高等院校“十一五”规划教材

文化素质教育系列

GAODENG SHUXUE

高等数学

主编◆陈晓敏

哈尔滨工程大学出版社

高等院校“十一五”规划教材

——文化素质教育系列

高 等 数 学

主　编　陈晓敏

副主编　闵兰、冯瑛

编　委　冯　瑛　余川祥　闵　兰

陈晓敏　刘　红　许　霞

樊　胜　黄　丹

哈尔滨工程大学出版社

内 容 简 介

本书以“重视基础，强化能力，突出应用”为原则，遵照高等院校高等数学的教学规律，做好与高中课程的衔接。针对学生的实际，适当降低起点和难度，进一步淡化理论推导，删繁就简，力求学以致用、学而够用。

本书内容包括函数与极限、导数与微分、中值定理及导数的应用、不定积分、定积分、多元函数微积分、常微分方程、无穷级数共八章

该书紧跟高等院校教材的发展步伐，强调学生实践能力、创造能力的培养，非常适合高等院校公共文化基础课教材，也可以适合相关专业的爱好者自学。

图书在版编目（C I P）数据

高等数学 / 陈晓敏主编. —哈尔滨：哈尔滨工程大学出版社，2010.3

ISBN 978 - 7 - 81133 - 701 - 3

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①陈… Ⅲ. ①高等数学—高等学校—教材 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2010）第 041322 号

出版发行　哈尔滨工程大学出版社
社　　址　哈尔滨市南岗区东大直街 124 号
邮政编码　150001
发行电话　0451 - 82519328
传　　真　0451 - 82519699
经　　销　新华书店
印　　刷　四川墨池印务有限公司
开　　本　787mm×1092mm　1/16
印　　张　12.75
字　　数　326 千字
版　　次　2010 年 5 月第 1 版
印　　次　2010 年 5 月第 1 次印刷
定　　价　24 80 元
http://press.hrbeu.edu.cn
E-mail.heupress@hrbeu.edu cn

前言…

近年来，我国经济的持续快速发展为职业教育创造了极为广阔的发展空间，也对技能型人才的培养提出了更高的要求。国务院发布了关于大力发展职业教育的决定，把发展职业教育作为“十一五”期间经济社会发展的重要基础和教育工作的战略重点，并要求根据就业市场和社会需要，深化教育教学改革，改进、更新教学内容和方法，推进精品课程和教材建设。

数学是一门必修的公共基础课，对培养、提高学生的思维素质、创新能力、科学精神以及用数学解决实际问题的能力都有着非常重要的作用。为适应经济社会发展对职业教育提出的新要求，不断提高教材质量，在研究、分析、吸收同类教材的长处和广泛征求同行意见的基础上，我们组织了西南财经大学、四川理工学院、成都电子机械高等专科学校、四川烹饪高等专科学校、四川工程职业技术学院、成都航空职业技术学院、成都铁路工程学校等多所高等院校中具有丰富教学经验、非常熟悉当前教学实际的一线老师，集思广益，编写了本书。该书为高等院校“十一五”规划教材。

本书内容包括函数与极限、导数与微分、中值定理及导数的应用、不定积分、定积分、多元函数微积分、常微分方程、无穷级数共八章。

编者在编写该套教材的过程中，密切结合当前高等院校教学改革的实际，努力编出具有自身特色的高水平的高等院校教材，其特色具体反映在:

1.严格按照《高等院校教育高等数学课程教学基本要求》，以“重视基础，强化能力，突出应用”为原则，遵照高等院校高等数学的教学规律，做好与高中课程的衔接。针对学生的实际，适当降低起点和难度，进一步淡化理论推导，删繁就简，力求学以致用、学而够用。

