

基 础 科 学

(1986年合订本)

——《台港及海外中文报刊资料专辑》

书目文献出版社

多項式問題研究進展

楊重駿

一年前在數播決定刊登拙文“一些有關多項式的問題”〔1〕時，承審核先生表示希望今後能再報導些此類問題的研究進展。現似乎是有了一些相類似的問題及再作報導的時候了。但撰寫本文另一個更重要的心意是希望再次引起國內數學愛好者對這類人人都可插手來做的問題的興趣及共鳴，作進一步的研究。

首先要報出的是在文〔1〕中介紹了下面一研究問題：

臆測 1：設 p, q 為兩同次的非常數多項式，若 $p(p-1)=0 \Leftrightarrow q(q-1)=0$ （不計重複度，即使 $p(p-1)=0$ 的集與使 $q(q-1)=0$ 的集相同）則或

$$p \equiv q \quad \text{或} \quad p+q \equiv 1$$

（不計重複度：例如 $x^2(x-1)(x+2)^4=0$ 與 $x(x-1)^2(x+2)^8=0$ 有相同的根）。

迄今為止，仍無人提供一個證明或反證。相信這個問題的困難度不可能與費馬最後定理（ $x^n + y^n = z^n$ ）， $n \geq 3$ 無正整數解）或最近被證明的有近 70 年歷史的 Bieberbach 臆測可相提並論的。相信數播的讀者中一定會有人接受這個問題的挑戰，而下決心把它解決。這也將是撰寫文〔1〕及本文的最大報償。

本文所要討論的是筆者在 1977 年刊登在

羅馬尼亞的一篇文章〔2〕中的一個結果。

命題 1：設 $p(x)$ 及 $q(x)$ 為兩個複變數 x 的多項式。若

$$p=0 \Leftrightarrow q=0 \quad (\text{不計重複度})$$

及

$$p'=0 \Leftrightarrow q'=0 \quad (\text{不計重複度})$$

則必存在有兩個正整數 m, n 使得

$$p^m(x) \equiv q^n(x); \quad x \text{ 表複變數。}$$

但這個結果在 1981 年承一位以色列的數學家 M. Roitman 在他的一份研究報告〔3〕中指出文〔2〕中對上命題的證明不完全正確，事實上是不一定成立的。他並對此問題作了一個仔細的研究。本文主要就是將文〔3〕中的結果作一報導，以饗讀者。

為了解說方便起見，我們先介紹一些記號及已知的事實。我們以 C 表所有複數的集合， $C[x]$ 表所有具複數係數的複變數 x 的多項式的集合。我們稱一個首項係數為 1 的多項式為“首一多項式”（monic polynomial），這也是我們將所要討論的多項式。

事實 1：設 p 及 q 為兩首一多項式，則存在有兩整數 m, n 使得 $p^m = q^n$ 的充要條件（ $\Leftrightarrow$ ）是 p, q 同為 $C[x]$ 中某首一多項式的幕次

(即 $p = s^\alpha$, $q = s^\beta$, s 為首一多項式, α , β 為正整數), 這時 p 與 q 必有相同的根 (不計重複度)。

記號: $p \sim q$ 是表示 $p^m = q^n$ 成立, m, n 為兩正整數。

現以下我們都假設 p, q 為 $C[x]$ 中非常數的首一多項式並且具有相同的根: $x_1, x_2, \dots, x_k$, 其中只要 $i \neq j$, 就 $x_i \neq x_j$ 。我們可設

$$p(x) = \prod_{i=1}^k (x - x_i)^{m_i},$$

$m_i, i = 1, 2, \dots, k$ 皆為正整數 (1)

$$q(x) = \prod_{i=1}^k (x - x_i)^{n_i},$$

$n_i, i = 1, 2, \dots, k$ 皆為正整數 (2)

則不難見

$$p \text{ 的次數} = \deg p = \sum_{i=1}^k m_i$$

$$q \text{ 的次數} = \deg q = \sum_{i=1}^k n_i$$

事實 2: $p(x)$ 的導函數 $p'(x)$ 可表為

$$p'(x) = \deg p \left(\prod_{i=1}^k (x - x_i)^{m_i-1} \right) u(x) \quad (3)$$

其中 $u(x)$ 為首一多項式次數為 $k-1$ 且與 $p(x)$ 互質 (無共同因子或根)。這個事實是由於 $p(x)$ 的一個具重複度為 m_i 的根 x_i , 在 $p'(x)$ 中見有重複度 $m_i - 1$ 。因此 $p'(x)$ 必具有因有 $\prod_{i=1}^k (x - x_i)^{m_i-1}$ 其它因子無一可與 $p(x)$ 的相同。現

$$\sum_{i=1}^k (m_i - 1) = \deg p - k$$

而 $p'(x)$ 的次數為 $\deg p - 1$ 。由式(1)有

$$\deg p - 1 = (\deg p - k) + \deg u$$

因而 $\deg u = k - 1$

同樣我們有

事實 3: $q(x)$ 的導函數 $q'(x)$ 可表為

$$q'(x) = \deg q \left(\prod_{i=1}^k (x - x_i)^{n_i-1} \right) v(x) \quad (4)$$

其中 $v(x)$ 為首一多項式, 次數為 $k-1$ 且與 $q(x)$ 互質。

綜合事實 2 與 3 得到下面一個常會被用到結果。

事實 4: 若多項式 p, q 有相同的 k 個根 (不計重複度), 則相應的 $u(x)$ 與 $v(x)$ 為等次的且次數為 $k-1$ 。

現今

$$F(x) = \prod_{i=1}^k (x - x_i)$$

則由此及式(1)及(3)得

$$\begin{aligned} \frac{p'(x)}{p(x)} &= \deg p \cdot \frac{u(x)}{F(x)} \\ &= \sum_{i=1}^k \frac{m_i}{x - x_i} \end{aligned} \quad (3)$$

於是對任何 j , 上式兩邊乘以 $(x - x_j)$:

$1 \leq j \leq k$, 下式成立

$$\begin{aligned} \deg p \frac{u(x)}{\prod_{i \neq j} (x - x_i)} \\ = m_j + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^k m_i \frac{x - x_j}{x - x_i} \end{aligned}$$

上式中以 $x = x_j$ 代入得

$$\begin{aligned} m_j &= \deg p \frac{u(x_j)}{\prod_{i \neq j} (x_j - x_i)} \\ &= \deg p \frac{u(x_j)}{F'(x_j)} \end{aligned}$$

同法施之于 v 及 q , 因而我們立即有

事實 5: $\frac{v(x_i)}{u(x_i)} = \frac{\deg p}{\deg q} \cdot \frac{n_i}{m_i}$ 為一正有理數。

記號: 我們以 $p \rightarrow q$ 表示 p' 所有非 p 的根皆為 q' 的根, 這也就是說所有 u 的根皆為 v 的根。

我們以 $p \sim q$ 表示 u 與 v 有相同的根。

定理 1 (參看 [3]): 下列幾個條件為等價的 (即互為充要條件)

- (i) $p \sim q$
- (ii) 式(1)及式(2)中所涉及的序列 $\{m_1, m_2, \dots, m_k\}$, $\{n_1, n_2, \dots, n_s\}$ 滿足下比例關係:

$$\frac{m_1}{n_1} = \frac{m_2}{n_2} = \dots = \frac{m_k}{n_s}$$

- (iii) 有一常數 α (其事實上必得為 $\frac{\deg p}{\deg q}$) 存在, 使得

$$\frac{p'}{p} = \alpha \frac{q'}{q}$$

- (iv) $u = v$

證明:

- (i) $\Leftrightarrow$ (ii) 是很明顯的。
- (ii) $\Leftrightarrow$ (iii)

