



高等院校“十一五”规划教材  
文化素质教育系列

GAODENG SHUXUE

# 高等数学

主编 ◆ 陈晓敏

哈尔滨工程大学出版社

高等院校“十一五”规划教材

——文化素质教育系列

# 高等数学

主 编 陈晓敏

副主编 闵兰、冯瑛

编 委 冯 瑛 余川祥 闵 兰

陈晓敏 刘 红 许 霞

樊 胜 黄 丹

哈尔滨工程大学出版社

## 内 容 简 介

本书以“重视基础,强化能力,突出应用”为原则,遵照高等院校高等数学的教学规律,做好与高中课程的衔接。针对学生的实际,适当降低起点和难度,进一步淡化理论推导,删繁就简,力求学以致用、学而够用。

本书内容包括函数与极限、导数与微分、中值定理及导数的应用、不定积分、定积分、多元函数微积分、常微分方程、无穷级数共八章

该书紧跟高等院校教材的发展步伐,强调学生实践能力、创造能力的培养,非常适合高等院校公共文化基础课教材,也可以适合相关专业的爱好者自学。

## 图书在版编目(C I P)数据

高等数学 / 陈晓敏主编. — 哈尔滨: 哈尔滨工程大学出版社, 2010.3

ISBN 978 - 7 - 81133 - 701 - 3

I. ①高… II. ①陈… III. ①高等数学—高等学校—教材 IV. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2010) 第 041322 号

---

出版发行 哈尔滨工程大学出版社  
社 址 哈尔滨市南岗区东大直街 124 号  
邮政编码 150001  
发行电话 0451 - 82519328  
传 真 0451 - 82519699  
经 销 新华书店  
印 刷 四川墨池印务有限公司  
开 本 787mm×1092mm 1/16  
印 张 12.75  
字 数 326 千字  
版 次 2010 年 5 月第 1 版  
印 次 2010 年 5 月第 1 次印刷  
定 价 24 80 元  
<http://press.hrbeu.edu.cn>  
E-mail: [heupress@hrbeu.edu.cn](mailto:heupress@hrbeu.edu.cn)

---

# 前言...

近年来,我国经济的持续快速发展为职业教育创造了极为广阔的发展空间,也对技能型人才的培养提出了更高的要求。国务院发布了关于大力发展职业教育的决定,把发展职业教育作为“十一五”期间经济社会发展的重要基础和教育工作的战略重点,并要求根据就业市场和社会需要,深化教育教学改革,改进、更新教学内容和方法,推进精品课程和教材建设。

数学是一门必修的公共基础课,对培养、提高学生的思维素质、创新能力、科学精神以及用数学解决实际问题的能力都有着非常重要的作用。为适应经济社会发展对职业教育提出的新要求,不断提高教材质量,在研究、分析、吸收同类教材的长处和广泛征求同行意见的基础上,我们组织了西南财经大学、四川理工学院、成都电子机械高等专科学校、四川烹饪高等专科学校、四川工程职业技术学院、成都航空职业技术学院、成都铁路工程学校等多所高等院校中具有丰富教学经验、非常熟悉当前教学实际的一线老师,集思广益,编写了本书。该书为高等院校“十一五”规划教材。

本书内容包括函数与极限、导数与微分、中值定理及导数的应用、不定积分、定积分、多元函数微积分、常微分方程、无穷级数共八章。

编者在编写该套教材的过程中,密切结合当前高等院校教学改革的实际,努力编出具有自身特色的高水平的高等院校教材,其特色具体反映在:

1. 严格按照《高等院校教育高等数学课程教学基本要求》,以“重视基础,强化能力,突出应用”为原则,遵照高等院校高等数学的教学规律,做好与高中课程的衔接。针对学生的实际,适当降低起点和难度,进一步淡化理论推导,删繁就简,力求学以致用、学而够用。
2. 特别关注高等数学的思想方法及应用高等数学解决实际问题的能力的训练。所选的例题和习题均以帮助学生理解概念、掌握方法和培养学生应用数学解决实际问题的意识、兴