2. 特别关注高等数学的思想方法及应用高等数学解决实际问题的能力的训练。所选的例题和习题均以帮助学生理解概念、掌握方法和培养学生应用数学解决实际问题的意识、兴

趣和能力为目的，删掉单纯性的技巧和难度较大的习题，增强富有启发性、应用性、为专业服务的题目。

3.考虑到在学时上，各个学校有差异，不同的专业有差异，故增大了选修的内容，以满足不同学校、不同专业的需求。

4.为配合教学，我们还编写了这本教材的教学参考书，内容包括各章的教学目的、主要内容、基本公式、基本方法，重点和难点，典型例题、习题分析，各章阅读书目等。

我们期望既能培养学生应具有的人文素质，又能为学生后续课程的学习、终身学习和自主发展打好应有的基础。

本教材由陈晓敏总策划，负责组织实施。陈晓敏任主编，闵兰、冯瑛任副主编，参加编写的有陈晓敏（成都电子机械高等专科学校）、闵兰（四川理工大学）、冯瑛（成都电子机械高等专科学校）、刘红（成都航空职业技术学院）、樊胜（西南财经大学）、许霞（四川烹饪高等专科学校）、余川祥（四川工程职业技术学院）、黄丹（成都铁路工程学校）。

在本书的编著过程中，我们参考了所有能找到的有关方面的文献和资料，包括互联网上的一些信息，在此一并表示感谢！由于时间仓促，加上作者水平有限，书中错误在所难免，希望广大师生在使用过程中提出宝贵意见，请将您的建议或意见发送至19630807lql@163.com 与我们联系。并恳请全国各地的高等院校教师积极加入该系列规划教材的策划和编写队伍中来，以便我们在今后的工作中不断改进和完善，使这套教材成为高等院校的精品教材。我们网站 http://www.dztf.com 将提供该书的教学参考资料和部分教材的电子教案等教学资料下载。

编　者

2010 年 5 月

目　　录

第一章　函数与极限

函数是一个在实际生活、工程实践中有着广泛用途的概念，也是微积分研究的对象；极限是学习微积分的重要理论基础，微积分是研究函数各种特性的一门学科，只有对函数的概念、图像及性质有了全面深入的了解和认识，才能学好微积分．本章将在已学函数的基础上，着重讨论函数的极限，并介绍函数的连续性．

第一节　函　　数

现实世界中存在着各种各样不停变化的量，它们之间相互依赖、相互联系．这种几个变量之间的相互联系或相互影响的关系，揭示了客观世界中事物变化的内在规律，这种规律用数学进行描述，就是我们说的函数关系．

函数的概念在 17 世纪之前一直与公式紧密关联，到了 18 世纪，德国数学家狄里克雷抽象出了至今仍为人们易于接受且合理的函数概念．

[狄利克雷（1805～1859）Dirichlet，Peter Gustav Lejeune

德国数学家．对数论、数学分析和数学物理有突出贡献，是解析数论的创始人之一．1805 年 2 月 13 日生于迪伦，1859 年 5 月 5 日卒于格丁根．中学时曾受教于物理学家 G.S.欧姆；1822～1826 年在巴黎求学，深受 J.-B.-J.傅里叶的影响．回国后先后在布雷斯劳大学、柏林军事学院和柏林大学任教 27 年，对德国数学发展产生巨大影响．]

一、函数的概念

1．数集的几种表示

（1）区间：(a,b)，$(a,b]$，$[a,b]$，$(-\infty,+\infty)$，…

（2）不等式：$-2<x\leqslant 5$；$x>3$ …

（3）集合：$\{x|1<x<6\}$；$x\in R$ …

（4）数轴；

（5）邻域.

定义 1.1　设$a\in R$，$\delta>0$，数集$\{x|x\in|x-a|<\delta\}$称为以a为中心，δ为半径的邻域，记作$U(a,\delta)$.

邻域的几何表示即指实数轴上和点$x=a$的距离小于半径δ的点的全体.

a与δ分别称作邻域的中心与半径.

