高 等 学 校 教 材

线性代数

钱国华 唐锋 编

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

高等学校教材

线性代数

Xianxing Daishu

钱国华　唐　锋　编

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS　BEIJING

内容提要

本书内容包括矩阵、线性方程组、相似矩阵与二次型三章，力求用简短的篇幅介绍线性代数最基本的概念、性质、方法及应用，每一章都配有一定量的习题。教学时数约 30～48 学时，其中打 * 的部分为选学内容，约占 18 学时。

本书可作为新建本科院校的理科（非数学类专业）、工科和经管类专业学生的教材或教学参考用书。

图书在版编目（CIP）数据

线性代数/钱国华，唐锋编. --北京：高等教育出版社，2012.7

ISBN 978-7-04-035732-5

Ⅰ.①线… Ⅱ.①钱… ②唐… Ⅲ.①线性代数-高等学校-教材 Ⅳ.①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2012）第 145598 号

策划编辑 李 蕊　　责任编辑 李 蕊　　封面设计 于文燕　　版式设计 余 杨
责任校对 胡美萍　　责任印制 张福涛

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400-810-0598
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	网　　址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印　　刷	北京京科印刷有限公司印刷	网上订购	http://www.landraco.com
开　　本	787mm×960mm　1/16		http://www.landraco.com.cn
印　　张	7.5	版　　次	2012年 7 月第 1 版
字　　数	130 千字	印　　次	2012年 7 月第 1 次印刷
购书热线	010-58581118	定　　价	11.80 元

物 料 号　35732-00

前　　言

线性代数是高等学校理工、经管等专业大学生的一门必修的基础课程。目前我国高等教育已经进入大众化阶段，为适应一般本科院校特别是新建本科院校培养应用型人才的需要，结合教育部数学与统计学教学指导委员会制定的工科类和经管类本科数学基础课程教学基本要求，我们编写了本书。

本书力求用简短的篇幅介绍线性代数的基本概念、性质、方法及应用，避免过多的理论推导，但也不失课程自身的系统性和科学性。例如，本书利用归纳法定义行列式，由此给出了行列式全部性质的较完整证明；另外，本书从线性方程组的角度介绍向量组的线性相关性，有利于学生对这部分内容的理解。本书还介绍了线性代数的一些实际应用，以利于学生增强解决实际问题的能力。

本书共有矩阵、线性方程组、相似矩阵与二次型三章，第一章主要介绍矩阵的基本概念和性质，第二章主要讨论线性方程组的求解和向量组的线性相关性，第三章主要介绍相似矩阵及二次型的基本内容，其中打 * 的部分为选学内容。每章后都配有一定量的习题，部分习题有一定难度，可适应不同层次学生的要求。

考虑到新建本科院校的实际情况和对本课程的学时限制，本书中对线性代数与几何内容的联系涉及很少，部分内容没有充分展开，也没有介绍利用数学软件解决线性代数的实际问题。这些是我们的遗憾之处。

本书在编写过程中得到校内许多同事的帮助和支持，审稿人提出了很多宝贵意见，本书的出版也得到了高等教育出版社编辑的大力支持，在此一并表示衷心的感谢！

由于编者水平有限，书中错误和遗漏之处在所难免，恳请读者批评和指正。

编　者

2012 年 2 月

目　　录

第一章 矩 阵

§1.1 矩阵的定义与运算

矩阵是线性代数最基本的概念之一，它在自然科学、社会科学、工程技术与生产实践中都有广泛的应用.

一、矩阵定义

定义 1.1.1 由 $m \times n$ 个数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m, j=1,2,\cdots,n)$ 排成的 m 行 n 列的数表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

称为 $m \times n$ **矩阵**.