趣和能力为目的,删掉单纯性的技巧和难度较大的习题,增强富有启发性、应用性、为专业服务的题目。

3.考虑到在学时上,各个学校有差异,不同的专业有差异,故增大了选修的内容,以满足不同学校、不同专业的需求。

4.为配合教学,我们还编写了这本教材的教学参考书,内容包括各章的教学目的、主要内容、基本公式、基本方法,重点和难点,典型例题、习题分析,各章阅读书目等。

我们期望既能培养学生应具有的人文素质,又能为学生后续课程的学习、终身学习和自主发展打好应有的基础。

本教材由陈晓敏总策划,负责组织实施。陈晓敏任主编,闵兰、冯瑛任副主编,参加编写的有陈晓敏(成都电子机械高等专科学校)、闵兰(四川理工大学)、冯瑛(成都电子机械高等专科学校)、刘红(成都航空职业技术学院)、樊胜(西南财经大学)、许霞(四川烹饪高等专科学校)、余川祥(四川工程职业技术学院)、黄丹(成都铁路工程学校)。

在本书的编著过程中,我们参考了所有能找到的有关方面的文献和资料,包括互联网上的一些信息,在此一并表示感谢!由于时间仓促,加上作者水平有限,书中错误在所难免,希望广大师生在使用过程中提出宝贵意见,请将您的建议或意见发送至19630807lql@163.com与我们联系。并恳请全国各地的高等院校教师积极加入该系列规划教材的策划和编写队伍中来,以便我们在今后的工作中不断改进和完善,使这套教材成为高等院校的精品教材。我们网站<http://www.dztf.com>将提供该书的教学参考资料和部分教材的电子教案等教学资料下载。

编 者

2010年5月

# 目 录

|                       |    |
|-----------------------|----|
| 第一章 函数与极限 .....       | 1  |
| 第一节 函 数 .....         | 1  |
| 一、函数的概念 .....         | 1  |
| 二、函数的几种简单性质 .....     | 3  |
| 三、初等函数 .....          | 4  |
| 思考题 .....             | 5  |
| 第二节 函数的极限 .....       | 5  |
| 思考题 .....             | 8  |
| 第三节 函数极限的运算 .....     | 9  |
| 一、极限的四则运算 .....       | 9  |
| 二、两个重要极限 .....        | 10 |
| 思考题 .....             | 12 |
| 第四节 无穷小的比较 .....      | 12 |
| 一、无穷小与无穷大 .....       | 12 |
| 二、无穷小的比较 .....        | 13 |
| 思考题 .....             | 14 |
| 第五节 函数的连续性 .....      | 15 |
| 一、函数的连续与间断 .....      | 15 |
| 二、闭区间上连续函数的性质 .....   | 17 |
| 思考题 .....             | 18 |
| 第六节 数 学 实 验 .....     | 18 |
| 一、MATLAB 认识初步 .....   | 18 |
| 二、数据的可视化初步 (绘图) ..... | 19 |
| 习 题 一 .....           | 21 |
| 自 测 题 一 .....         | 22 |
| 第二章 导数与微分 .....       | 25 |
| 第一节 导数的概念 .....       | 25 |
| 一、引例 .....            | 25 |
| 二、导数的定义 .....         | 26 |
| 三、导数的几何意义 .....       | 28 |