易知：以a为中心，δ为半径的邻域包含中心a，所以又称实心邻域．且有

$U(a,\delta)=(a-\delta,a+\delta)$

空心邻域$U(\hat{a},\delta)=(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta)$

2．函数的定义及表示

定义 1.2　设x,y是两个变量，D是一个给定的实数集，如果对于D内的每一个数x，按照某个对应法则f，变量y都有唯一确定的数值和它对应，则称y是x的**函数**，记作$y=f(x)$．式中x称为自变量，y称为因变量，数集D称为函数的定义域，当x取遍D中的一切实数时，与它对应的函数值的集合M称为函数$y=f(x)$的值域.

函数的表示法：函数通常有公式法、表格法和图像法三种表示法.

公式法：也称解析法，它是用数学式子表示函数，其优点是便于理论推导和计算.

用解析法表示的函数其定义域为使该解析式有意义的x的全体.

表格法：用表格形式表示函数，优点是所求函数值容易查得，如对数表等.

图像法：用图形表示函数，优点是直观形象，可看到函数变化趋势，在工程技术上应用较普遍.

函数的定义域和对应关系称为函数的两个要素.

在实际问题中，函数的定义域根据问题的实际意义确定.

例 1　求函数$y=\dfrac{1}{1-x^2}+\sqrt{x+2}$的定义域.

解　要使函数有意义，应满足　$\begin{cases}1-x^2\neq 0\\ x+2\geqslant 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\neq\pm 1\\ x\geqslant -2\end{cases}$

所以，函数的定义域为 $[-2,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$.

一般地，对一个解析式函数而言，其定义域的求解一般有以下几种常见情形：

①分式分母不为零；

②偶次根号下大于等于零；

③对数的真数大于零；

④三角函数的定义域；

⑤前几种情况的混合型，求“交”；

⑥分段函数为满足各个表达式意义的“并”.

例 2 某圆柱形容器的容积为V，试将它的表面积表示成底半径的函数，并确定该函数的定义域.

解 设圆柱的底半径为r，高为h，表面积为S.

因为$V=\pi r^2 h$，得$h=\dfrac{V}{\pi r^2}$，根据圆柱表面积公式有$S=2\pi r^2+2\pi rh$，所以

$S=2\pi r^2+\dfrac{2V}{r}$.其定义域为$r\in(0,+\infty)$.

3．反函数

定义 1.3 给定函数$y=f(x),x\in D$（定义域），$y\in W$（值域）. 如果把y作为自变量，x作为函数，对于任一$y\in W$，在D中都有唯一的x与之对应，则由关系式$y=f(x)$所确定的函数$x=\varphi(y)$称为函数$y=f(x)$的**反函数**.

习惯上，我们总是用x表示自变量，y表示函数，因此$y=f(x)$的反函数$x=\varphi(y)$通常写成$y=\varphi(x)$，而函数$y=f(x)$和$y=\varphi(x)$的图像关于直线$y=x$对称.

二、函数的几种简单性质

1．函数的奇偶性

定义 1.4 设函数$f(x)$的定义域D关于原点对称，如果对于任一$x\in D$，都有

$f(-x)=f(x)$ 成立，则称$f(x)$为**偶函数**.

如果对于任一$x\in D$，都有$f(-x)=-f(x)$成立，则称$f(x)$为**奇函数**.

偶函数的图像关于y轴对称，奇函数图像关于原点对称.

2．函数的单调性

定义 1.5 若函数$f(x)$对区间（a,b）内的任意两点x_1，x_2，当$x_1<x_2$时，都有$f(x_1)<f(x_2)$，则称函数$f(x)$在区间（a,b）内是**单调增加的**，区间（a,b）称为**单调递增区间**；如果对区间（a,b）内的任意两点x_1，x_2，当$x_1<x_2$时，都有$f(x_1)>f(x_2)$，则称函数$f(x)$在区间（a,b）内是**单调减少的**，区间（a,b）称为**单调递减区间**.

3．函数的有界性

定义 1.6 设函数$f(x)$的定义域为D，区间$I\subseteq D$.如果存在正数M，使得对于任一$x\in I$，都有 $|f(x)|\leqslant M$，则称函数$f(x)$在区间I内是**有界的**. 如果这样的正数不存在，就称函数$f(x)$在区间I内是**无界的**.

