ACM-ICPC程序设计系列

计算几何及应用

主编　金博　郭立　于瑞云

哈爾濱工業大學出版社
HITP HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

ACM-ICPC程序设计系列

计算几何及应用

● 主　编　金　博　郭　立　于瑞云

● 副主编　谭振华　姚翠莉　梁　冰

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容简介

本书较为系统地介绍了计算几何中的基本概念，以及求解诸多实际应用问题的算法，概括了求解计算几何问题所特有的算法思想、几何结构与数据结构。全书共分7章，包括：绪论，计算几何基础，解析几何，凸包，立体几何，Voronoi 图与三角剖分及综合例题等。

本书可作为参加计算机程序设计竞赛的辅导教材，也可作为高等院校计算机相关专业本科高年级学生或研究生的教材及教学参考书。

图书在版编目(CIP)数据

计算几何及应用/金博，郭立，于瑞云主编. —哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2012.4

(ACM－ICPC 程序设计系列)

ISBN 978-7-5603-3345-8

Ⅰ.①计…　Ⅱ.①金…　②郭…　③于…　Ⅲ.①计算几何
Ⅳ.①O18

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 142540 号

策划编辑　赵文斌　杜　燕
责任编辑　刘　瑶
出版发行　哈尔滨工业大学出版社
社　　址　哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号　邮编 150006
传　　真　0451-86414749
网　　址　http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷　哈尔滨工业大学印刷厂
开　　本　787mm×960mm　1/16　印张 10.75　字数 207 千字
版　　次　2012 年 4 月第 1 版　2012 年 4 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978-7-5603-3345-8
定　　价　22.80 元

(如因印装质量问题影响阅读，我社负责调换)

《ACM－ICPC 程序设计系列》编委会

主　任　俞经善

副主任　金　博　陈　宇　孙大烈　孟繁军
殷明浩　朴秀峰

委　员　（按姓氏笔画排序）
丁　雨　马占飞　王　平　王　斌
王翠青　乔　付　邢海峰　刘丕娥
纪洪波　李　军　李　敏　杨明莉
迟呈英　周李涌　周治国　钟　辉
龚　丹　鲁静轩　滕国库

序　言

ACM－ICPC(ACM国际大学生程序设计竞赛)被称为计算机领域的奥林匹克,是计算机领域高水平的智力角斗场。ACM－ICPC于1970年起源于北美,因涉及知识面广、注重实践,并有着公正的竞赛机制和颇有趣味的比赛过程,在全球范围内迅速流行。其命题的考查范围除了程序设计、算法、数据结构、操作系统、计算机网络、编译原理等计算机专业相关学科知识外,还有离散数学、初等数论、组合数学、图论、计算几何等相关的数学知识,而且范围还在持续扩大之中。

ACM－ICPC程序设计系列是编者们在多年参与ACM－ICPC的过程中,对竞赛、训练的有关数学内容进行总结,从学科专题的角度集结而成。本套丛书包含组合数学、初等数论、计算几何、图论和程序设计训练题解等内容,从竞赛的角度出发,介绍其中的基本概念和研究方法,主要以应用为目的。

组合数学源远流长,源自古代的数学游戏和美学消遣,并以无穷的魅力激发人们的聪明才智和数学兴趣。组合数学涉及内容广泛,知识点庞杂,与很多数学分支有交叉,主要研究将一些元素安排成种种集合的问题,被广泛地应用在计算机科学、编码和密码学、物理、生物等学科以及交通管理、城市规划、企业管理等领域。初等数论是研究数的规律,是研究整数的性质的数学分支。初等数论就是用初等、朴素的方法去研究数论,是数论的一个最古老的分支。数论在计算机科学和应用数学的发展中得到了广泛应用。比如,在计算方法、代数编码、组合论等方面都广泛使用了初等数论范围内的许多研究成果。计算几何于20世纪70年代末从算法设计与分析中分化而来,主要研究"几何图形信息(曲面和三维实体)的计算机表示、分析、修改和综合"。计算几何已经成长为一个被广泛认同的学科,在众多的应用领域(如计算机图形学、地理信息系统和机器人学等)都发挥着重要的作用。图论作为一个数学分支,有一套完整的体系和广泛的内容。它以图为研究对象,其应用范围非常广泛,不但应用于自然科学,且在社会科学中也有应用。当用图论来解决实际问题时,几乎都能引出复杂的图论模型,而这些模型一般情况下如果没有计算机的帮助很难分析出来,因此图论的快速发展和推广与计算机科学和信息科学的快速发展是分不开的。