(是因為 $\frac{p'}{p} = \sum_{i=1}^k \frac{m_i}{x-x_i}$ 及 $\frac{q'}{q} = \sum_{i=1}^s \frac{n_i}{x-x_i}$)

- (iii) $\Leftrightarrow$ (iv) 是因 $\frac{p'}{p} = \deg p \frac{u}{F}$
及 $\frac{q'}{q} = \deg q \frac{v}{F}$

由定理 1 立即可得下面系理

系理 1: 若所有 p 的根皆為實根且 $p \rightarrow q$, 則 $p \sim q$ 。

證: 由 Rolle 氏定理: 一連續具導函數的實函數 f , 在 f 的兩個實根間必有其導函數 f' 的一個根。(參看圖 1)

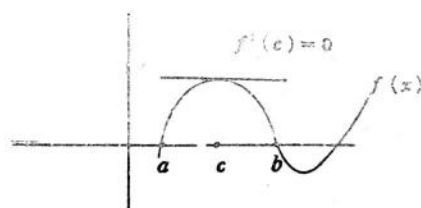


圖 1

因此在 p 的 k 個實根 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_k$ 中存在 p' 的 $k-1$ 個實根 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{k-1}$, 其滿足

$$x_1 < \alpha_1 < x_2 < \alpha_2 < \dots < \alpha_{k-1} < x_k$$

現由事實 4 知 u, v 為 $k-1$ 次, 故 $\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}$ 為 u 所有的根, 加上 $p \rightarrow q$ 故 $u \equiv v$, 因而由定理 1 得 $p \sim q$ 。

由上面系理的證明可見只要 $p \rightarrow q$ 及所有 u 的根皆為單重根時 $p \sim q$, 此一結果並不是什麼創新之見, 本文要介紹的是此結果的加強結論, 為此先介紹下面一輔理。

輔理 1: 設 R 及 v_1 為兩同次的首一多項式, 且 $v_1 \mid R$ (即 v_1 為 R 的因子), 則

$$\sum_{i=1}^k n_i \frac{R(x_i)}{v_1(x_i)} = \sum_{i=1}^s n_i = \deg q$$

證: 設 $v_1(x) = \prod_{j=1}^s (x - \alpha_j)^{r_j}$, $\alpha_j \in \mathbb{C}$,

且若 $i \neq j$, $\alpha_j \neq \alpha_i$, 則有複數 β_{jt} ($1 \leq j \leq s$, $1 \leq t \leq r_j$), 使得

$$\frac{R(x)}{v_1(x)} = 1 + \sum \frac{\beta_{jt}}{(x - \alpha_j)^t}$$

於是

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k n_i \frac{R(x_i)}{v_1(x_i)} &= \sum_{i=1}^k n_i + \sum_{1 \leq j \leq s, 1 \leq t \leq r_j} \beta_{jt} \left(\sum_{i=1}^k \frac{n_i}{(x_i - \alpha_j)^t} \right) \end{aligned} \quad (5)$$

今由

$$\frac{q'(x)}{q(x)} = \sum_{i=1}^k \frac{n_i}{x - \alpha_i} \quad (6)$$

及事實若

$$\begin{aligned} q(\alpha_j) &\neq 0, \\ q'(\alpha_j) &= q''(\alpha_j) \\ &= \dots \\ &= q^{(r)}(\alpha_j) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{則 } \left. \frac{d^{r-1}}{dx^{r-1}} \left(\frac{q'(x)}{q(x)} \right) \right|_{x=\alpha} = 0$$

從而由式(6)對任何 j 及 $t: 1 \leq j \leq s, 1 \leq t \leq r_j$, 可有

$$\sum_{i=1}^k \frac{n_i}{(x_i - \alpha_j)^t} = 0 \quad (7)$$

(7)代入(5)得

$$\sum_{i=1}^k n_i \frac{R(x_i)}{v_1(x_i)} = \sum_{i=1}^k n_i$$

輔理 1 得證。

定理 2: u, v 如上面所定, 如 $u | v^2$, 則 $p \sim q$, 特別當所有 u 的根的重複度 ≤ 2 及 $p \rightarrow q$, 則 $p \sim q$ 。

證: 由假設 $u | v^2$, 設 $u = u_0 T$ 及 $v = v_0 T$, 其中 u_0, v_0 及 T 皆為首 1 多項式, $T = (u, v)$ (即 u, v 的最大公因式) 不難得 $u_0 | v_0^2 T, u_0 | T, u_0 | v$ 及 $\frac{v}{u} = \frac{v_0}{u_0}$, 令

$$q_i = \frac{v(x_i)}{u(x_i)}, \quad i = 1, 2, \dots, k$$

由輔理 1 得

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k n_i q_i &= \sum_{i=1}^k n_i \frac{v_0(x_i)}{u_0(x_i)} \\ &= \sum_{i=1}^k n_i \end{aligned} \quad (8)$$

而另一方面

$$\sum_{i=1}^k \frac{n_i}{q_i} = \sum_{i=1}^k n_i \frac{u(x_i)}{v(x_i)} = \sum_{i=1}^k n_i \quad (9)$$

由式(8)及(9)得

$$\sum_{i=1}^k \frac{n_i}{q_i} = \sum_{i=1}^k n_i q_i = \sum_{i=1}^k n_i$$

但 q_i 皆為正有理數, 故上式唯有在所有的

$$q_i = 1 \quad (i = 1, 2, \dots, k)$$

才能成立。

$$\text{而 } q_i = \frac{\deg p \cdot n_i}{\deg q \cdot m_i} \quad i = 1, 2, \dots, k$$

因而

$$\{m_1, m_2, \dots, m_k\} \text{ 與 } \{n_1, n_2, \dots, n_k\}$$

成比例, 故由定理 1, $p \sim q$ 。定理得證。

註: 我們不難證明, 若 $q \rightarrow p$, 則總可找到一正整數 g 使得 $v | u^g$, 我們上面證明的是, 若 $g \leq 2$, 則 $p \sim q$ 。但在 $g \geq 3$ 時, 可證明 $p \sim q$ 不一定成立。

定理 2 的一個推廣如下:

定理 3: 設 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 為互異的數

$$u(x) = \prod_{i=1}^r (x - \alpha_i)^{s_i}$$

$$v(x) = \prod_{i=1}^r (x - \alpha_i)^{t_i}$$

$$(s_i \geq 0, t_i \geq 0)$$

假使整數 $s_i - t_i (1 \leq i \leq r)$ 有一共同的公因子 $d \geq 2$ 則 $p \sim q$ 。

證: 由假設我們有

$$\frac{u(x)}{v(x)} = \left(\frac{u_0(x)}{v_0(x)} \right)^d$$

其中 u_0, v_0 為同次的首一多項式。由輔

理 1, 置 $q_i = \frac{v_0(x_i)}{u_0(x_i)}$ 我們得

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k n_i (q_i^d + 1) \\ = \sum_{i=1}^k n_i (q_i^{d-1} + q_i) \end{aligned} \quad (10)$$

我們需要下面事實:

輔理2：對任何複數 c 及正整數 d ，若 c^d 為正實數，則

$$c^d + 1 \geq |c|^{d-1} + |c| \quad (11)$$

$$\geq \operatorname{Re}(c^{d-1} + c) \quad (12)$$

$\operatorname{Re} w$ 表複數 w 的實數部份。

註：不等式(12)等號成立的充要條件是 $c = 1$

證：對任何正實數 a ， $(a^d - 1)(a - 1) \geq 0$ 。故不等式(11)成立。不等式(12)及註的成立不難證明。

現回到等式(10)。由輔理2，由兩邊取實數部份可推得式(10)成立的必要條件為對所有的 i ，

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} n_i (q_i^{d-1} + 1) &= n_i (q_i^{d-1} + 1) \\ &= \operatorname{Re} n_i (q_i^{d-1} + q_i) \\ &= n_i (q_i^{d-1} + q_i) \end{aligned} \quad (13)$$