|                               |    |
|-------------------------------|----|
| 四、连续与可导的关系 .....              | 29 |
| 思考题 .....                     | 29 |
| 第二节 导数的计算 .....               | 30 |
| 一、基本初等函数的求导公式 .....           | 30 |
| 二、四则运算的求导法则 .....             | 31 |
| 三、复合函数的求导法则 .....             | 32 |
| 四、初等函数的求导 .....               | 33 |
| 五、高阶导数 .....                  | 34 |
| 思考题 .....                     | 35 |
| 第三节 隐函数与参数方程的求导 .....         | 35 |
| 一、隐函数的导数 .....                | 35 |
| 二、参数方程的导数 .....               | 37 |
| 思考题 .....                     | 38 |
| 第四节 函数的微分 .....               | 38 |
| 一、微分的定义 .....                 | 38 |
| 二、可导与可微的关系 .....              | 39 |
| 三、微分的几何意义 .....               | 40 |
| 四、函数的微分计算 .....               | 41 |
| 思考题 .....                     | 42 |
| 第五节 用 MATLAB 软件求一元函数的导数 ..... | 42 |
| 练习 .....                      | 44 |
| 习题二 .....                     | 44 |
| 自测题二 .....                    | 46 |
| 第三章 导数的应用 .....               | 48 |
| 第一节 洛必达法则 .....               | 48 |
| 思考题 .....                     | 50 |
| 第二节 拉格朗日定理和函数的单调性 .....       | 51 |
| 一、中值定理 .....                  | 51 |
| 二、函数的单调性 .....                | 53 |
| 三、函数的极值与最值 .....              | 55 |
| 思考题 .....                     | 58 |
| 第三节 曲线的凹凸性与拐点 .....           | 58 |
| 一、凹凸性与拐点 .....                | 58 |
| 二、函数图形的描绘 .....               | 59 |
| 思考题 .....                     | 60 |
| 习题三 .....                     | 61 |

|                          |           |
|--------------------------|-----------|
| 自 测 题 三 .....            | 61        |
| <b>第四章 不 定 积 分</b> ..... | <b>64</b> |
| 第一节 不定积分的概念与性质 .....     | 64        |
| 一、原函数的概念、不定积分的定义 .....   | 64        |
| 二、不定积分的性质 .....          | 65        |
| 三、不定积分的基本公式 .....        | 65        |
| 思 考 题 .....              | 67        |
| 第二节 不定积分的换元法 .....       | 67        |
| 一、不定积分的第一换元法 .....       | 67        |
| 二、不定积分的第二换元法 .....       | 70        |
| 思考题: .....               | 72        |
| 第三节 不定积分的分部积分法 .....     | 72        |
| 思 考 题 .....              | 74        |
| 第四节 数 学 实 验 .....        | 74        |
| 练 习 .....                | 75        |
| 习 题 四 .....              | 75        |
| 自 测 题 四 .....            | 76        |
| <b>第五章 定 积 分</b> .....   | <b>78</b> |
| 第一节 定积分的概念 .....         | 78        |
| 一、引例及定积分的概念 .....        | 78        |
| 二、定积分的几何意义 .....         | 81        |
| 三、定积分的性质 .....           | 82        |
| 思 考 题 .....              | 84        |
| 第二节 微积分的基本公式 .....       | 84        |
| 一、积分上限函数 .....           | 84        |
| 二、微积分的基本公式 .....         | 85        |
| 思 考 题 .....              | 87        |
| 第三节 定积分的计算 .....         | 88        |
| 一、换元积分法 .....            | 88        |
| 二、分部积分法 .....            | 90        |
| 思 考 题 .....              | 91        |
| 第四节 定积分的应用 .....         | 91        |
| 一、微元法 .....              | 91        |
| 二、定积分在几何上的应用 .....       | 92        |
| 思 考 题 .....              | 95        |

