{2x}\cdot 2=1\times 2=2$.

应填 2.

例 2：（2002 年）设函数$f(x)=\begin{cases} e^x, & x\leqslant 0 \\ a+x, & x>0 \end{cases}$在点 $x=0$ 处连续，则 $a=$______.

分析：根据连续概念$f(x)$在 $x=0$ 处连续，必左、右连续，确定 a 只用右连续就够了.

解：因为$f(x)$在 $x=0$ 处连续，必右连续，所以有$f(0+0)=f(0)$.

而$f(0+0)=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim a+x=a$，$f(0)=e^0=1$，$\therefore a=1$.

应填 1.

例 3：（2003 年）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{5x}=$（　　）

A. 0　　　　B. $\dfrac{2}{5}$　　　　C. 1　　　　D. $\dfrac{5}{2}$

分析：重要极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ 的重要特征是①它是$\left(\dfrac{0}{0}\right)$型极限，②分子 sin 后面与分母相同. 本小题是$\left(\dfrac{0}{0}\right)$型极限，但不具备第 2 个特征. 要用重要极限公式就要具备这个特征，只要将分母的 5 提出，再乘个 2 即可实现.

解：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{5x}=\dfrac{2}{5}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{2x}=\dfrac{2}{5}\times 1=\dfrac{2}{5}$.

所以选 B.

例 4：（2003 年）求$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2}$.

分析：这是个$\left(\dfrac{0}{0}\right)$型极限. 分母 $x-2=(\sqrt{x})^2-(\sqrt{2})^2=(\sqrt{x}+\sqrt{2})(\sqrt{x}-\sqrt{2})$显见分母因式分解，然后分子分母约去等因子$(\sqrt{x}-\sqrt{2})$即可求出极限.

解：
$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{(\sqrt{x}-\sqrt{2})(\sqrt{x}+\sqrt{2})}$$
$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

例 5：（2004 年）计算$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^x$.

分析：所给极限与重要极限公式$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$ 接近，但不是，差别在哪里，重要极限公式具备二特征：①属于$(1+\text{无穷小})^{\text{无穷大}}$型；②无穷大与无穷小互为倒数，所给极限具备第一个特征：$x\to\infty$ 时，$\dfrac{2}{x}\to 0$ 是无穷小，x 本身是无穷大，但这个无穷小$\dfrac{2}{x}$和无穷大 x 不是互为倒数，所以不是，可通过初等变形，变成能用公式.

解：
$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x$$
$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}\times 2}$$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}}\right]^2$（显然中括号里面满足重要极限形式）

$=e^2$.

例 6：（2004 年）若 $x\to0$ 时，$f(x)$与 $\sin x$ 是等阶无穷小，则$\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{\sin x}=$______.

分析：这是个十分简单的小题，只要等阶无穷小概念清楚即可填出，两个无穷小等阶的充分必要条件是两个无穷小的商的极限是 1，即空应填 1. 读者应联想，若 $x\to0$，$f(x)$是 $\sin x$ 的高阶无穷小，前面空处应填什么？同阶无穷小呢？

例 7：（2004 年）设函数$f(x)=\begin{cases}x^2+1, & x\leqslant0\\ \cos x, & x>0\end{cases}$，则$\lim\limits_{x\to0}f(x)=$______.

分析：$x=0$ 是分段函数的界点，由于点 $x=0$ 处的左、右表达式不同，因此必须通过左、右极限计算.

解：由于 $x=0$ 处

$f(0-0)=\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}(x^2+1)=1$

$f(0+0)=\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\cos x=1$

有 $f(0-0)=f(0+0)=1$

所以$\lim\limits_{x\to0}f(x)=1$.

应填 1.

典型例题

例 1：若数列$\{x_n\}$有界，则$\{x_n\}$必（　　）

A. 收敛　　B. 发散　　C. 可能收敛可能发散　　D. 收敛于零

解：选 C. 例如数列$\{x_n\}=\{1+(-1)^n\}$，显然有界（$|x_n|\leqslant2$），但此数列发散（其奇数项极限$\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n-1}=0$，而偶数项极限$\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}=2$），又数列 $\{x_n\}=\left\{\frac{1}{n}\right\}$有界，且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$，收剑.