成立。注意此處的 q_i 可為複數，但 q_i^d 為正實數！

于是由式(13)得

$$q_i^d + 1 = q_i^{d-1} + q_i$$

或

$$(q_i^{d-1} - 1)(q_i - 1) = 0$$

因而

$$q_i = 1 \quad \text{或} \quad q_i^{d-1} = 1$$

即使 $q_i^{d-1} = 1$ ，由 q_i^d 為正實數仍可得 $q_i = 1$ ，故不論如何

$$q_i = 1, \quad i = 1, 2, \dots, k$$

因而由定理1。得 $p \sim q$ 。

定理4：設 $u = u_1 s$ ， $v = v_1 s$ 。

其中 s 為 u ， v 中具有同重複度的根的乘積，（即 s 為具形式 $(x - \alpha)^t$ 的因子乘積， α 為 u ， v 的根，且具有共同重複度 t 者）。若 $p \mapsto q$ 及 u_1 至多有兩個不同的根，則 $p \sim q$ 。

證：若 $u_1 \equiv 1$ （為一常數）或 u_1 僅有一個根，則 $u = v$ ，故 $p \sim q$ 。現若 u_1 有兩個根， α_1 及 α_2 ；

$$u_1(x) = (x - \alpha_1)^{t_1} (x - \alpha_2)^{t_2}$$

$$v_1(x) = (x - \alpha_1)^{s_1} (x - \alpha_2)^{s_2}$$

則

$$s_1 + s_2 = t_1 + t_2$$

或

$$s_1 - t_1 = t_2 - s_2$$

故若 $|s_1 - t_1| > 1$ ，則由定理2得 $p \sim q$ 。

若 $|s_1 - t_1| \leq 1$ ，則 $u \mid v^2$ 。

由定理1仍得 $p \sim q$ 。

定理5： p ， q 及 u ， v ， u_1 ， v_1 等如定理3中所述。若 $p \mapsto q$ 成立及 $\deg u_1 \leq 5$ ，則 $p \sim q$ 。

證：我們用反證法，即假設在 $\deg u_1 \leq 5$ 之下，但 $p \sim q$ 不成立。設 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 為 u_1 所有的不同的根。

$$u_1(x) = \prod_{i=1}^r (x - \alpha_i)^{t_i}$$

$$v_1(x) = \prod_{i=1}^r (x - \alpha_i)^{s_i}$$

則由定理3，存在有一正整數 i_0 ， $1 \leq i_0 \leq r$ ，使得 $t_{i_0} > 2s_{i_0}$ ，因而 $t_{i_0} > 3$ 。依據定理4， $r \geq 3$ ，所以當 $\deg v_1 \leq 5$ 時， $v_1(x)$ 正好有3個根，其重複度分別為3，1，1。同理 $u_1(x)$ 也有同樣結果。故對任何 u 的根 α

$$s \equiv t \pmod{2}$$

其中 s 及 t 分別為 α 為 u 及 v 的根的重複度。現由定理2，我們仍得 $p \sim q$ 。故定理得證。

由上面的定理我們看到若 $p(x)$ 的不同的根的數目 $k \leq 6$ 及 $p \mapsto q$ 成立，則 $p \sim q$ 。

在上面討論了許多 $p = 0 \Leftrightarrow q = 0$ ，及 $p' = 0 \Leftrightarrow q' = 0$ ，在某些附加的條件下可得 $p \sim q$ 之結論。現最後大略說明一般並不一定可得 $p \sim q$ 的結論。

定理6：我們可建造兩個首一多項式， p ， q ，其皆具整數係數，且 p 與 q 有相同的根， p' 與 q' 有相同的根，但 $p \sim q$ 不成立。

證：我們如能找到兩個有理數為係數的多項式 p ， q 滿足所要求的條件就可以了。特別我們若能找到一個具有有理數為係數的首1多項

式 $p(x)$ ，其滿足

$$x^4(x-1)(x+5) \mid p'(x)$$

及使得對所有 $p(x)$ 的根 $x_i, i=1, 2, \dots, k$,

$$\frac{(x_i-1)^2(x_i+5)}{x_i} = q_i \quad (4)$$

q_i 為正有理數且至少有兩個值不相等。

因如果我們可建造如此的一多項式 $p(x)$:

$$p(x) = \prod_{i=1}^k (x - x_i)^{n_i}$$

及

$$q(x) = \prod_{i=1}^k (x - x_i)^{m_i}$$

其中

$$n_i = d \frac{m_i q_i}{\deg p}, d \text{ 爲一正整數} \quad (5)$$

使得 $n_i (1 \leq i \leq k)$ 皆爲整數。

現依據輔理 1，我們有

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k n_i &= \frac{d}{\deg p} \sum_{i=1}^k m_i \frac{(x_i-1)^2(x_i+5)}{x_i^3} \\ &= \frac{d}{\deg p} \cdot \deg p \\ &= d \end{aligned}$$

故

$$d = \deg q$$

及對所有的 i

$$\frac{v(x_i)}{u(x_i)} = q_i = \frac{(x_i-1)^2(x_i+5)}{x_i^3}$$

現因

$$v_0(x) = \frac{u(x)(x-1)^2(x+5)}{x^3}$$

爲一次數 $(k-1)$ 的多項式，且滿足對任何 $i, 1 \leq i \leq k$

$$v_0(x_i) = v(x_i) = q_i u(x_i)$$

因此

$$v_0(x) = v(x) \text{ 及 } p \leftrightarrow q$$

現我們取 p^2 代 p ， q^2 代 q ，則不難見 p^2 及 q^2 有相同的根， $(p^2)'$ 及 $(q^2)'$ 亦有相同的根。而 p^3 及 q^2 間無 $p^2 \sim q^2$ 之關係，是由於條件 (4) k 個 q_i 取的值至少有兩個爲不同的，及式 (5) 可得

$$\{m_1, \dots, m_k\} \text{ 與 } \{n_1, n_2, \dots, n_k\}$$

不可能逐項成比例。證明到此告結束。

在證明上定理，條件 (4) 的成立是主要關鍵，却並沒給予證明，原因是由於所用的步驟涉及一些較冗長的向量及矩陣的計算。有興趣的讀者可向 M. Roitman 教授 (Haifa university Isreal) 索取 [3] 有關的論文。

最後筆者在此提出一個似乎比命題 1 較難的二個問題：

- (1) 設 p, q 爲兩多項式， n 爲一個大於 1 但小於 $\min(\deg p, \deg q)$ 的正整數，若 $p = 0 \iff q = 0$ 及 $p^{(n)} = 0 \iff q^{(n)} = 0$ ，則 p, q 有何關係？
- (2) 有無兩多項式 p, q ，其至少皆有二個不同的根，而滿足 $p = 0 \iff q = 0$ 及 $p^{(m)} = 0 \iff p^{(n)} = 0$ ， m, n 爲某兩個不等的正整數？

參考文獻

1. 楊重駿“一些有關多項式的問題”，數播第八卷第二期，1984 pp. 43-47.
2. Chung-Chun Yang, "A Problem on Polynomials", *Rev. Roum. Math. Pures et Appl.*, XXII (1977), pp. 595-598.
3. M. Roitman, On Roots of Polynomials and their derivatives, Dept of Math. Haifa mirersity. Report # 36, Sept 1981.