本系列图书以介绍这些学科专题的基本概念和方法为基准,目的是使读者能在短时间

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

内了解专题的主要内容。整套图书适用于参加初级、中级 ACM - ICPC 和信息学竞赛的学生，对计算机程序设计和算法感兴趣的读者同样有指导意义，同时对在该方向上有所研究的人士也有一定的参考意义，可作为竞赛代表队的培训教材，也可作为相关课程实践教学的教材。

本系列图书是由 ACM - ICPC 中国·东北地区组织委员会组织策划，由哈尔滨工程大学、大连理工大学、东北大学、东北林业大学、东北师范大学、内蒙古师范大学等学校的老师（教练）群策群力共同完成。ACM - ICPC 中国·东北地区组织委员会一直关注着竞赛与实践教学的结合，使大学生们通过这个活动掌握更多的学科知识和提高分析问题、解决问题的能力。本系列图书的出版能够将一些有实际意义的学科专题知识以简洁而清晰的方式最快地介绍给大学生们，可以引起更多程序设计爱好者的兴趣，可以成为 ACM - ICPC 参赛队员攀登道路上的一块垫脚石。

ACM - ICPC 中国·东北地区组织委员会主席
第 34 届 ACM - ICPC 全球总决赛执行主席
哈尔滨工程大学副校长

2012 年 1 月

前言

计算几何既是一门数学，又是计算机理论的重要分支之一。20世纪70年代末，计算几何从算法设计与分析中独立出来，成为一个被计算机领域广泛认同的新型学科。目前，计算几何在图形学、机器人技术、超大规模集成电路设计和统计等诸多工程与数学领域有着十分重要的应用。

本书出版的初衷是为读者尽可能详尽地介绍计算几何的基本原理、基础知识、方法、算法和数据结构，辅以大量的具有代表性的例题，并对其进行详细的分析，进而给出实现算法，使读者掌握基本概念、基本方法及基本算法。继之，根据所介绍的计算几何专题，并结合实际应用，讨论解决该类问题所用的针对性方法和技术。希望通过这一系列过程，使读者能够从理论的学习中掌握计算几何研究问题的方法，并为利用计算几何的知识解决实际问题提供帮助。

全书共分7章。第1章介绍了与计算几何和算法相关的理论基础；第2章介绍了基本几何体计算的定义和性质，包括判断点、线、面是否相交及半平面相交的方法；第3章介绍了与解析几何相关的理论和算法，主要包括点定位、面积计算与三角形相关的圆、对称、平移和旋转、最小圆覆盖等；第4章介绍了凸包的概念以及求点集凸包的算法；第5章介绍了立体几何相关的内容，包括从基本概念到空间直线、平面、线线相交、线面相交、面面相交，并介绍了投影相关和多面体相关的内容；第6章介绍了Voronoi图、三角剖分的概念及其算法实现；第7章通过综合例题，对计算几何常见问题进行了详细的讲解，并给出了实现算法。

本书第1章由金博编写，第2章由金博、李超编写，第3章由金博、孙木鑫编写，第4章由姚翠莉、胡骏编写，第5章由金博、王琳、郭立编写，第6章由姚翠莉、张超编写，第7章由于瑞云、梁冰编写。全书由金博统稿。

本书可以作为高等院校大学生和研究生准备参加程序设计竞赛活动的教材和培训参考资料，也可以作为高等院校研究生和本科高年级学生学习相关课程的参考书，对应用领域的相关开发人员也具有参考价值。

本书在编写过程中参考了国内外相关资料，在此对资料提供者表示感谢。大连理工大学、东北大学和内蒙古师范大学 ACM 集训队的队员们编写并测试了书中的全部算法和程序，他们为本书的出版付出了辛勤的劳动。同时，东北地区 ACM 竞赛指导委员会的大力支持，使得本书能得以顺利出版。在此表示衷心的感谢！