矩阵总是加括号，表示它是一个整体. 一般用大写英文字母表示矩阵，令 $\boldsymbol{A}$ 表示上述矩阵，$\boldsymbol{A}$ 共有 m 行、n 列，$\boldsymbol{A}$ 中 $m \times n$ 个数字称为**元素**，特别地，数字 a_{ij} 位于矩阵的第 i 行第 j 列，称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 **(i,j)-元素**，简称 (i,j)-元. 上面的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 还可以表示为

$$(a_{ij})_{m\times n} \text{ 或 } \boldsymbol{A}_{m\times n}.$$

下面我们来认识一些比较特殊的矩阵.

根据矩阵中元素的属性，我们把元素都是实数的矩阵称为**实矩阵**，同样可定义复矩阵、有理矩阵等. 本书中除特别说明外所有矩阵都是指实矩阵.

行数与列数相同的矩阵称为**方阵**，$n \times n$ 矩阵称为 n **阶方阵**，特别地，1 阶方阵即为一个数.

只有一行的矩阵称为**行矩阵**或**行向量**，只有一列的矩阵称为**列矩阵**或**列向量**.

元素都是零的矩阵称为**零矩阵**，符号 $\boldsymbol{O}_{m\times n}$ 表示 $m \times n$ 零矩阵，简记为 $\boldsymbol{O}$.

我们来看下面的 5 个 n 阶方阵

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix},$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

$$A_5 = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

$\boldsymbol{A}_1$ 中元素 $a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}$ 称为**主对角元**; 主对角元所在的直线称为**主对角线**;

$\boldsymbol{A}_2$ 中主对角线外的元素都是零, 称 $\boldsymbol{A}_2$ 为**对角矩阵**, 简记为 $\mathrm{diag}(a_1, a_2, \cdots, a_n)$;

$\boldsymbol{A}_3$ 中主对角线元素全是 1, 而其余元素全为 0, 称 $\boldsymbol{A}_3$ 为 n 阶**单位矩阵**, 记为 $\boldsymbol{E}_n$, 简记为 $\boldsymbol{E}$;

$\boldsymbol{A}_4$ 中主对角线下方的元素全为 0, 称 $\boldsymbol{A}_4$ 为**上三角形矩阵**. 类似地, 称 $\boldsymbol{A}_5$ 为**下三角形矩阵**.

若两个矩阵有相同的行数与相同的列数, 则称它们是**同型矩阵**.

若矩阵 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 同型且相同位置上的元素也相同, 则称 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ **相等**, 记为 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$. 应该看到, 两个不同型的零矩阵是不相等的 (尽管它们可以都记为 $\boldsymbol{O}$). 类似地, 两个阶数不同的单位矩阵是不同的矩阵. 矩阵的行数与列数是非常重要的算术量, 初学者在书写矩阵时应尽量标明.

在本节的余下部分, 我们来考察矩阵的运算. 主要包括矩阵的加法、数与矩阵相乘、矩阵与矩阵的乘法以及矩阵的转置等.

二、矩阵的线性运算

定义 1.1.2 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}, \boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$ 是两个同型矩阵, 称 (i,j)-元等于 $a_{ij}+b_{ij}$ 的 $m\times n$ 矩阵为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的和, 记为 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$.

由定义看到, 两个矩阵可加的前提是它们同型, 而两个同型矩阵的加法就是对应元素相加而得到的与原来两个矩阵同型的矩阵. 我们把矩阵 $(-a_{ij})_{m\times n}$ 称为矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 的**负矩阵**, 记为 $-\boldsymbol{A}$. 利用负矩阵我们可以定义两个同型矩阵的**减法**: $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{B})$.

关于矩阵加法, 易见有下面的性质 (其中 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\boldsymbol{O}$ 是同型矩阵):

(1) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$;

(2) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$;

(3) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{O}=\boldsymbol{A}$;

(4) $\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O}$;

(5) 若 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{C}$, 则 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$.

定义 1.1.3 设矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$, k 是一个数, 称 (i,j)-元等于 ka_{ij} 的 $m\times n$ 矩阵 $(ka_{ij})_{m\times n}$ 为数 k 与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的**数量乘积**, 简称为**数乘**, 记为 $k\boldsymbol{A}$.