——本文作者任職於美國海軍研究實驗所——

純多項式的 k 次方展開

唐翰文

定理：若

$$\begin{aligned} f(x) &= (1+x+x^2+\cdots+x^n)^k \\ &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_rx^r + \cdots \\ &\quad + a_nx^{nk} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{則 } a_r &= S(k, r) - C(k, 1)S(k, r-n-1) \\ &\quad + C(k, 2)S(k, r-2n-2) + \cdots \\ &\quad + (-1)^k C(k, k)S(k, r-nk-n) \\ &\quad + \cdots \end{aligned}$$

證明：

1. $f(x) = (1+x+x^2+\cdots+x^n)^k$ 。首先我們求當“ $r \leq n$ ”時之 a_r 值。現令

$$\begin{aligned} f(x) &= (1+x+x^2+\cdots+x^n)^k \\ &= g^k(x) = g(x) \cdot g(x) \cdots g(x) \end{aligned}$$

在 k 項 $g(x) = (1+x+x^2+\cdots+x^n)$ 中，取每一個 $g(x)$ 中的 x^b 項（ b 為變數等於0或1或2……或 n ）所有 k 項 $g(x)$ 之 x^b 之乘積，其指數和等於 r 而 a_r 可視為在此條件下符合者的總個數和。

$\therefore x^r = x^{b_1} \cdot x^{b_2} \cdots x^{b_k}$ （在此定義 $b_1, b_2, \dots$ 以便區分從不同 $g(x)$ 中取出）

$$\therefore r = b_1 + b_2 + \cdots + b_k$$

$b_1, b_2, b_3 \cdots b_k$ 都是0到 n 的整數。可以取重複組合求得其總個數 $S(k, r)$ ，故得知 $a_r = S(k, r)$ 此乃在“ $r \leq n$ ”條件下才能成立，與若 $r > n$ 時 b 可能也會大於 n 與原來定義 b 在0到 n 的範圍不符，故此時

$$a_r = S(k, r)。$$

2. 通式的證明

$$\begin{aligned} f(x) &= (1+x+x^2+\cdots+x^n)^k \\ &= \frac{(1-x)^k}{(1-x)^k} (1+x+x^2+\cdots+x^n)^k \\ &= \frac{(1-x^{n+1})^k}{(1-x)^k} \\ &= (1-x^{n+1})^k \left[\frac{1-x^{n+1}+x^{n+1}}{1-x} \right]^k \\ &= (1-x^{n+1})^k \left[(1+x+x^2+\cdots+x^n) + \frac{x^{n+1}}{1-x} \right]^k \\ &= (1-x^{n+1})^k (1+x+x^2+\cdots+x^n)^k \\ &\quad + x^{n+1} \cdot p(x) \end{aligned}$$

其中 $p(x)$ 為 $-x$ 的多項式，若我們考慮對所有 $m \in N$ 使得 $m \geq nk$ 。我們不難發現對 $f(x)$ 之展開式中的任一項 x^r （ $0 \leq r \leq nk$ ）必存在於 $(1-x^{n+1})^k (1+x+x^2+\cdots+x^n)^k$ 中而不存在於 $x^{n+1} \cdot p(x)$ （因 $m+1 > nk$ ）

現將原式展開

$$\begin{aligned} &(1-x^{n+1})^k (1+x+x^2+\cdots+x^n)^k \\ &= (1+x+x^2+\cdots+x^n)^k \\ &\quad - C(k, 1)(1+x+x^2+\cdots+x^n)^k x^{n+1} + \cdots \\ &\quad + (-1)^k C(k, k)(1+x+x^2+\cdots+x^n)^k x^{(n+1)k} \end{aligned}$$

內所展開的各項觀察知 $f(x) = (1+x+x^2+\dots+x^n)^k$ 展開式中某項係數。

$$\begin{aligned} a_r = & S(k, r) - C(k, 1)S(k, r-n-1) \\ & + C(k, 2)S(k, r-2n-2) + \dots \\ & + (-1)^k C(k, k)S(k, r-nk-k) \\ & \dots\dots\dots(1) \end{aligned}$$

試用範圍：

1. r 的定義範圍：(原來範圍在零到 nk)

一個有限項的多項式亦可視其為無窮多項，只要我們將不包含此項的係數視為零而已。因此現可將 r 定義為負無窮大與無窮大之間的一個整數，而並不只在 0 到 nk 間的整數。由此我們也可得到，當 r 不在 0 至 nk 範圍時 a_r 必為 0。

例： $f(x) = (1+x+x^2)^4$ 展開式最高次數項只到 x^8 ，因此

$$\begin{aligned} a_9 = & S(4, 9) - C(4, 1)S(4, 6) \\ & + C(4, 2)S(4, 3) - C(4, 3)S(4, 0) \\ = & 220 - 4 \times 84 + 6 \times 20 - 4 = 0 \end{aligned}$$

同理， $a_{10}, a_{11}, a_{12}, \dots$ 皆為零。

此外我們還要求證當 $r < 0$ 時， $S(k, r)$ 為何為零，現考慮 $-f(x) = (1+x+x^2+\dots+x^n+\dots)^k$ ，由前面知 $a_r = S(k, r)$ 因展開式中無 r 小於零之項，故當 $r < 0$ ， $S(k, r) = 0$ ，此乃為了使此公式在整數的範圍內更具完備性而已。

2. k 的定義範圍(原來 k 的範圍是大於零的整數)

(a)推廣成大於零的實數：我們先觀察 $f(x) = (1+x+x^2+\dots+x^{n-1}+\dots)^k$ 的形式，原式也

等於 $\frac{1}{(1-x)^{\frac{1}{k}}}$ 而對 x 取導函數得

$$\frac{f'(x)}{1!} = \frac{-k \cdot (-1)}{(1-x)^{k+1}} = \frac{k}{(1-x)^{k+1}}$$

$$\frac{f''(x)}{2!} = \frac{k(-k-1)(-1)}{(1-x)^{k+2} 2!} = \frac{k(k+1)}{(1-x)^{k+2} 2!}$$

$$\frac{f^{(r)}(x)}{r!} = \frac{k(k+1)(k+2)\dots(k+r-1)}{(1-x)^{k+r} r!}$$

由泰勒展開式得

$$\begin{aligned} a_r = \frac{f^{(r)}(0)}{r!} &= \frac{k(k+1)\dots(k+r-1)}{r!} \\ &= S(k, r) = \frac{(k+r-1)(k+r-2)\dots k}{r!} \\ &= C(k+r-1, r) \end{aligned}$$

因此我們可知， k 若是大於零的實數也成立。

同理，我們求 $f(x) = (1+x+x^2+\dots+x^n)^k$ 的某項係數時，可將 $f(x)$ 變成 $\frac{(1-x^{n+1})^k}{(1-x)^k}$ 將其展開，得

$$\begin{aligned} f(x) = & \frac{1}{(1-x)^k} (1 - C(k, 1)x^{n+1} \\ & + C(k, 2)x^{2n+2} \dots + (-1)^k C(k, k)x^{kn+k}) \\ = & (1+x+x^2+\dots)(1 - C(k, 1)x^{n+1} \\ & + C(k, 2)x^{2n+2} + \dots) \end{aligned}$$

因我們已知當 k 是大於零的實數，同樣適合於二項式 $(1-x^{n+1})^k$ 的展開，因此 $f(x)$ 展開式中， a_r 即等於

$$\begin{aligned} & S(k, r) - C(k, 1)S(k, r-n-1) \\ & + C(k, 2)S(k, r-2n-2) \end{aligned}$$

此時我們已將 k 的範圍擴展到實數(大於零)。

(b) k 也可為小於零的實數：當 $k < 0$ 時對於(a)部分的泰勒展開同樣適合，只是有一點我們需注意的無論 $k > 0$ 或 $k \leq 0$ ， $f(x)$ 若以 $x=0$ 的泰勒展開絕無 $r < 0$ 的項，因 $x=0$ 不是 $f(x)$ 的一個支點，故由前面得，當 $r < 0$ 時 $S(k, r) = 0$ (k 是實數)。