由于作者水平有限，书中难免有疏漏之处，欢迎读者批评指正，谢谢！

E-mail:jinbo@ dlut. edu. cn

作　者

2012 年 2 月

目　　录

第1章 导 言

1.1 计算几何简介

计算几何既是一门数学,又是计算机科学的重要分支之一,主要研究几何模型和数据处理的相关问题,探讨几何形体的计算机表示,并分析和设计,如何灵活、有效地建立几何形体的数学模型以及在计算机中更好地存储和管理这些模型数据。计算几何是在20世纪70年代末期迅速发展起来的新兴学科。从历史上看,计算几何为研究一种在一维空间涉及多维空间输入问题的排序和搜索算法。由于它的历史,计算几何领域已经更多地集中解决二维空间问题并且慢慢延伸到三维空间。当这个问题涉及多维空间时,通常假设这个空间的维数是一个小的常数(如10或更小)。尽管如此,在这个领域最近的工作已经被认为是一种高维度空间的有限集合问题。

计算机的出现使得很多原本十分繁琐的工作得以大幅度简化,但是也有一些在人类看来很容易解决的问题,在计算机上却需要拿出一套并不简单的通用解决方案,如几何问题等。因此,计算几何应运而生,包括计算机图形学、计算机视觉和图像处理、机器人、计算机辅助设计和制造、计算机流体动力学和地理信息系统等。计算几何的目标之一是提供在应用领域建立自己方案所需的基本几何工具。目前,在达到这一目标方面已经取得了重大的进展,但仍然远没有得到充分实现。

本书中的计算几何内容主要涉及处理直线或平面对象(如直线、线段、多边形、平面、多面体等),以及简单的曲线对象,如圆等。也就是说,实体模型等领域所涉及的问题是曲线和曲面以及它们的模型表示。与目前数学中计算几何读本不同,那里主要介绍三维曲线、曲面的构造、生成及其模型。

在世界顶级ACM-ICPC竞赛中,几何题经常出现,并且复杂程度正在增加。但是在实际的竞赛中,几何题得分率往往是最低的,因此,本书将对竞赛中计算几何常用的基本算法作一个全面的介绍,希望对读者有一定的帮助。

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

1.2 计算几何的优势

计算几何经历了几十年的发展,目前已经在许多方面取得了长足的进展,现从以下几个方面分别进行叙述。

(1)计算几何算法的发展。在计算几何出现之前,计算机领域已有许多针对几何计算问题的计算方法。从总体来看,大多数方法是有效的,但其中一些算法效率不高,也有的算法根本无法运行或者所得结果不正确。由于计算几何强调数学的严谨性,因此在解决此类问题时,算法的正确性和有效性等方面取得了长足进展。

(2)计算几何算法效率的验证。此前,计算几何的发展,很少了解几何运算的计算复杂性。例如,已知美国的所有邮政代码区域的编码和一个 GPS 上的纬度和经度,要花多长时间来计算邮政编码与位置的对应关系?应如何计算依赖的预处理时间和可用空间的数量?计算几何把这个问题归为渐进复杂性。

(3)计算几何的正确性与鲁棒性。以前,人们在计算几何的发展过程中开发了许多软件系统,这些系统由于几何连续性的影响和计算离散性的错误而陷入困境。例如,已知平面上的两条线段,它们是否相交?这个问题的解决很困难,因为两条线段可以有很多不同的位置:两线段平行、在一条直线上、两线段的端点相交,就两线段垂直等。基于离散的软件涉及几百万的相交测试,如果这些测试中有一个计算错了可能导致失败。计算几何把这个强大的和正确的几何图元计算建立在坚实的数学基础上来研究。

以上内容概述了计算几何的主要优势,尽管无法一一详述其内涵,但通过以上理论的发展,丰富了计算几何的理论内容,同时也加强了计算几何的实际应用。

1.3 计算几何的局限

由于计算几何目前尚处于发展阶段,有很多关键问题尚待解决。因此,其局限性主要表现为:

(1)离散几何。计算几何研究的一个局限是过于关注离散的世界,而缺少关注连续的世界。

(2)平面物体。另一个局限是本书中所涉及的计算几何主要处理直线和平面物体。而对于连续性曲面物体缺少处理算法,建议读者去阅读数学专业用的计算几何方面的读本或

飞机外形设计、船舶设计的有关读本。

(3)低维空间。还有一个局限是计算几何主要处理有限范围内的二维问题和三维问题。低维问题的好处是容易想象和易于理解,但是,许多应用问题都是建立在三维甚至高维空间的。