例 2：若数列$\{x_n\}$、$\{y_n\}$均发散，则$\{x_n+y_n\}$（　　）

A. 可能收敛可能发散　　B. 发散　　C. 收敛　　D. 无界

解：选 A. 例如数列 $\{x_n\}=\{1+(-1)^n\}$，$\{y_n\}=\{1-(-1)^n\}$均发散，但= $\{x_n+y_n\}=\{2\}$ 收敛；又如数列 $\{x_n\}=\{2n\}$，$\{y_n\}=\{-n\}$ 均发散，而= $\{x_n+y_n\}$　$\{n\}$ 发散.

例 3：若$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$，则当 $x\to\infty$，$f(x)-A$ 是（　　）

A. 0　　B. 不存在　　C. 无穷大　　D. 无穷小量

解：选 D. 因$\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-A]=\lim\limits_{x\to\infty}f(x)-A=A-A=0$，故$f(x)-A$ 是 $x\to\infty$ 的无穷小量.

例 4：若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\infty$，$|y_n|\leqslant M$（$M>0$ 为常数），则 $\{x_ny_n\}$ 为（　　）

A. 无穷大量　　B. 有界变量

C. 无界变量　　D. 以上答案均不对

解：选 D. 例如$\{x_n\}=\{n\}$，$\{y_n\}=\left\{\frac{1}{n}\right\}$，显然$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\infty$，$|y_n|<1$，但$\{x_ny_n\}=\{1\}$，$\{x_ny_n\}$不是无

穷大量，也不是无界变量，所以 A、C 不成立. 又如 $\{x_n\}=\{n^2\}$，$\{y_n\}=\left\{\frac{1}{n}\right\}$，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\infty$，$|y_n|<1$，但$\{x_ny_n\}=\{x_n\}$为无界变量，B 也不成立.

例 5：设$f(x)=\frac{1-x}{1+x}$，$g(x)=1-\sqrt{x}$，则当 $x\to1$ 时（　　）

A. $f(x)$是比 $g(x)$高阶无穷小　　B. $f(x)$是比 $g(x)$低阶无穷小

C. $f(x)$与 $g(x)$同阶但不是等阶无穷小　　D. $f(x)$与 $g(x)$是等阶无穷小

解：选 D. 因为$\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to1}\frac{\frac{1-x}{1+x}}{1-\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to1}\frac{1+\sqrt{x}}{1+x}=1$.

例 6：若 $\lim f(x)$存在，$\lim g(x)$不存在，则 $\lim[f(x)+g(x)]$（　　）

A. 不存在　　B. 存在

C. 可能存在可能不存在　　D. 存在且极限为零

解：选 A. 因为倘若 $\lim[f(x)+g(x)]$存在，则 $\lim f(x)=\lim[[f(x)+g(x)]-f(x)]=\lim[f(x)+g(x)]-\lim f(x)$存在，与题设矛盾，故选 A.

例 7：$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)^n=$______.

解：应填 $e^{-\frac{1}{2}}$. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{2n+1}\right)^{-(2n+1)}\right]^{-\frac{1}{2}}\left(1+\frac{1}{2n+1}\right)^{-\frac{1}{2}}=e^{-\frac{1}{2}}\cdot1=e^{-\frac{1}{2}}$.

例 8：设$f(x)=\begin{cases}\frac{\tan ax}{x}, & x\neq0\\ 3, & x>0\end{cases}$，在点 $x=0$ 处连续，则 $a=$______.

解：应填 3. 因为$\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan ax}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan ax}{ax}\cdot a=a=f(0)=3$.

例 9：函数$f(x)=\frac{\sin x}{x^5-x}$具有第二类间断点的个数为______.