由定义, 我们看到任何数与任何矩阵都可以作数乘, 特别地, 数与 1 阶方阵的数乘就是通常的数的乘法.

设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{O}$ 是同型矩阵, k,s 是任意数, 则

(1) $(k+s)\boldsymbol{A}=k\boldsymbol{A}+s\boldsymbol{A}$;

(2) $k(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=k\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{B}$;

(3) $k(s\boldsymbol{A})=(ks)\boldsymbol{A}$;

(4) $1\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$, $(-1)\boldsymbol{A}=-\boldsymbol{A}$;

(5) $0\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$, 这里前一个 0 是数字零, 后一个 $\boldsymbol{O}$ 是矩阵 $\boldsymbol{O}$.

矩阵的加法与数乘运算统称为矩阵的**线性运算**, 其性质与数的加法、乘法类似.

三、矩阵乘法

我们先定义一个行向量 (行矩阵) 与一个列向量 (列矩阵) 的乘法. 设

$$\boldsymbol{\alpha}=(x_1,\cdots,x_n),\ \boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},$$

$x_i, y_j(i,j=1,2,\cdots,n)$ 分别称为 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ 的第 i 和第 j 个分量. 注意这里要求 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的分量个数相同, 我们定义 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的乘法为

$$\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta} = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n = \sum_{k=1}^{n} x_ky_k,$$

即 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的对应元素乘积之和.

定义 1.1.4 设 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{m\times s}$, $\boldsymbol{B} = (b_{ij})_{s\times n}$, 则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的乘积定义为 $\boldsymbol{AB} = (c_{ij})_{m\times n}$, 其中

$$\begin{aligned} c_{ij} &= \boldsymbol{A}\text{的第}i\text{行与}\boldsymbol{B}\text{的第}j\text{列的乘积} \\ &= a_{i1}b_{1j} + \cdots + a_{is}b_{sj} \\ &= \sum_{k=1}^{s} a_{ik}b_{kj}. \end{aligned}$$

由定义, 我们看到 $\boldsymbol{A}$ 乘 $\boldsymbol{B}$ 有定义当且仅当 $\boldsymbol{A}$ 的列数等于 $\boldsymbol{B}$ 的行数, 并且 $\boldsymbol{A}_{m\times s}\boldsymbol{B}_{s\times n}$ 是一个 $m\times n$ 矩阵. 对于矩阵乘积 $\boldsymbol{AB}$, 我们说 $\boldsymbol{A}$ 左乘在 $\boldsymbol{B}$ 上, 也可以说 $\boldsymbol{B}$ 右乘在 $\boldsymbol{A}$ 上.

例 1.1.5 某公司向四家超市派送三种商品的数量 (以件为单位) 可以用矩阵表示为

$$\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{4\times 3} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 4 \\ 3 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

其中 a_{ij} 表示公司向第 i 家超市派送第 j 种商品的件数. 而这三种商品的单价 (以元为单位) 及单件质量 (以千克为单位) 构成的矩阵为

$$\boldsymbol{B} = (b_{ij})_{3\times 2} = \begin{pmatrix} 300 & 10 \\ 200 & 20 \\ 500 & 60 \end{pmatrix},$$

其中 b_{i1}, b_{i2} 分别表示第 i 种商品的单件价格和质量. 求该公司向各家超市派送商品的总价和总质量.