舉例：

1. 求 $(1+x+x^2+x^3)^{3/2}$ 的泰勒展開式。

解：

$$a_0 = 1, a_1 = S\left(\frac{3}{2}, 1\right) = 1.5,$$

$$a_2 = S\left(\frac{3}{2}, 2\right) = \frac{\frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2}}{2} = \frac{15}{8} = 1.875,$$

$$a_3 = S\left(\frac{3}{2}, 3\right) = \frac{35}{16} = 2.1875,$$

$$a_4 = S\left(\frac{3}{2}, 4\right) - C\left(\frac{3}{2}, 1\right)S\left(\frac{2}{3}, 0\right) = 0.961,$$

$$a_5 = S\left(\frac{3}{2}, 5\right) - C\left(\frac{3}{2}, 1\right)S\left(\frac{3}{2}, 1\right) = 0.457,$$

$$\begin{aligned} \therefore (1+x+x^2+x^3)^{3/2} \\ = 1 + 1.5x + 1.875x^2 + 2.1875x^3 + 0.961x^4 \\ + 0.457x^5 \end{aligned}$$

理論的推廣：

1. $f(x) = (1+x+x^2+\dots+x^n)^k$ ，使 $n=0$ ，則 $f(x) - 1^k = 1$ 。因此常數項 $a_0 = 1$ ，其餘 a_r 之值皆為零。

$$\begin{aligned} \therefore a_r &= S(k, r) - C(k, 1)S(k, r-n-1) \\ &\quad + C(k, 2)S(k, r-2n-2) \dots \\ n=0 \text{ 則 } a_r &= S(k, r) - C(k, 1)S(k, r-1) \\ &\quad + C(k, 2)S(k, r-2) \dots = 0, \text{ 當然 } r \text{ 是非} \\ &\quad \text{零的整數，而 } k \text{ 適合於所有的實數} \dots (2) \end{aligned}$$

舉例：

(a) 令 $k=3, r=3$ ，則

$$\begin{aligned} S(3, 3) - C(3, 1)S(3, 2) + C(3, 2)S(3, 1) \\ - C(3, 3)S(3, 0) = 10 - 3 \times 6 + 3 \times 3 - 1 = 0 \end{aligned}$$

(b) 令 $k=\sqrt{2}, r=3$ 則

$$\begin{aligned} S(\sqrt{2}, 3) - C(\sqrt{2}, 1)S(\sqrt{2}, 2) \\ + C(\sqrt{2}, 2)S(\sqrt{2}, 1) \\ - C(\sqrt{2}, 3)S(\sqrt{2}, 0) \\ = \frac{\sqrt{2} \cdot (\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}+2)}{6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & -\sqrt{2} \frac{\sqrt{2} \cdot (\sqrt{2}+1)}{2} \\ & + \frac{\sqrt{2} \cdot (\sqrt{2}-1)}{2} \cdot \sqrt{2} \\ & - \frac{\sqrt{2} \cdot (\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}-2)}{6} \cdot 1 \\ & = 0 \end{aligned}$$

2. 使 $n=1$ ，則

$$\begin{aligned} f(x) &= (1+x)^k \\ &= C(k, 0) + C(k, 1)x + \dots + C(k, r)x^r \\ &\quad + \dots + C(k, k)x^k \end{aligned}$$

而當 $n=1, a_r = S(k, r) - C(k, 1)S(k, r-2) + C(k, 2)S(k, r-4) \dots$ 此值即等於 $C(k, r)$ ，(k 為實數) $\dots (3)$

3. 若 k 為正整數，則 $f(x) = (1+x+x^2+\dots+x^n)^k$ 可展開成

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{nk}x^{nk}$$

兩式同除 x^{nk} 得

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{x^n} + \frac{1}{x^{n-1}} + \dots + 1 \right)^k \\ &= \frac{a_0}{x^{nk}} + \frac{a_1}{x^{n(k-1)}} + \dots + a_{nk} \\ &\Rightarrow \left(1 + \left(\frac{1}{x} \right) + \left(\frac{1}{x} \right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{x} \right)^n \right)^k \\ &= a_{nk} + \frac{a_{n(k-1)}}{x} + \dots + \frac{a_0}{x^{nk}} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow a_0 = a_{nk}, a_1 = a_{n(k-1)}, \dots, a_r = a_{n(k-r)}$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow S(k, r) - C(k, 1)S(k, r-n-1) + \dots \\ &= S(k, nk-r) - C(k, 1)S(k, nk-r-n-1) \\ &\quad + \dots \dots \dots (4) \end{aligned}$$

此番道理就如同 $C(k, r) = C(k, k-r)$ 一樣。

4. k 是正整數時，

$$\begin{aligned} f(1) &= (n+1)^k = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{nk} \\ &= \sum_{r=0}^{nk} [S(k, r) - C(k, 1)S(k, r-n-1) \\ &\quad + C(k, 2)S(k, r-2n-2) - \dots] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{r=0}^{nk} S(k, r) - C(k, 1) \sum_{r=0}^{nk} S(k, r-n-1) \\
&\quad + C(k, 2) \sum_{r=0}^{nk} S(k, r-2n-2) - \dots] \\
&= S(k+1, nk) - C(k, 1) S(k, nk-n-1) \\
&\quad + C(k, 2) S(k, nk-2n-2) - \dots \\
&= C(k(n+1), nk) \\
&\quad - C((k-1)C((k-1)(n+1), nk-n-1) \\
&\quad + C(k, 2)C((k-2)(n+1), nk-2n-2) \dots \\
&= C(k(n+1), k) - C(k, 1)C(k-1)(n+1)k \\
&\quad + C(k, 2)C((k-2)(n+1), k) - \dots \\
\Rightarrow n^k &= C(nk, k) - C(k, 1)C(nk-n, k) \\
&\quad + C(k, 2)C(nk-2n, k) \dots \dots \dots (5)
\end{aligned}$$

已知 k 是個正整數， $f(x)$ 之展開是屬於有限項的展開，因此大於 nk 之項的係數必為零，即 $a_{nk+1} = 0$ ， $a_{nk+2} = 0$ ， $\dots$

由上我們也可將上述定理(5)推廣成

$$\begin{aligned}
n^k &= C(nk+m, k) - C(k, 1)C(nk-n+m, k) \\
&\quad + C(k, 2)C(nk-2n+m, k) - \dots \dots \dots \\
&\quad (\text{其中 } m \text{ 為大於或等於零之整數}) \dots \dots \dots (6)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{如 } 81 &= 3^4 = C(12, 4) - C(4, 1)C(9, 4) \\
&\quad + C(4, 2)C(6, 4) \\
&= C(13, 4) - C(4, 1)C(10, 4) \\
&\quad + C(4, 2)C(7, 4) - C(4, 3)C(4, 4) \\
&= C(14, 4) - C(4, 1)C(11, 4) \\
&\quad + C(4, 2)C(8, 4) - C(4, 3)C(5, 4)
\end{aligned}$$

5. 現考慮 $f(x) = (1+x+x^2+\dots+x^n)^{-k}$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{(1+x+x^2+\dots+x^n)^k} \\
&= \frac{(1-x)^k}{(1-x^{n+1})^k} \\
&= (1+x^{n+1}+x^{2n+2}+\dots)^k (1-x)^k \\
&= (1+x^{n+1}+x^{2n+2}+\dots)^k (1-C(k, 1)x \\
&\quad + C(k, 2)x^2 - \dots)
\end{aligned}$$

展開各項觀察知， x^r 係數， a_r

$$a_r = S(k, \frac{r}{n+1}) - C(k, 1)S(k, \frac{r-1}{n+1})$$

$$+ C(k, 2)S(k, \frac{r-2}{n+1})$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} S(k, \frac{r-i}{n+1}) \dots \dots \dots (8)$$