解：应填 2. 由于 $x_1=0$，$x_2=-1$，$x_3=1$ 使$f(x)$无定义，所以是$f(x)$的间断点. 又由$\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{x^4-1}=-1$，得 $x_1=0$ 是第一类间断点. 而$\lim\limits_{x\to-1}f(x)=\lim\limits_{x\to-1}\frac{\sin x}{x^5-x}=\infty$，$\lim\limits_{x\to1}f(x)=\lim\limits_{x\to1}\frac{\sin x}{x^5-x}=\infty$，$x_2=-1$，$x_3=1$ 是的第二类间断点.

例 10：若函数$f(x)$在 x_0 点间断，$g(x)$在 x_0 点连续，则$f(x)\cdot g(x)$在 x_0 点______.

解：应填可能间断可能连续. 例如$f(x)=\frac{1}{x}$要点 $x=0$ 间断，$g(x)=x^2$ 在点 $x=0$ 连续，$f(x)\cdot g(x)=x$ 在点 $x=0$ 连续，又如$f(x)=\frac{1}{x^2}$在点 $x=0$ 间断，$g(x)=x$ 在点 $x=0$ 连续，但$f(x)\cdot g(x)=\frac{1}{x}$在点 $x=0$ 间断.

例 11：设 $a>0$，且$f(x)=\begin{cases}\frac{2\cos x-1}{x+1}, & x\geqslant0\\ \frac{\sqrt{a}-\sqrt{a-x}}{x}, & x<0\end{cases}$，在 $x=0$ 处连续，则 $a=$______.

解：应填$\frac{1}{4}$. 因为$f(0)=1$，$f(0^-)=\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{a}-\sqrt{a-x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{a-(a-x)}{x(\sqrt{a}-\sqrt{a-x})}=\frac{1}{2\sqrt{a}}$，

$f(0^+)=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{2\cos x-1}{x+1}=1$. 故当$\frac{1}{2\sqrt{a}}=1$，即$a=\frac{1}{4}$时，$f(0^-)=f(0^+)=f(0)$，得$f(x)$在$x=0$连续.

例 12：设$f(x)=f(x)=\begin{cases}\frac{\ln(1+ax^2)}{x^2}, & x<0\\ x+2, & 0\leqslant x<1\\ \frac{b}{x}, & x\geqslant 1\end{cases}$

若$f(x)$在（$-\infty$，$+\infty$）连续，则$a=$______，$b=$______.

解：$f(x)$在（$-\infty$，$+\infty$）连续，则$f(x)$在$x=0$，$x=1$处必连续，又$f(0)=2$，$f(1)=b$.

$f(0^+)=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x+2)=2$，$f(0^-)=\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{\ln(1+ax^2)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{ax^2}{x^2}=a$，故$a=2$.

$f(1^-)=\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(x+2)=3$，$f(1^+)=\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{b}{x}=b$，故$b=3$.

例 13：求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+\pi}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2\pi}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n\pi}}\right)$.

解：$\frac{n}{\sqrt{n^2+n\pi}}\leqslant\frac{1}{\sqrt{n^2+\pi}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2\pi}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n\pi}}\leqslant\frac{n}{\sqrt{n^2+\pi}}$，

而$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n\pi}}=1$，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+\pi}}=1$，

由夹逼准则得$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+\pi}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2\pi}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n\pi}}\right)=1$.

例 14：$\lim\limits_{x\to\infty}x^2\left(1-\cos\frac{1}{x}\right)$.

解：$\lim\limits_{x\to\infty}x^2\left(1-\cos\frac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}x^2\cdot 2\sin^2\frac{1}{2x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{2x}}{\frac{1}{2x}}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$.

例 15：求极限$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1+\tan x}}{x^3}$.

解：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1+\tan x}}{x^3}$.

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-\tan x}{x^3}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1+\tan x}}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x(\cos x-1)}{x^3}\cdot\frac{1}{2}$

$=\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{-2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}$

$=\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}\cdot\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{4}$.