解 显然公司向第 i 家超市派送商品的总价和总质量依次为

$$c_{i1} = a_{i1}b_{11} + a_{i2}b_{21} + a_{i3}b_{31},\ c_{i2} = a_{i1}b_{12} + a_{i2}b_{22} + a_{i3}b_{32},$$

因为

$$AB=\begin{pmatrix}2&1&4\\1&4&4\\3&1&3\\3&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}300&10\\200&20\\500&60\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2800&280\\3100&330\\2600&230\\1400&90\end{pmatrix},$$

所以公司向第 1, 第 2, 第 3, 第 4 家超市派送商品的总价和总质量依次为 2800, 280; 3100, 330; 2600, 230; 1400, 90. □

例 1.1.6 设矩阵 A, B 给定如下, 分别计算 AB 与 BA:

(1) $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$;

(2) $A=(1,-1,0)$, $B=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$;

(3) $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}$.

解 (1) 由定义得 $AB=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$, 而 BA 无意义.

(2) $AB=(-1)=-1$, 注意 1 阶方阵即是一个数; 而 $BA=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&-1&0\\-1&1&0\end{pmatrix}$.

(3) $AB=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$, $BA=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$. □

由上面的例子我们看到, AB 有意义和 BA 有意义是两回事; 即使 AB 与 BA 都有意义, AB 与 BA 也不一定同型; 即使 AB 与 BA 都是有意义的同型矩阵, 它们也不一定相等. 这些都说明矩阵乘法没有交换律. 在上面的例子 (3) 中, 我们有 $AB=O_{2\times 2}$, 且 $A\neq O$, $B\neq O$, 这说明矩阵乘法也没有消去律. 初学者要特别注意**矩阵乘法没有交换律和消去律**.

虽然矩阵乘法与数的乘法有上述两点差异, 但它们还是有一些相似之处. 可以证明以下事实 (假设运算都有意义):

(1) (结合律) $(AB)C=A(BC)$;

(2) (分配律) $A(B+C)=AB+AC$, $(B+C)A=BA+CA$;

(3) $k(\boldsymbol{AB}) = (k\boldsymbol{A})\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}(k\boldsymbol{B})$, 其中 k 是数;

(4) $(k\boldsymbol{E}_m)\ \boldsymbol{A}_{m\times n} = \boldsymbol{A}_{m\times n}\ (k\boldsymbol{E}_n) = k\boldsymbol{A}_{m\times n}$, 其中 k 是数, $k\boldsymbol{E}_n = \mathrm{diag}\underbrace{(k, k, \cdots, k)}_{n\text{个}k}$ 称为 n 阶纯量矩阵或数量矩阵.

由上面性质 (4) 可以看到, 单位矩阵在矩阵乘法中的作用类似于数 1 在数的乘法中的作用.

例 1.1.7 (**坐标变换**) *设平面上一点 P 的坐标为 (x_1, x_2), 现将点 P 绕原点 O 逆时针旋转 θ 角得到点 P', 然后将点 P' 在水平方向向右平移 a_1 个单位, 再在竖直方向向上平移 a_2 个单位得到点 P'', 试用点 P 的坐标分量 x_1, x_2 表示点 P'' 的坐标.*

解 设点 P' 和点 P'' 的坐标分别为点 (y_1, y_2), (z_1, z_2), 利用复数的性质得到

$$(y_1 + \mathrm{i}y_2) = (x_1 + \mathrm{i}x_2)(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta),$$

其中 i 为虚数单位, 于是

$$y_1 = x_1\cos\theta - x_2\sin\theta,\ \ y_2 = x_1\sin\theta + x_2\cos\theta.$$

又 $z_1 = y_1 + a_1$, $z_2 = y_2 + a_2$, 所以

$$z_1 = x_1\cos\theta - x_2\sin\theta + a_1,\ \ z_2 = x_1\sin\theta + x_2\cos\theta + a_2.$$

上述结果我们用矩阵形式表示更直观. 令

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{Z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix},$$

则

$$\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{Y} + \boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{AX} + \boldsymbol{\alpha}.$$

即

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}.$$ □

事实上, 上例中的坐标变换是由旋转变换和平移变换合成得到的.