此種表示法純粹是爲了方便起見，當然，當

$\frac{r-i}{n+1}$ 不是整數時， $S(k, \frac{r-i}{n+1}) = 0$ ，而且

前面我們也知道當 $\frac{r-i}{n+1} < 0$ 時，無論 k 爲何值

$$S(k, \frac{r-i}{n+1}) = 0。$$

到目前爲止，我們還沒有討論到 k 到底要是什麼數，是不是只能爲正整數？其實，上述的推導過程，完全符合 k 爲實數的定義，而且我們還可得到一恒等式，就是定理(1)和(8)所得的 a_r 值必相等。

$$\begin{aligned}
\therefore a_r &= S(k, \frac{r}{n+1}) - C(k, 1)S(k, \frac{r-1}{n+1}) \\
&\quad + C(k, 2)S(k, \frac{r-2}{n+1}) - \dots \dots \dots \\
&= S(-k, r) - C(-k, 1)S(-k, r-n-1) \\
&\quad + C(-k, 2)S(-k, r-2n-2) - \dots \dots \dots (9)
\end{aligned}$$

例：我們展開 $(1+x+x^2)^{-2}$ ， $k=2$ ， $n=2$

$$\begin{aligned}
a_0 &= S(2, 0/3) = S(-2, 0) = 1 \\
a_1 &= S(2, 1/3) - C(2, 1)S(2, 0/3) \\
&= S(-2, 1) = -2 \\
a_2 &= S(2, 2/3) - C(2, 1)S(2, 1/3) \\
&\quad + C(2, 2)S(2, 0) \\
&= S(-2, 2) = 1 \\
a_3 &= S(2, 3/3) - C(2, 1)S(2, 2/3) \\
&\quad + C(2, 2)S(2, 1/3) = 2 \\
&= S(-2, 3) - C(-2, 1)S(-2, 0) \\
&= 0 - (-2) = 2 \\
&\vdots \quad \quad \quad \vdots
\end{aligned}$$

$$\therefore (1+x+x^2)^{-2} = 1 - 2x + x^2 + 2x^3 + \dots$$

若估計 $(1, 11)^{-2}$ 可得

$$(1.11)^{-2} \doteq 1 - 0.2 + 0.01 + 0.002 = 0.812$$

總結：

以上我們所討論到的公式定理有

- (1) $n \in N, k \in R, r \in z, f(x) = (1+x+x^2+\cdots+x^n)^k$ 展開式中, x^r 的係數

$$a_r = S(k, r) - C(k, 1)S(k, r-n-1) \\ + C(k, 2)S(k, r-2n-2) \cdots$$

$$= S(k, \frac{r}{n+1}) - C(k, 1)S(k, \frac{r-1}{n+1}) \\ + C(k, 2)S(k, \frac{r-2}{n+1}) \cdots$$

若 k 為正整數, 則當 $r < 0$ 或 $r > nk$ 時
 $a_r = 0$ 。

- (2) $k \in R, r \in z - \{0\}$,

$$S(k, r) - C(k, 1)S(k, r-1) \\ + C(k, 2)S(k, r-2) - \cdots = 0$$

- (3) $k \in R, r \in z$,

$$S(k, r) - C(k, 1)S(k, r-2) \\ + C(k, 2)S(k, r-4) - \cdots = C(k, r)$$

- (4) $k \in N, r \in z, n \in N$,

$$S(k, r) - C(k, 1)S(k, r-n-1) + \cdots \\ = S(k, nk-r) - C(k, 1)S(k, nk-r-n-1) \\ \cdots \text{即 } a_r = a_{nk-r}$$

- (5) $n \in N, k \in N, m \in N \cup \{0\}$

$$n^k = C(nk+m, k) - C(k, 1)C(nk-n+m, k) \\ + C(k, 2)C(nk-2n+m, k) - \cdots$$

理論上一點應用：

重複做一試驗 n 次 (n 次獨立相同試驗), 其各種不同之成功 (或失敗) 次數的機率為二項機率分佈。今考慮另一問題: 重複做一試驗直至 k 次成功為止。令 p 表試驗失敗之機率, $1-p$ 表成功之機率, 而令 X 表第 k 次成功以前失敗之次數, 則 $X=x$ 之機率為

$$(1-p)^x p^k S(k, x)。$$

我們要證明此一公式不難, 現已知 k 行的

失敗次數的變數 x , 且最後一次的試行必定成功, 因此最後一次以前的試行次數全部有 $k+x-1$ 次, 其中包括 $k-1$ 次的成功及 x 次的失敗, 其排列數有 $C(k+x-1)$ 或 $C(k+x-1, k-1)$, 而每一種的排列情形機率都為 $p^x (1-p)^{k-1}$ 故試行 x 次失敗的機率為 $C(k+x-1, x) p^x (1-p)^{k-1}$ 亦即為 $S(k, x) p^x (1-p)^k$ 。

現暫以 a_x 表示 $(1-p)^k p^x S(k, x)$, 我們不難發現此 a_x 即是 $f(y) = (1-p)^k (1+py+p^2y^2+\cdots+p^ny^n+\cdots)^k$ 展開式中 y 的 x 次方的係數, 而且 x 由零到無窮大。我們可由此來驗證機率和等於 1。

$$\sum_{x=0}^{\infty} S(k, x) p^x (1-p)^k = (1-p)^k \sum_{x=0}^{\infty} p^x S(k, x) \\ = (1-p)^k (1+p+p^2+\cdots+p^n+\cdots)^k \\ = (1-p)^k \cdot \left(\frac{1}{1-p}\right)^k = 1$$

例 1: 投擲一公正的銅板, 投到出現 5 次反面為此, 求在此情形下投出 0, 1, 2, 3, \cdots 各次正面的機率。

解: $p = \frac{1}{2}, k = 5$

$$a_0 = \left(1 - \frac{1}{2}\right)^5 (0.5)^0 S(5, 0) = 0.03125,$$

$$a_1 = \left(1 - \frac{1}{2}\right)^5 (0.5)^1 S(5, 1) = 0.078125,$$

$$a_2 = \left(1 - \frac{1}{2}\right)^5 (0.5)^2 S(5, 2) = 0.1172。$$

X 的期望值

$$E(x) = \sum_{i=0}^{\infty} i (1-p)^k p^i S(k, i) \\ = (1-p)^k \sum_{i=0}^{\infty} p^i \frac{(k+i-1)!}{(i-1)!(k-1)!} \\ = (1-p)^k k p \sum_{i=0}^{\infty} p^{i-1} S(k+1, i-1) \\ = k p (1-p)^k (1+p+p^2+\cdots)^{k+1} = \frac{k p}{1-p}。$$

變異數

$$\text{Var}(x) = E(x^2) - E^2(x)$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{i=0}^{\infty} i^2 (1-p)^k p^i S(k, i) - \frac{k^2 p^2}{(1-p)^2} \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} i(i-1)(1-p)^k p^i S(k, i) \\ &\quad + \sum_{i=0}^{\infty} i(1-p)^k p^i S(k, i) - \frac{k^2 p^2}{(1-p)^2} \\ &= \frac{k(k+1)p^2}{(1-p)^2} + \frac{kp}{(1-p)} - \frac{k^2 p^2}{(1-p)^2} \\ &= \frac{kp}{(1-p)^2}, \end{aligned}$$

$$\therefore \sigma^2 = \frac{kp}{(1-p)^2} \Rightarrow \sigma = \frac{\sqrt{kp}}{(1-p)}$$

卜式分配 (Poisson distribution)

現考慮 $\lambda = kp$ 為一定值，則 $p = \frac{\lambda}{k}$ 因此

$$a_x = \left(1 - \frac{\lambda}{k}\right)^k \left(\frac{\lambda}{k}\right)^x \frac{(k+x-1)!}{x!(k-1)!}$$