|                              |           |
|------------------------------|-----------|
| 第五节 数 学 实 验.....             | 95        |
| 练    习.....                  | 96        |
| 习 题 五.....                   | 96        |
| 自 测 题 五.....                 | 97        |
| <b>第六章 多元函数微积分 .....</b>     | <b>99</b> |
| 第一节 空间解析几何基本知识 .....         | 99        |
| 一、空间直角坐标系 .....              | 99        |
| 二、空间向量概念及运算 .....            | 100       |
| 三、平面 .....                   | 103       |
| 四、空间直线 .....                 | 104       |
| 思 考 题.....                   | 105       |
| 第二节 二元函数的极限与连续 .....         | 105       |
| 一、多元函数的概念 .....              | 106       |
| 二、多元函数的极限 .....              | 107       |
| 三、多元函数的连续性 .....             | 108       |
| 思 考 题.....                   | 108       |
| 第三节 偏导数与全微分 .....            | 108       |
| 一、偏导数的定义 .....               | 109       |
| 二、高阶偏导数 .....                | 110       |
| 三、多元复合函数求导法则 .....           | 111       |
| 四、全微分 .....                  | 113       |
| 思 考 题.....                   | 114       |
| 第四节 偏导数的应用 .....             | 115       |
| 一、偏导数在几何上应用举例 .....          | 115       |
| 二、二元函数的极值 .....              | 117       |
| 三、多元函数的最值 .....              | 118       |
| 思 考 题.....                   | 120       |
| 第五节 二重积分的计算 .....            | 121       |
| 一、二重积分的概念 .....              | 121       |
| 二、二重积分的性质 .....              | 123       |
| 三、二重积分的计算 .....              | 124       |
| 思 考 题.....                   | 127       |
| 第六节 数学实验 .....               | 127       |
| 一、MATLAB 在空间解析几何中应用 .....    | 127       |
| 二、MATLAB 在求多元函数微分学中的应用 ..... | 128       |
| 三、MATLAB 在求多元函数积分学中的应用 ..... | 130       |

|                           |            |
|---------------------------|------------|
| 练    习 .....              | 131        |
| 习  题  六 .....             | 131        |
| 自  测  题  六 .....          | 132        |
| <b>第七章  常微分方程</b> .....   | <b>135</b> |
| 第一节  微分方程的概念 .....        | 135        |
| 一、微分方程的概念 .....           | 135        |
| 二、可分离变量的微分方程 .....        | 136        |
| 思  考  题 .....             | 137        |
| 第二节  一阶线性微分方程 .....       | 138        |
| 一、一阶线性微分方程的概念 .....       | 138        |
| 二、一阶线性微分方程的求解方法 .....     | 138        |
| 思  考  题 .....             | 141        |
| 第三节  二阶常系数线性微分方程 .....    | 141        |
| 一、二阶线性微分方程解的结构 .....      | 141        |
| 二、二阶线性非齐次微分方程解的结构 .....   | 143        |
| 三、二阶常系数非齐次线性微分方程的求解 ..... | 144        |
| 思  考  题 .....             | 149        |
| 第四节  数学实验 .....           | 149        |
| 练    习 .....              | 150        |
| 习  题  七 .....             | 150        |
| 自  测  题  七 .....          | 151        |
| <b>第八章  无穷级数</b> .....    | <b>152</b> |
| 第一节  无穷级数的概念与性质 .....     | 152        |
| 一、无穷级数的概念 .....           | 152        |
| 二、无穷级数的基本性质 .....         | 154        |
| 思  考  题 .....             | 155        |
| 第二节  常数项级数的审敛法 .....      | 156        |
| 一、正项级数及其审敛法 .....         | 156        |
| 二、交错级数及其审敛法 .....         | 158        |
| 三、绝对收敛与条件收敛 .....         | 159        |
| 思  考  题 .....             | 159        |
| 第三节  幂级数 .....            | 160        |
| 一、函数项级数的概念 .....          | 160        |
| 二、幂级数及其收敛性 .....          | 161        |
| 三、幂级数的性质 .....            | 163        |

|                           |     |
|---------------------------|-----|
| 思考题 .....                 | 164 |
| 第四节 函数展开成幂级数 .....        | 165 |
| 一、泰勒级数 .....              | 165 |
| 二、函数的幂级数展开 .....          | 165 |
| 思考题 .....                 | 168 |
| 第五节 傅立叶级数 .....           | 168 |
| 一、傅立叶级数 .....             | 168 |
| 思考题 .....                 | 172 |
| 第六节 数学实验 .....            | 172 |
| 一、函数的展开与求和 .....          | 172 |
| 二、周期函数展开成傅立叶级数 .....      | 173 |
| 练习 .....                  | 174 |
| 习题八 .....                 | 175 |
| 自测题八 .....                | 176 |
| 答 案 .....                 | 179 |
| 附录一 基本初等函数的图形及其主要性质 ..... | 190 |
| 附录二 一些常用的中学数学公式 .....     | 192 |
| 参考文献 .....                | 194 |