类似于数的幂和未定元的多项式, 我们也可以定义方阵的**幂**和**多项式**. 设 A 是一个 n 阶方阵, k 是一个正整数, 则 A^k 定义为 k 个 A 相乘, A^0 定义为与 A 同型的单位矩阵 (请读者思考, 为什么只有方阵才能定义其幂?). 显然对任意非负整数 s,t, 我们有

$$A^sA^t = A^{s+t},\ (A^s)^t = A^{st}.$$

若 m 次多项式 $f(x) = a_mx^m + \cdots + a_1x + a_0$, 则 $f(A)$ 定义为

$$f(A) = \sum_{i=0}^{m} a_iA^i = a_mA^m + \cdots + a_1A + a_0E,$$

称 $f(A)$ 为方阵 A 的**多项式**.

例 1.1.8 设 $A = (1,\ 1,\ -1)$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $f(x) = x^4 - x^2 + x + 1$, 求 $(BA)^n$ 及 $f(BA)$.

解 易得 $AB = (2) = 2$, $BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, 于是

$$\begin{aligned}
(BA)^n &= \underbrace{(BA)(BA)\cdots(BA)}_{n\text{个}BA} = B\underbrace{(AB)(AB)\cdots(AB)}_{n-1\text{个}AB}A \\
&= B(AB)^{n-1}A \\
&= B2^{n-1}A = 2^{n-1}BA = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1} & -2^{n-1} \\ 2^n & 2^n & -2^n \\ 2^{n-1} & 2^{n-1} & -2^{n-1} \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f(BA) &= (BA)^4 - (BA)^2 + (BA) + E \\
&= 2^3BA - 2BA + BA + E \\
&= 7BA + E = \begin{pmatrix} 8 & 7 & -7 \\ 14 & 15 & -14 \\ 7 & 7 & -6 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

□

四、矩阵的转置

定义 1.1.9 将矩阵 $A_{m\times n}$ 的第 1 行, 第 2 行, $\cdots$, 第 m 行依次改成第 1 列, 第 2 列, $\cdots$, 第 m 列后得到的 $n\times m$ 矩阵称为 A 的**转置矩阵**, 记为 A^{T}.

例如, $(3)^{\mathrm{T}} = (3)$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

不难证明矩阵转置有下述性质 (其中的运算都有意义):

(1) $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$;

(2) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$;

(3) $(k\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}=k\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$;

(4) $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{C})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.

下面仅验证 (4) 式. 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times s}$, $\boldsymbol{C}=(c_{ij})_{s\times n}$, 于是 $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{C})^{\mathrm{T}}$ 与 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 都是 $n\times m$ 矩阵. 任取 i,j, $1\leqslant i\leqslant n$, $1\leqslant j\leqslant m$, 则

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{A}\boldsymbol{C})^{\mathrm{T}}\text{ 的 }(i,j)\text{-元} &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{C}\text{ 的 }(j,i)\text{-元}\\
&= \boldsymbol{A}\text{ 的第 }j\text{ 行}\times\boldsymbol{C}\text{ 的第 }i\text{ 列}\\
&= (a_{j1},\cdots,a_{js})(c_{1i},\cdots,c_{si})^{\mathrm{T}}\\
&= a_{j1}c_{1i}+\cdots+a_{js}c_{si};
\end{aligned}
$$

同理

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\text{ 的 }(i,j)\text{-元} &= \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\text{ 的第 }i\text{ 行}\times\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\text{ 的第 }j\text{ 列}\\
&= (c_{1i},\cdots,c_{si})(a_{j1},\cdots,a_{js})^{\mathrm{T}}\\
&= c_{1i}a_{j1}+\cdots+c_{si}a_{js},
\end{aligned}
$$

因此 $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{C})^{\mathrm{T}}$ 与 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 的 (i,j)-元相同, 故 (4) 式成立.

显然 (4) 式可推广为 $(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2\cdots\boldsymbol{A}_s)^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}_s^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_{s-1}^{\mathrm{T}}\cdots\boldsymbol{A}_1^{\mathrm{T}}$.