4．函数的周期性

定义 1.7 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，如果存在一个正数 T，使得对于一切 $x\in D$，有 $x\pm T\in D$，且 $f(x)=f(x+T)$ 都成立，则称 $f(x)$ 为**周期函数**，T 称为函数 $f(x)$ 的**周期.** 通常，周期函数的周期是指**最小正周期.**例如我们以前学过的三角函数就是周期函数.

三、初等函数

1．基本初等函数

以下五类函数统称为基本初等函数:

幂函数：$y=x^{\mu}$（μ 是常数）;

指数函数：$y=a^{x}(a>0,a\neq 1)$；

对数函数：$y=\log_{a}x(a>0,a\neq 1)$，当 $a=\mathrm{e}$，时记为 $y=\ln x$；

三角函数：$y=\sin x,y=\cos x,y=\tan x,y=\cot x,y=\sec x,y=\csc x$；

反三角函数：$y=\arcsin x,y=\arccos x,y=\arctan x,y=\mathrm{arccot}x$.

（基本初等函数的图形见附表 1）

函数 $y=\sin x^{2}$ 不是基本初等函数，它可看成是由两个基本初等函数 $y=\sin u,u=x^{2}$ 构成的，这种函数叫复合函数.

2．复合函数

定义 1.8 设有函数 $y=f(u),u=\varphi(x)$，当 $x\in D$ 时，$u=\varphi(x)$ 的部分或全部 u 落在函数 $y=f(u)$ 的定义域中，此时 y 通过变量 u 建立了与 x 的联系，所以 y 也随着 x 的变化而变化，是 x 的函数，我们称此函数为由函数 $y=f(u),u=\varphi(x)$ 复合而成的函数，简称**复合函数**，记为 $y=f[\varphi(x)]$，其中 u 称为**中间变量**.

例 3 将下列函数 y 表示成 x 的复合函数.

（1）$y=\ln u,u=\cos x$；　　　　（2）$y=\mathrm{e}^{u},u=\sin v,v=x^{2}+1$

解 （1）$y=\ln u=\ln\cos x$，即 $y=\ln\cos x$

（2）$y=\mathrm{e}^{u}=\mathrm{e}^{\sin v}=\mathrm{e}^{\sin(x^{2}+1)}$，即 $y=\mathrm{e}^{\sin(x^{2}+1)}$

例 4 求下列函数的复合过程.

（1）$y=(\arccos\dfrac{1}{x})^{3}$　　　　（2）$y=\mathrm{e}^{\ln x^{2}}$

解 （1）$y=(\arccos\dfrac{1}{x})^{3}$ 是由 $y=u^{3},u=\arccos v,v=\dfrac{1}{x}$ 这三个函数复合而成的.

（2）$y=\mathrm{e}^{\ln x^{2}}$ 是由 $y=\mathrm{e}^{u},u=\ln v,v=x^{2}$ 这三个函数复合而成的.

注意 并非任意两个函数都可以复合成一个函数. 例如，$y=\arcsin u,u=2+x^{2}$ 就不能

复合成一个函数，为什么？思考一下.

3．初等函数

定义 1.9 由基本初等函数和常数经过有限次四则运算或有限次复合而成的，并且可以用一个式子表示的函数，叫做**初等函数**.

例如，函数 $y=\mathrm{e}^{\ln x^2}$， $y=\dfrac{1+x}{2x-3},y=\arcsin x^2+x,y=x\cos x$ 等都是初等函数.

注意 目前我们所接触的函数几乎都是初等函数，例外的只有分段函数，幂指函数，无穷级数.

如分段函数 $y=\begin{cases}x^2 & x\geqslant 0\\ x+1 & x<0\end{cases}$，幂指函数 $x^{\sin x}$ 就不是初等函数.