# 第一章 函数与极限

函数是一个在实际生活、工程实践中有着广泛用途的概念，也是微积分研究的对象；极限是学习微积分的重要理论基础，微积分是研究函数各种特性的一门学科，只有对函数的概念、图像及性质有了全面深入的了解和认识，才能学好微积分。本章将在已学函数的基础上，着重讨论函数的极限，并介绍函数的连续性。

## 第一节 函 数

现实世界中存在着各种各样不停变化的量，它们之间相互依赖、相互联系。这种几个变量之间的相互联系或相互影响的关系，揭示了客观世界中事物变化的内在规律，这种规律用数学进行描述，就是我们说的函数关系。

函数的概念在 17 世纪之前一直与公式紧密关联，到了 18 世纪，德国数学家狄里克雷抽象出了至今仍为人们易于接受且合理的函数概念。



[狄利克雷 (1805~1859) Dirichlet, Peter Gustav Lejeune]

德国数学家。对数论、数学分析和数学物理有突出贡献，是解析数论的创始人之一。1805 年 2 月 13 日生于迪伦，1859 年 5 月 5 日卒于格丁根。中学时曾受教于物理学家 G.S.欧姆；1822~1826 年在巴黎求学，深受 J.-B.-J. 傅里叶的影响。回国后先后在布雷斯劳大学、柏林军事学院和柏林大学任教 27 年，对德国数学发展产生巨大影响。]

### 一、函数的概念

#### 1. 数集的几种表示

- (1) 区间： $(a,b)$ ， $(a,b]$ ， $[a,b]$ ， $(-\infty,+\infty)$ ， $\cdots$
- (2) 不等式： $-2 < x \leq 5$ ； $x > 3$   $\cdots$
- (3) 集合： $\{x|1 < x < 6\}$ ； $x \in R$   $\cdots$
- (4) 数轴；

(5) 邻域.

**定义 1.1** 设  $a \in \mathbb{R}$ ,  $\delta > 0$ , 数集  $\{x | x \in |x - a| < \delta\}$  称为以  $a$  为中心,  $\delta$  为半径的邻域, 记作  $U(a, \delta)$ .

邻域的几何表示即指实数轴上和点  $x = a$  的距离小于半径  $\delta$  的点的全体.

$a$  与  $\delta$  分别称作邻域的中心与半径.

易知: 以  $a$  为中心,  $\delta$  为半径的邻域包含中心  $a$ , 所以又称实心邻域. 且有

$$U(a, \delta) = (a - \delta, a + \delta)$$

空心邻域  $\hat{U}(a, \delta) = (a - \delta, a) \cup (a, a + \delta)$

## 2. 函数的定义及表示

**定义 1.2** 设  $x, y$  是两个变量,  $D$  是一个给定的实数集, 如果对于  $D$  内的每一个数  $x$ , 按照某个对应法则  $f$ , 变量  $y$  都有唯一确定的数值和它对应, 则称  $y$  是  $x$  的函数, 记作  $y = f(x)$ . 式中  $x$  称为自变量,  $y$  称为因变量, 数集  $D$  称为函数的定义域, 当  $x$  取遍  $D$  中的一切实数时, 与它对应的函数值的集合  $M$  称为函数  $y = f(x)$  的值域.

**函数的表示法:** 函数通常有公式法、表格法和图像法三种表示法.

**公式法:** 也称解析法, 它是用数学式子表示函数, 其优点是便于理论推导和计算.

用解析法表示的函数其定义域为使该解析式有意义的  $x$  的全体.