例 1.1.10 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&-1\\0&1&3\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&0&1\\1&1&3\\2&-1&1\end{pmatrix}$, 求 $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}$.

解 因为

$$
\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&2&-1\\0&1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0&1\\1&1&3\\2&-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&3&6\\7&-2&6\end{pmatrix},
$$

所以

$$
(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}2&7\\3&-2\\6&6\end{pmatrix}.
$$

本题也可以利用关于矩阵转置的性质 (4), 得

$$
(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}2&1&2\\0&1&-1\\1&3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\2&1\\-1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&7\\3&-2\\6&6\end{pmatrix}.
$$
□

例 1.1.11 (信息检索) 互联网上数据库的发展对信息存储和检索提出了更高要求, 现代检索技术就是基于矩阵理论建立起来的. 下面以图书馆内代数书籍的检索为例.

设图书馆中的代数类书籍有以下 6 种, 按拼音字母顺序排列为

B1: 高等代数　　B2: 矩阵代数及应用　　B3: 矩阵论

B4: 线性代数　　B5: 线性代数及应用　　B6: 线性代数与解析几何

可供检索的关键词有以下 5 个, 按拼音字母顺序排列为

C1:代数, C2:几何, C3:矩阵, C4:线性, C5:应用.

于是数据库可如下表示为

	B1	B2	B3	B4	B5	B6
C1	1	1	0	1	1	1
C2	0	0	0	0	0	1
C3	0	1	1	0	0	0
C4	0	0	0	1	1	1
C5	0	1	0	0	1	0

从而数据库矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&0&1&1&1\\0&0&0&0&0&1\\0&1&1&0&0&0\\0&0&0&1&1&1\\0&1&0&0&1&0\end{pmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{A}$ 的 (i,j)-元 $a_{ij}=\begin{cases}1, & \text{书籍B}j\text{含有关键词C}i,\\ 0, & \text{书籍B}j\text{不含有关键词C}i.\end{cases}$

若我们输入检索的书名关键词为“代数, 线性, 应用”, 则检索的列向量为

$$\boldsymbol{\alpha}=(1,0,0,1,1)^{\mathrm{T}},$$

于是, 检索的结果可表示为 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=(1,2,0,2,3,2)^{\mathrm{T}}$. 其中 $\boldsymbol{\beta}$ 的第 i 个分量表示书 Bi 与检索向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 相匹配的程度, 数值越大表示匹配程度越高, 从而可根据 $\boldsymbol{\beta}$ 中分量的数值大小顺序将对应的书籍排列出来. □

§1.2 分 块 矩 阵

一、分块矩阵的定义

对于较大型的矩阵, 我们常用若干条横线与竖线将它划分成若干小矩阵, 把大型矩阵的运算化为小矩阵的运算, 以这些小矩阵为元素 (称为**子块**或**块元素**) 的形式矩阵称为**分块矩阵**. 例如矩阵

$$\boldsymbol{A}=\left(\begin{array}{ccc:cc}1&0&0&2&1\\0&1&0&1&3\\0&0&1&4&1\\\hdashline 1&2&3&0&0\end{array}\right)=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_3&\boldsymbol{A}_2\\\boldsymbol{A}_3&\boldsymbol{0}\end{pmatrix},$$

其中

$$\boldsymbol{A}_2=\begin{pmatrix}2&1\\1&3\\4&1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{A}_3=(1,\ 2,\ 3),\ \boldsymbol{0}=(0,0).$$

下面是几种常见的矩阵分块法.

(1) 设 $\boldsymbol{A}$ 是一个 $m\times n$ 矩阵, 则 $\boldsymbol{A}$ 按列分块可以表示为

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n),$$

其中 $\boldsymbol{\alpha}_i(i=1,2,\cdots,n)$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 列构成的列向量.