當 $k \rightarrow \infty$ 則有

$$a_x = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\lambda}{k}\right)^k \left(\frac{\lambda}{k}\right)^x \frac{(k+x-1)!}{x!(k-1)!}$$

$$\Rightarrow a_x = \frac{\lambda^x}{x!} \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\lambda}{k}\right)^{(-x/\lambda)(-\lambda)}$$

$$\cdot \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(k+x-1)!}{k^x(k-1)!}$$

$$\Rightarrow a_x = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} \quad \text{此即為卜式分配。}$$

例 2：某生丟一粒骰子，直到丟出兩次 1 點才肯罷休，問全部丟出 12 次的機率多大？平均丟多少次？標準誤差？

$$\text{解：(1) } k=2, p=\frac{5}{6},$$

$$a_{12} = \left(1 - \frac{5}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^{10} S(2, 10)$$

$$= 0.049, \text{ 機率 } 0.049。$$

$$(2) \mu = \frac{kp}{1-p} = \frac{2 \cdot \frac{5}{6}}{1 - \frac{5}{6}} = 10$$

$n = 10 + 2 = 12$ ，平均投 12 次。

$$(3) \sigma^2 = \text{Var}(x+2) = \text{Var}(x)$$

$$\Rightarrow \sigma = \frac{\sqrt{kp}}{1-p} = \frac{\sqrt{\frac{10}{6}}}{1 - \frac{5}{6}} = \sqrt{60} = 2\sqrt{15}。$$

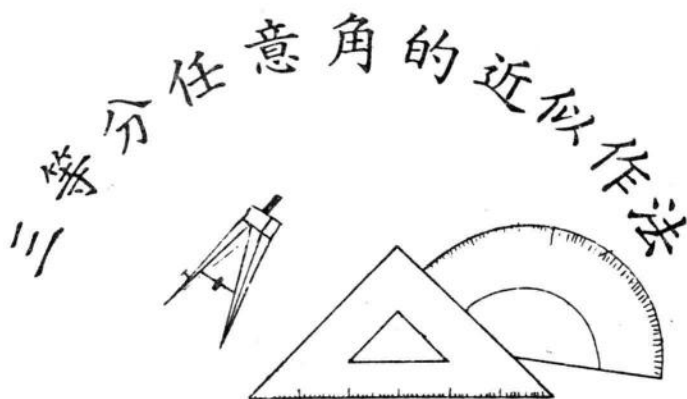
例 3：若要從一工廠中拿出 1000 個合乎樣品規格的产品，不合乎規格的即予淘汰，直至拿到 1000 個合乎規格的产品為止，假設原不合格产品佔總成品之 0.5% 且視為不變，問拿到不合格产品低於 5 個的機率。

解： $\lambda = 1000 \cdot 0.5\% = 5$

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^4 \frac{e^{-\lambda} \lambda^i}{i!} &= e^{-5} \left(1 + 5^1 + \frac{5^2}{2} + \frac{5^3}{6} + \frac{5^4}{24}\right) \\ &= 0.44 \end{aligned}$$

故機率為 0.44

~本文作者就讀於交大管研所~



緒言：

二等分任意角在初級數學，即已為人熟悉，而三等分任意角為古希臘三大難題之一，用圓規、直尺確實無法做到，19世紀 Galois 和 Causs 等人所建立的方程式論，更證實此一事實。這裡介紹一個簡單的證法：

因為只要找到一個角不可三等分即可：設一已知角 θ ，且 $\cos \theta = g$ ，則變成求 $X = \cos(\theta/3)$ 的值，

由三角公式： $\cos \theta = g$

$$= 4\cos^3\left(\frac{\theta}{3}\right) - 3\cos\left(\frac{\theta}{3}\right)$$

$$\Rightarrow 4x^3 - 3x = g$$

$$\text{取 } \theta = 60^\circ \quad \text{則 } g = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow 8x^3 - 6x = 1$$

我們只需證此式無有理根即可

$$\therefore \text{令 } V = 2x$$

$$\Rightarrow V^3 - 3V = 1$$

則若有有理根 $\frac{r}{s}$ (r, s 互質)

$$\Rightarrow (r/s)^3 - 3(r/s) = 1$$

$$\Rightarrow r^3 - 3s^2r = s^3$$

$$\Rightarrow r(r^2 - 3s^2) = s^3$$

若 $r^2 - 3s^2 = 0$ 則 $r = 0, s = 0$ 不合

$\therefore r$ 為 s 的因數

$\therefore$ 方程式無有理根 (得證)

(有關超越數和代數數的理論可參閱 F. Klein, Famous Problems of elementary geometry)

前陣偶翻到「數學傳播」26期，一位蓋廟多年的老師傅，以他數十年來的經驗，提出此一構想，並送至本校數學系研究，登出黃武雄教授簡化的方法。經過驗算因發現簡化的作法乃適合銳角部分，所以將原法亦分述於後，並利用 MBASIC (Cp/M-80) 計算誤差，均不超過 0.3%，十分準確。

一、作圖法：

(一)原法：已知： $\angle XOY$ 為任意角

求作：三等分 $\angle XOY$ 的兩射線

作法：1. 以 O 為圓心，任意長為半徑，交 $\overrightarrow{OX}$ ， $\overrightarrow{OY}$ 及其反射線於 H, J, K, L 。

2. 作 $\overrightarrow{OZ}$ 平分 $\angle XOY$ ，交 HJ 於 Q ，連接 OK 。

3. 作 $\overrightarrow{OS} \perp \overrightarrow{OX}$ ，交 OK 於 P 。

4. 以 K 為圓心， HK 為半徑，作一弧交 $\overrightarrow{OZ}$ 於 R 。

5. 在 $\overrightarrow{OZ}$ 上取 I ，使 $\overrightarrow{RI} = \overrightarrow{QP}$ 。

7. $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{ON}$ 即為所求

誤差計算：

若 $\angle YOM$ 可表為 $\angle YOX$ 的函數，則誤差可由 $g(x) - x/3$ 來計算，所以我們將圖形座標化。令 $\vec{OX}$ 為縱軸， $\vec{OS}$ 為橫軸， $\vec{OH}$ 長度為 1，

則(1)H點座標H (0 , 1)

J點座標J ($\sin X$, $\cos X$)

K點座標K (0 , - 1)

L點座標 $L(-\sin X, -\cos X)$

Q點座標 $Q\left(\sin \frac{x}{2}, \cos \frac{x}{2}\right)$

(2) 線段 $QP = QK - PK$

$$= 2 \cos \left(\frac{x}{4} \right) - \sec \left(\frac{x}{4} \right)$$

$$= 2 \cos\left(\frac{x}{4}\right) - \frac{1}{\cos\left(\frac{x}{4}\right)}$$

$$= \frac{2 \cos^2 \left(\frac{x}{4} \right) - 1}{\cos \left(\frac{x}{4} \right)}$$