**表格法:** 用表格形式表示函数, 优点是所求函数值容易查得, 如对数表等.

**图像法:** 用图形表示函数, 优点是直观形象, 可看到函数变化趋势, 在工程技术上应用较普遍.

函数的定义域和对应关系称为函数的两个要素.

在实际问题中, 函数的定义域根据问题的实际意义确定.

**例 1** 求函数  $y = \frac{1}{1-x^2} + \sqrt{x+2}$  的定义域.

**解** 要使函数有意义, 应满足 
$$\begin{cases} 1-x^2 \neq 0 \\ x+2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq \pm 1 \\ x \geq -2 \end{cases}$$

所以, 函数的定义域为  $[-2, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$ .

一般地, 对一个解析式函数而言, 其定义域的求解一般有以下几种常见情形:

①分式分母不为零;

②偶次根号下大于等于零;

③对数的真数大于零;

④三角函数的定义域;

⑤前几种情况的混合型，求“交”；

⑥分段函数为满足各个表达式意义的“并”。

**例 2** 某圆柱形容器的容积为  $V$ ，试将它的表面积表示成底半径的函数，并确定该函数的定义域。

**解** 设圆柱的底半径为  $r$ ，高为  $h$ ，表面积为  $S$ 。

因为  $V = \pi r^2 h$ ，得  $h = \frac{V}{\pi r^2}$ ，根据圆柱表面积公式有  $S = 2\pi r^2 + 2\pi r h$ ，所以

$$S = 2\pi r^2 + \frac{2V}{r} \text{. 其定义域为 } r \in (0, +\infty) \text{.}$$

### 3. 反函数

**定义 1.3** 给定函数  $y = f(x), x \in D$ （定义域）， $y \in W$ （值域）。如果把  $y$  作为自变量， $x$  作为函数，对于任一  $y \in W$ ，在  $D$  中都有唯一的  $x$  与之对应，则由关系式  $y = f(x)$  所确定的函数  $x = \varphi(y)$  称为函数  $y = f(x)$  的反函数。

习惯上，我们总是用  $x$  表示自变量， $y$  表示函数，因此  $y = f(x)$  的反函数  $x = \varphi(y)$  通常写成  $y = \varphi(x)$ ，而函数  $y = f(x)$  和  $y = \varphi(x)$  的图像关于直线  $y = x$  对称。

## 二、函数的几种简单性质

### 1. 函数的奇偶性

**定义 1.4** 设函数  $f(x)$  的定义域  $D$  关于原点对称，如果对于任一  $x \in D$ ，都有

$$f(-x) = f(x) \text{ 成立，则称 } f(x) \text{ 为偶函数。}$$

如果对于任一  $x \in D$ ，都有  $f(-x) = -f(x)$  成立，则称  $f(x)$  为奇函数。

偶函数的图像关于  $y$  轴对称，奇函数图像关于原点对称。

### 2. 函数的单调性

**定义 1.5** 若函数  $f(x)$  对区间  $(a, b)$  内的任意两点  $x_1, x_2$ ，当  $x_1 < x_2$  时，都有  $f(x_1) < f(x_2)$ ，则称函数  $f(x)$  在区间  $(a, b)$  内是单调增加的，区间  $(a, b)$  称为单调递增区间；如果对区间  $(a, b)$  内的任意两点  $x_1, x_2$ ，当  $x_1 < x_2$  时，都有  $f(x_1) > f(x_2)$ ，则称函数  $f(x)$  在区间  $(a, b)$  内是单调减少的，区间  $(a, b)$  称为单调递减区间。

### 3. 函数的有界性

**定义 1.6** 设函数  $f(x)$  的定义域为  $D$ ，区间  $I \subseteq D$ 。如果存在正数  $M$ ，使得对于任一  $x \in I$ ，都有  $|f(x)| \leq M$ ，则称函数  $f(x)$  在区间  $I$  内是有界的。如果这样的正数不存在，就称函数  $f(x)$  在区间  $I$  内是无界的。

#### 4. 函数的周期性

**定义 1.7** 设函数  $f(x)$  的定义域为  $D$ , 如果存在一个正数  $T$ , 使得对于一切  $x \in D$ , 有  $x \pm T \in D$ , 且  $f(x) = f(x+T)$  都成立, 则称  $f(x)$  为周期函数,  $T$  称为函数  $f(x)$  的周期. 通常, 周期函数的周期是指最小正周期. 例如我们以前学过的三角函数就是周期函数.