(2) 设 $\boldsymbol{A}$ 是一个 $m\times n$ 矩阵, 则 $\boldsymbol{A}$ 按行分块可以表示为

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{\beta}_1\\\boldsymbol{\beta}_2\\\vdots\\\boldsymbol{\beta}_m\end{pmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{\beta}_j(j=1,2,\cdots,m)$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的第 j 行构成的行向量.

(3) 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 是一个 n 阶方阵, 则 $\boldsymbol{A}$ 可以表示为如下分块矩阵

$$\begin{pmatrix}a_{11}&\boldsymbol{\alpha}\\\boldsymbol{\beta}&\boldsymbol{A}_1\end{pmatrix},$$

其中

$$\boldsymbol{\alpha}=(a_{12},\cdots,a_{1n}),\ \boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}a_{21}\\ \vdots\\ a_{n1}\end{pmatrix},\ \boldsymbol{A}_1=\begin{pmatrix}a_{22}&\cdots&a_{2n}\\ \vdots&&\vdots\\ a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}.$$

注意,矩阵的分块是人为的,分块的基本原则是使得子块为一些特殊矩阵,如单位矩阵、零矩阵、对角矩阵等,从而方便运算.

二、分块矩阵的运算

下面介绍分块矩阵的运算.

(1) 设分块矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{A}_{ij})_{s\times t}$, $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{B}_{ij})_{s\times t}$, 若 A 与 B 对应子块 $\boldsymbol{A}_{ij}$ 与 $\boldsymbol{B}_{ij}$ 同型 (即可加), 则

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A}_{ij}+\boldsymbol{B}_{ij})_{s\times t}.$$

(2) 设分块矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{A}_{ij})_{s\times t}$, k 是数, 则

$$k\boldsymbol{A}=(k\boldsymbol{A}_{ij})_{s\times t}.$$

(3) 设分块矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{A}_{ij})_{s\times t}$, $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{B}_{jv})_{t\times k}$, 若对于任意 $i,j,v(i=1,\cdots,s;\ j=1,\cdots,t;\ v=1,\cdots,k)$, $\boldsymbol{A}_{ij}$ 的列数等于 $\boldsymbol{B}_{jv}$ 的行数, 即 $\boldsymbol{A}_{ij}\boldsymbol{B}_{jv}$ 乘法有意义, 换言之, 若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列分法与 $\boldsymbol{B}$ 的行分法完全相同, 则

$$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11}&\boldsymbol{A}_{12}&\cdots&\boldsymbol{A}_{1t}\\ \boldsymbol{A}_{21}&\boldsymbol{A}_{22}&\cdots&\boldsymbol{A}_{2t}\\ \vdots&\vdots&&\vdots\\ \boldsymbol{A}_{s1}&\boldsymbol{A}_{s2}&\cdots&\boldsymbol{A}_{st}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_{11}&\boldsymbol{B}_{12}&\cdots&\boldsymbol{B}_{1k}\\ \boldsymbol{B}_{21}&\boldsymbol{B}_{22}&\cdots&\boldsymbol{B}_{2k}\\ \vdots&\vdots&&\vdots\\ \boldsymbol{B}_{t1}&\boldsymbol{B}_{t2}&\cdots&\boldsymbol{B}_{tk}\end{pmatrix}=\boldsymbol{C}=(\boldsymbol{C}_{uv})_{s\times k},$$

其中 $\boldsymbol{C}$ 是以 $\boldsymbol{C}_{uv}$ 为子块的 $s\times k$ 分块矩阵, $\boldsymbol{C}_{uv}=\boldsymbol{A}_{u1}\boldsymbol{B}_{1v}+\cdots+\boldsymbol{A}_{ut}\boldsymbol{B}_{tv}$.