思 考 题

1．函数 $y=\dfrac{x}{x}$ 和函数 $y=1$ 是相同的函数吗？

2．函数 $y=\cos 2x$ 是基本初等函数？函数 $f(x)=\dfrac{\sin x}{x-1}$ 是否为初等函数?

3．要使函数 $y=\sqrt{\ln(x+1)}$ 有意义，必须满足__________，且其定义域为____________.

4．指出以下函数的复合过程(将其分解为基本初等函数或它们的四则运算构成的函数)：

（1） $y=\arcsin\sqrt{x}$ （2） $y=\lg\left(1+\sqrt{1+x^2}\right)$

5．求 $y=\dfrac{x}{x-1}$ 的反函数.

第二节 函数的极限

极限是微积分最重要的基本概念之一．微积分的许多概念都是用极限表述的，一些重要的性质和运算法则也是通过极限方法推导出来的.

极限与极限的思想

极限的概念与求一些量的精确值有关，它研究的是在自变量的某个变化过程中函数值的一致变化趋势．因此，掌握极限的概念、性质和计算方法是学习好微积分的前提和基础.

1．数列的极限

引例 1 我们观察下面两个数列，当 $n\to\infty$ 时，x_n 的变化趋势

（1） $\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{2}{3}$，$\dfrac{3}{4}$，$\dfrac{4}{5}$，…，$\dfrac{n}{n+1}$，…；

（2） 1，2，4，8，…， 2^n，….

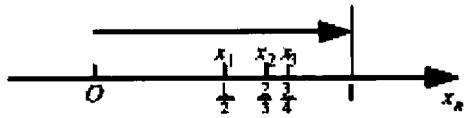

图 1-1

图 1-2

从如图 1-1 所示可看出，对于数列（1）当 $n\to\infty$ 时，x_n 的数值无限接近一个常数1；从如图 1-2 所示可以看出，数列（2）则没有这个性质，当 $n\to\infty$ 时，x_n 的数值却无限增大.

定义 1.10 如果当 $n\to\infty$ 时，数列 $\{x_n\}$ 无限接近于一个确定的常数 A，则称常数 A 是**数列 $\{x_n\}$ 的极限**，或者称数列 $\{x_n\}$ **收敛于** A.

记作 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$ 或 $n\to\infty$，$x_n\to A$

若数列的极限不存在，则称数列**发散**.

例 1 求下列数列的极限.

（1） $x_n=(\frac{1}{3})^n$ （2） $x_n=(-1)^n$

（3） $x_n=2+(-1)^n\frac{1}{n}$ （4） $x_n=2^n$

解 通过观察可以看出，它们的极限分别是：

（1） $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{3})^n=0.$ （2） $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n$ 极限不存在

（3） $\lim\limits_{n\to\infty}[2+(-1)^n\frac{1}{n}]=2.$ （4） $\lim\limits_{n\to\infty}2^n=\infty$ 极限不存在.

一般地，我们可得到下述结论：

（1） $\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0.$ （$|q|<1$） （2） $\lim\limits_{n\to\infty}C=C.$

数列是一种特殊形式的函数，我们把数列极限定义进行推广，可得到函数极限的定义.

2. 函数的极限

引例 2 我们观察下列函数当自变量 x 变化时相应的函数值的变化.

（1）当自变量 $x\to\infty$ 时，函数 $y=\frac{1}{x}$ 的变化趋势；

（2）当 $x\to 2$ 时，函数 $y=x^2$ 的变化趋势.

观察如图 1-3 所示，函数（1）当自变量 $x\to\infty$ 时，它的函数值无限趋近于0；观察如图 1-4 所示，函数（2）当自变量 $x\to 2$ 时，它的函数值无限趋近于4. 对于（1）和（2）这两种情况，我们引入极限的概念.

（1）自变量 $x\to\infty$ 时函数的极限

定义 1.11 设函数 $y=f(x)$，当 $|x|>a$ 时有定义（a 为某个正整数），如果当自变量 x 的