1.4 本书讨论的内容

本书除了将计算几何相关基础知识进行介绍外,还针对实际问题进行讨论与分析,让读者既学到理论知识,又能使用所学解决一些实际问题。本书包含的主要论题有:

(1)凸包。凸包是一个非常重要的几何性质。如果任意两个点和任意两点连成的线段都在这个集合中,这个集合就成为凸包集。在计算几何领域中确定的首要问题之一是计算最小的凸型,称为凸包,即封装一组点。

(2)交集。它是最基本的几何问题之一,是确定什么时候两个集合彼此相交。确定是否复杂的物体集相交通常降低为确定哪两个最初的物体(如线段)相交。本书将讨论计算线段集相交的有效算法。

(3)三角形划分。三角形划分是将复杂物体划分为简单物体的常用方法。划分一个平面物体(一个三维空间的四面体)的最简单的形状就是三角形。本书将讨论如何划分成三角形,在后期,将讨论如何划分成梯形。

(4)低维线性规划。计算几何中的许多优化问题始于一个线性规划问题的形式,即找到一个满足线性不等式集合的极点(如最高点或最低点)。线性规划是优化组合中的一个重要问题,并且,人们经常使用它解决几百到千维空间问题。然而也有许多有趣的问题(如寻找最小内附一组点的光盘),可作为低维线性规划问题。在低维空间,存在简单高效的解决方案。

(5)Voronoi 图和 Delaunay 三角。鉴于空间点集合 S,其中最重要的问题之一是最近的邻居的问题。给定一个不在 S 中的点,那么 S 中的哪个点与它最接近呢?解决这一问题所使用的方法之一是按着最近距离的点划分空间区域。这样就产生了一个空间几何分割,称为 Voronoi 图。这种几何结构出现在许多应用几何中。二元结构称为 Delaunay 三角,它也有许多有趣的性质。

(6)线路安排和二元性。计算几何最重要的数学结构之一就是安排线路(或一般的曲线和曲面的安排)。已知平面上的 n 条直线,一个安排是通过连接这些直线相交的点形成一幅图。我们将证明这种结构在 $O(n^2)$ 时间内的构造。其原因是这个结构非常重要以至于

许多涉及点的问题能通过二元化的方法转化成线的问题。例如,假设你要确定一个平面上的任何三点是否共线。使用暴力搜索的方法,其时间复杂度是 $O(n^3)$。然而,如果这些点通过二元化转化成线,然后这个问题降低成是否有一个度大于四的顶点。

(7)搜索。几何搜索问题是以下的一般形式。已知一个不会改变的数据集(如点、线、多边形等),这些数据处理成结构体数据以便于一些查询的类型尽可能快地得到回答。例如,一个最邻近的搜索查询是:确定最接近的数据集点被定义为查询点。一个范围查询是:确定从数据集点(或计算点数)设置某一区域内的查询。该区域可能是一个长方形、圆形或多边形。

(8)逼近。在许多现实世界的应用几何输入都会有测量误差。在这种情况下,可能没有必要计算精确的结果,因为输入数据本身就是不精确的。通常,使用结果大体正确的解决方案更简单,速度更快。例如,考虑计算空间 n 个点之间的直径问题。在平面上这个问题的有效解决方案我们是知道的。在高维空间解决这个问题使得时间复杂度小于 $O(n^2)$ 是很困难的。但构造输入样例,使得许多两点间的距离接近直径距离还是很容易的。

第 2 章　计算几何基础

2.1　计算几何中的向量表示

2.1.1　点的表示

以二维平面为例,计算机中点的表示如下,包括横坐标 x 和纵坐标 y:

```
struct  point{
    double  x;
    double  y;
};
```

2.1.2　向量的概念

在数学中,既有大小又有方向的量称为向量(或矢量),向量用符号 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\cdots$表示。

在几何上,一个起点为 A 终点为 B 的向量 $\boldsymbol{a}$ 可以用一条有向线段$\overrightarrow{AB}$来表示,用这条线段的长度$|AB|$来表示 $\boldsymbol{a}$ 的大小,用 A 到 B 的指向表示 $\boldsymbol{a}$ 方向。向量的大小又称向量的模,向量 $\boldsymbol{a}$ 的模记作$|AB|$或$|\boldsymbol{a}|$。长度为零的向量称为零向量,记作 $\boldsymbol{0}$。零向量的方向不确定,也是唯一方向不定的向量。长度为 1 的向量称为单位向量。特别地,与非零向量 $\boldsymbol{a}$ 同向的单位向量称为 $\boldsymbol{a}$ 的单位向量,记作 $\boldsymbol{a}^0$。