(4) 设分块矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11}&\boldsymbol{A}_{12}&\cdots&\boldsymbol{A}_{1t}\\ \boldsymbol{A}_{21}&\boldsymbol{A}_{22}&\cdots&\boldsymbol{A}_{2t}\\ \vdots&\vdots&&\vdots\\ \boldsymbol{A}_{s1}&\boldsymbol{A}_{s2}&\cdots&\boldsymbol{A}_{st}\end{pmatrix}$, 则 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11}^{\mathrm{T}}&\boldsymbol{A}_{21}^{\mathrm{T}}&\cdots&\boldsymbol{A}_{s1}^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{A}_{12}^{\mathrm{T}}&\boldsymbol{A}_{22}^{\mathrm{T}}&\cdots&\boldsymbol{A}_{s2}^{\mathrm{T}}\\ \vdots&\vdots&&\vdots\\ \boldsymbol{A}_{1t}^{\mathrm{T}}&\boldsymbol{A}_{2t}^{\mathrm{T}}&\cdots&\boldsymbol{A}_{st}^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}$.

例 1.2.1 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&1&0\\1&1&0&1\\0&0&2&0\\0&0&0&2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-1&-1&1\\-1&-1&1\\0&0&-1\\0&0&-1\end{pmatrix}$, 求 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$ 和 $\boldsymbol{AB}$.

解 令 $U=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}, V=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, 则

$$A=\begin{pmatrix}U&E\\O&2E\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}-U&V\\O&-V\end{pmatrix}.$$

于是

$$B^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}-U&V\\O&-V\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}-U^{\mathrm{T}}&O^{\mathrm{T}}\\V^{\mathrm{T}}&-V^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&-1&0&0\\-1&-1&0&0\\1&1&-1&-1\end{pmatrix},$$

$$AB=\begin{pmatrix}U&E\\O&2E\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-U&V\\O&-V\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-U^2&UV-V\\O&-2V\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&-2&1\\-2&-2&1\\0&0&-2\\0&0&-2\end{pmatrix}. \quad \square$$

例 1.2.2 设 A 是 $m\times n$ 矩阵, 将 A 按列分块 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$. 计算 $AA^{\mathrm{T}}, A^{\mathrm{T}}A$.

解 $$AA^{\mathrm{T}}=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\begin{pmatrix}\alpha_1^{\mathrm{T}}\\\alpha_2^{\mathrm{T}}\\\vdots\\\alpha_n^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}=\alpha_1\alpha_1^{\mathrm{T}}+\alpha_2\alpha_2^{\mathrm{T}}+\cdots+\alpha_n\alpha_n^{\mathrm{T}},$$

$$A^{\mathrm{T}}A=\begin{pmatrix}\alpha_1^{\mathrm{T}}\\\alpha_2^{\mathrm{T}}\\\vdots\\\alpha_n^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=\begin{pmatrix}\alpha_1^{\mathrm{T}}\alpha_1&\alpha_1^{\mathrm{T}}\alpha_2&\cdots&\alpha_1^{\mathrm{T}}\alpha_n\\\alpha_2^{\mathrm{T}}\alpha_1&\alpha_2^{\mathrm{T}}\alpha_2&\cdots&\alpha_2^{\mathrm{T}}\alpha_n\\\vdots&\vdots&&\vdots\\\alpha_n^{\mathrm{T}}\alpha_1&\alpha_n^{\mathrm{T}}\alpha_2&\cdots&\alpha_n^{\mathrm{T}}\alpha_n\end{pmatrix}. \quad \square$$

在上例中应该看到, $\alpha_i\alpha_i^{\mathrm{T}}$ 是一个 m 阶方阵, 而 $\alpha_i^{\mathrm{T}}\alpha_j$ 是一个数, 因此 AA^{T} 是一个 m 阶方阵, $A^{\mathrm{T}}A$ 是一个 n 阶方阵.

例 1.2.3 设矩阵 $C=A_{m\times n}B_{n\times s}$, 我们来考察 C 的列向量与行向量.

首先, $B\xlongequal{\text{按列分块}}(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)$, 则

$$AB=A(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)=(A\beta_1,A\beta_2,\cdots,A\beta_s),$$