### 三、初等函数

#### 1. 基本初等函数

以下五类函数统称为基本初等函数:

幂函数:  $y = x^\mu$  ( $\mu$  是常数);

指数函数:  $y = a^x (a > 0, a \neq 1)$ ;

对数函数:  $y = \log_a x (a > 0, a \neq 1)$ , 当  $a = e$ , 时记为  $y = \ln x$ ;

三角函数:  $y = \sin x, y = \cos x, y = \tan x, y = \cot x, y = \sec x, y = \csc x$ ;

反三角函数:  $y = \arcsin x, y = \arccos x, y = \arctan x, y = \operatorname{arccot} x$ .

(基本初等函数的图形见附表 1)

函数  $y = \sin x^2$  不是基本初等函数, 它可看成是由两个基本初等函数  $y = \sin u, u = x^2$  构成的, 这种函数叫复合函数.

#### 2. 复合函数

**定义 1.8** 设有函数  $y = f(u), u = \varphi(x)$ , 当  $x \in D$  时,  $u = \varphi(x)$  的部分或全部  $u$  落在函数  $y = f(u)$  的定义域中, 此时  $y$  通过变量  $u$  建立了与  $x$  的联系, 所以  $y$  也随着  $x$  的变化而变化, 是  $x$  的函数, 我们称此函数为由函数  $y = f(u), u = \varphi(x)$  复合而成的函数, 简称复合函数, 记为  $y = f[\varphi(x)]$ , 其中  $u$  称为中间变量.

**例 3** 将下列函数  $y$  表示成  $x$  的复合函数.

$$(1) y = \ln u, u = \cos x; \quad (2) y = e^u, u = \sin v, v = x^2 + 1$$

**解** (1)  $y = \ln u = \ln \cos x$ , 即  $y = \ln \cos x$

$$(2) y = e^u = e^{\sin v} = e^{\sin(x^2+1)}, \text{ 即 } y = e^{\sin(x^2+1)}$$

**例 4** 求下列函数的复合过程.

$$(1) y = \left(\arccos \frac{1}{x}\right)^3 \quad (2) y = e^{\ln x^2}$$

**解** (1)  $y = \left(\arccos \frac{1}{x}\right)^3$  是由  $y = u^3, u = \arccos v, v = \frac{1}{x}$  这三个函数复合而成的.

(2)  $y = e^{\ln x^2}$  是由  $y = e^u, u = \ln v, v = x^2$  这三个函数复合而成的.

**注意** 并非任意两个函数都可以复合成一个函数. 例如,  $y = \arcsin u, u = 2 + x^2$  就不能

复合成一个函数，为什么？思考一下。

### 3. 初等函数

**定义 1.9** 由基本初等函数和常数经过有限次四则运算或有限次复合而成的，并且可以用一个式子表示的函数，叫做初等函数。

例如，函数  $y = e^{\ln x^2}$ ， $y = \frac{1+x}{2x-3}$ ， $y = \arcsin x^2 + x$ ， $y = x \cos x$  等都是初等函数。

**注意** 目前我们所接触的函数几乎都是初等函数，例外的只有分段函数，幂指函数，无穷级数。

如分段函数  $y = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ x+1 & x < 0 \end{cases}$ ，幂指函数  $x^{\sin x}$  就不是初等函数。

### 思考题

1. 函数  $y = \frac{x}{x}$  和函数  $y = 1$  是相同的函数吗？
2. 函数  $y = \cos 2x$  是基本初等函数？函数  $f(x) = \frac{\sin x}{x-1}$  是否为初等函数？
3. 要使函数  $y = \sqrt{\ln(x+1)}$  有意义，必须满足\_\_\_\_\_，且其定义域为\_\_\_\_\_。
4. 指出以下函数的复合过程(将其分解为基本初等函数或它们的四则运算构成的函数)：