在计算机中,向量的表示如下:

```
struct  v{
    point start;
    point end;
};
```

2.1.3 向量加减法

两向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和为一个向量,记为 $\boldsymbol{c}$,即

$$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} \tag{2.1}$$

$\boldsymbol{c}$ 与两向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的关系遵循如图 2.1(a)的平行四边形法则。

设二维向量 $\boldsymbol{P}=(x_1,y_1)$,$\boldsymbol{Q}=(x_2,y_2)$,则向量加法定义为

$$\boldsymbol{P}+\boldsymbol{Q}=(x_1+x_2,y_1+y_2) \tag{2.2}$$

同样的,向量减法定义为

$$\boldsymbol{P}-\boldsymbol{Q}=(x_1-x_2,y_1-y_2) \tag{2.3}$$

显然有性质

$$\boldsymbol{P}+\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}+\boldsymbol{P},\quad \boldsymbol{P}-\boldsymbol{Q}=-(\boldsymbol{Q}-\boldsymbol{P}) \tag{2.4}$$

2.1.4 向量点积

两向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的点积(或称为标积)为一个标量,记为 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$,它的大小为

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta \tag{2.5}$$

其中,θ 为两向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角。如果已知两向量的点积,可以由式(2.5)计算两向量夹角,即

$$\theta=\arccos(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}/(|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|)) \tag{2.6}$$

特殊情况有 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$,此时 $\theta=0$,有 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2$,即向量自身的点积为其模的平方。$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}$ 有时也简写为 $\boldsymbol{a}^2$。

若设向量 $\boldsymbol{P}=(x_1,y_1)$,$\boldsymbol{Q}=(x_2,y_2)$,则

$$\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{Q}=x_1\times x_2+y_1\times y_2 \tag{2.7}$$

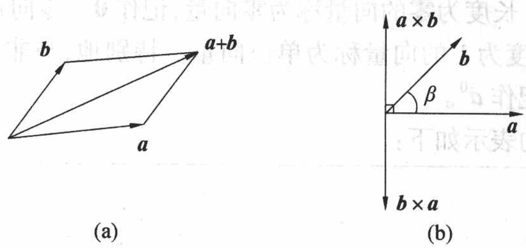

图 2.1 几何向量运算

点积代码如下：

```
double dotProduct(v * v1, v * v2){
    v vt1, vt2;
double result = 0;

    vt1.start.x = 0;
    vt1.start.y = 0;
    vt1.end.x = v1->end.x - v1->start.x;
    vt1.end.y = v1->end.y - v1->start.y;

    vt2.start.x = 0;
    vt2.start.y = 0;
    vt2.end.x = v2->end.x - v2->start.x;
    vt2.end.y = v2->end.y - v2->start.y;

    result = vt1.end.x * vt2.end.x+ vt1.end.y * vt2.end.y;
    return result;
}
```

2.1.5 向量叉积

设向量 $\boldsymbol{P}=(x_1,y_1)$，$\boldsymbol{Q}=(x_2,y_2)$，则向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 的叉积仍是一个向量，它的长度规定为：

$$|\boldsymbol{PQ}|=x_1y_2-x_2y_1 \tag{2.8}$$

它的方向规定为：与向量 $\boldsymbol{P}$，$\boldsymbol{Q}$ 均垂直，并且使（$\boldsymbol{P}$，$\boldsymbol{Q}$，$\boldsymbol{P}\times\boldsymbol{Q}$）成右手系，即当右手四指从 a 弯向 b（转角小于 π）时，拇指的指向就是 $\boldsymbol{P}\times\boldsymbol{Q}$ 的方向

显然有性质：

$$\boldsymbol{P}\times\boldsymbol{Q}=-(\boldsymbol{Q}\times\boldsymbol{P}),\boldsymbol{P}\times(-\boldsymbol{Q})=-(\boldsymbol{P}\times\boldsymbol{Q}) \tag{2.9}$$

一般在不加说明的情况下，本文下述算法中所有的点都看作向量，两点的加减法就是向量相加减，而点的乘法则看作向量叉积。计算向量叉积是对于直线和线段相关算法的核心

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com