(1)  $y = \arcsin \sqrt{x}$

(2)  $y = \lg(1 + \sqrt{1+x^2})$

5. 求  $y = \frac{x}{x-1}$  的反函数。

## 第二节 函数的极限

极限是微积分最重要的基本概念之一。微积分的许多概念都是用极限表述的，一些重要的性质和运算法则也是通过极限方法推导出来的。

### 极限与极限的思想

极限的概念与求一些量的精确值有关，它研究的是在自变量的某个变化过程中函数值的一致变化趋势。因此，掌握极限的概念、性质和计算方法是学习好微积分的前提和基础。

### 1. 数列的极限

**引例 1** 我们观察下面两个数列，当  $n \rightarrow \infty$  时， $x_n$  的变化趋势

(1)  $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots, \frac{n}{n+1}, \dots;$

(2)  $1, 2, 4, 8, \dots, 2^n, \dots$

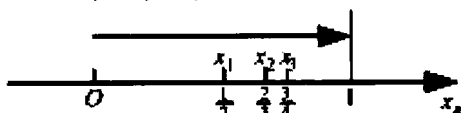


图 1-1

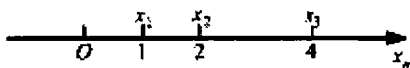


图 1-2

从如图 1-1 所示可看出, 对于数列 (1) 当  $n \rightarrow \infty$  时,  $x_n$  的数值无限接近一个常数 1; 从如图 1-2 所示可以看出, 数列 (2) 则没有这个性质, 当  $n \rightarrow \infty$  时,  $x_n$  的数值却无限增大.

**定义 1.10** 如果当  $n \rightarrow \infty$  时, 数列  $\{x_n\}$  无限接近于一个确定的常数  $A$ , 则称常数  $A$  是数列  $\{x_n\}$  的极限, 或者称数列  $\{x_n\}$  收敛于  $A$ .

记作  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$  或  $n \rightarrow \infty, x_n \rightarrow A$

若数列的极限不存在, 则称数列发散.

**例 1** 求下列数列的极限.

(1)  $x_n = (\frac{1}{3})^n$

(2)  $x_n = (-1)^n$

(3)  $x_n = 2 + (-1)^n \frac{1}{n}$

(4)  $x_n = 2^n$

**解** 通过观察可以看出, 它们的极限分别是:

(1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{1}{3})^n = 0$ .

(2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n$  极限不存在

(3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} [2 + (-1)^n \frac{1}{n}] = 2$ .

(4)  $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n = \infty$  极限不存在.

一般地, 我们可得到下述结论:

(1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$ .

( $|q| < 1$ )

(2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} C = C$ .

数列是一种特殊形式的函数, 我们把数列极限定义进行推广, 可得到函数极限的定义.

## 2. 函数的极限

**引例 2** 我们观察下列函数当自变量  $x$  变化时相应的函数值的变化.

(1) 当自变量  $x \rightarrow \infty$  时, 函数  $y = \frac{1}{x}$  的变化趋势;

(2) 当  $x \rightarrow 2$  时, 函数  $y = x^2$  的变化趋势.

观察如图 1-3 所示, 函数 (1) 当自变量  $x \rightarrow \infty$  时, 它的函数值无限趋近于 0; 观察如图 1-4 所示, 函数 (2) 当自变量  $x \rightarrow 2$  时, 它的函数值无限趋近于 4. 对于 (1) 和 (2) 这两种情况, 我们引入极限的概念.

(1) 自变量  $x \rightarrow \infty$  时函数的极限

**定义 1.11** 设函数  $y = f(x)$ , 当  $|x| > a$  时有定义 ( $a$  为某个正整数), 如果当自变量  $x$  的