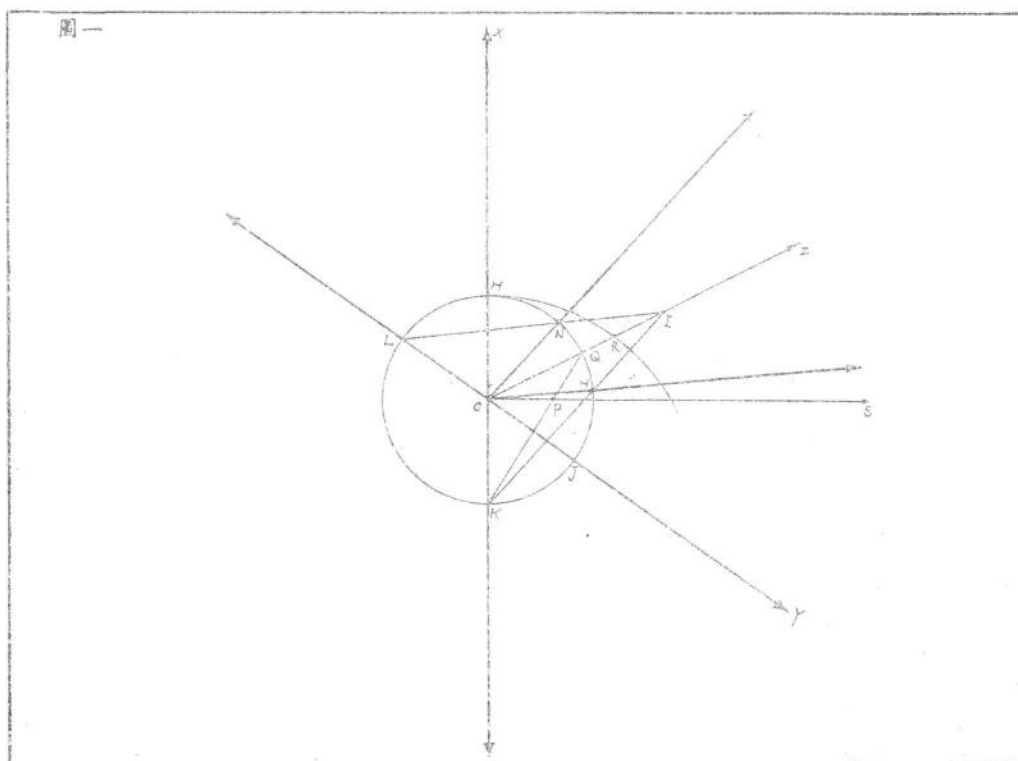
$$= \frac{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x}{4}\right)}$$

(3) 求 $\overline{IO}$ 線段長： $\overline{IO} = \overline{RO} + \overline{QP}$

①以參數式表 $\vec{OZ}$ ， t 為參數

$$X = t \sin \left(\frac{x}{2} \right)$$

$$Y = t \cos \left(\frac{x}{2} \right)$$



②圓K的方程式為 $X^2 + (Y+1)^2 = 4$

∴求①、②交點則：

$$X^2 + (Y+1)^2 = 4$$

$$\Rightarrow \left[t \sin\left(\frac{x}{2}\right) \right]^2 + \left[t \cos\left(\frac{x}{2}\right) \right]^2$$

$$+ 1)^2 = 4$$

$$\Rightarrow t^2 \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) + t^2 \cos^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$+ 2t \cos\left(\frac{x}{2}\right) + 1 = 4$$

$$\Rightarrow t^2 + 2t \cos\left(\frac{x}{2}\right) - 3 = 0$$

$$\Rightarrow t = -\cos\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\pm \sqrt{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) + 3}$$

(負不取)

OR =

$$\sqrt{\left[t \sin\left(\frac{x}{2}\right) \right]^2 + \left[t \cos\left(\frac{x}{2}\right) \right]^2}$$

$$= |t|$$

$$= -\cos\left(\frac{x}{2}\right) + \sqrt{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) + 3}$$

$$\textcircled{3} \therefore \overline{IO} = -\cos\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{\cos(x/2)}{\cos(x/4)}$$

$$+ \sqrt{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) + 3}$$

(令 $\overline{IO} = C$)

$$4) \text{ I 點座標 } I \left(C \sin\left(\frac{x}{2}\right), C \cos\left(\frac{x}{2}\right) \right)$$

(為方便令I點座標 $I(a, b)$)

(5)求解M點座標

①設KI 方程式參數式

$$X = at$$

$$Y = -1 + (b+1)t$$

②圓O方程式： $X^2 + Y^2 = 1$

③解得： $(at)^2 + [1 + (b+1)t]^2 = 1$

$$\Rightarrow a^2 t^2 + (b+1)^2 t^2 - 2(b+1)t = 0$$

$$\Rightarrow t \{ a^2 + (b+1)^2 \} = 2(b+1)$$

$$\Rightarrow t = \frac{2(b+1)}{a^2 + (b+1)^2}$$

代入 $M[at, -1 + (b+1)t]$

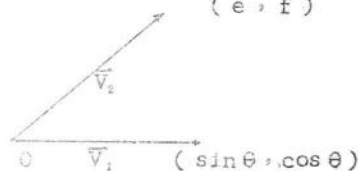
$$\Rightarrow M \left[\frac{2a(b+1)}{a^2 + (b+1)^2}, \frac{(b+1)^2 - a^2}{a^2 + (b+1)^2} \right]$$

(令M座標為 $M(e, f)$)

(6) $\angle MOY$ 可由如此解出

$$|V_1| \cdot |V_2| \cos \theta = V_1 \cdot V_2$$

(e, f)



$$\therefore \cos \theta = e \sin \theta + f \cos \theta$$

(V_1, V_2 在圓上長度均為1)

$$\Rightarrow \theta = \cos^{-1}(e \sin \theta + f \cos \theta) = g(x)$$

如此計算的誤差，銳角部分，最大在 80° 左右，不過為0.107%，鈍角部分在 160° 時為-0.285%，所顯示工程上的意義遠超過數學，「近似三等分角」在工程上是極需要，極為有用的。

TABLE 1

x	$x/3$	$\angle MOY$	ERROR
5	1.666666666667	1.666478859128	-0.000112684523
10	3.333333333333	3.333282152241	-0.000015354328
15	5.000000000000	5.000356731931	0.000071346386
20	6.666666666667	6.667568342290	0.000135251344
25	8.333333333333	8.335077065879	0.000209247905
30	10.000000000000	10.002945228172	0.000294522817
35	11.666666666667	11.671176244266	0.000386535223
40	13.333333333333	13.339830732088	0.000487304907
45	15.000000000000	15.008876248239	0.000591749883
50	16.666666666667	16.678258151200	0.000695489072
55	18.333333333333	18.347950827784	0.000797317879
60	20.000000000000	20.017807428899	0.000890371445
65	21.666666666667	21.687628171522	0.000967454070
70	23.333333333333	23.357375489611	0.001030378126
75	25.000000000000	25.026730071823	0.001069202873
80	26.666666666667	26.695454569084	0.001079546341
85	28.333333333333	28.363330415340	0.001058720541
90	30.000000000000	30.030009270944	0.001000309031
95	31.666666666667	31.695199145310	0.000901025641
100	33.333333333333	33.358575604451	0.000757268134
105	35.000000000000	35.019814214381	0.000566120411
110	36.666666666667	36.678699824142	0.000328177022
115	38.333333333333	38.334962641263	0.000042503685
120	40.000000000000	39.988548024228	-0.000286299394
125	41.666666666667	41.639394501336	-0.000654531968
130	43.333333333333	43.287785525438	-0.001051103259
135	45.000000000000	44.934165058829	-0.001462998693
140	46.666666666667	46.579325403454	-0.001871598497
145	48.333333333333	48.224482332983	-0.002252089662
150	50.000000000000	49.871449262643	-0.002571014747
155	51.666666666667	51.522637249210	-0.002787666144
160	53.333333333333	53.181345274053	-0.002849776112
165	55.000000000000	54.851937828052	-0.002692039490
170	56.666666666667	56.540036156893	-0.002234656055
175	58.333333333333	58.252975883746	-0.001377556279
180	60.000000000000	60.000001669652	0.000000027828

二、簡化法：

作法：1. 以O點為圓心，任意單位長為半徑，
作一圓O交軸 $\overline{XX'}$ 於C點、C'點，
交 $\overline{OY}$ 於A點。

2. 以C'為圓心， $\overline{CC'}$ 線段為半徑再作
圓弧交 $\overline{OY}$ 於D點。

3. 連結 $\overline{AC'}$ 交橫軸於B點。

4. $\overline{OY}$ 上取E點，使 $\overline{DE} = \overline{AB}$ 。

5. 連結 $\overline{EC'}$ ，交圓於G點。

6. 於O點作 $\overline{OH}$ 平行 $\overline{EC'}$ ，再作 $\overline{OI}$

，平行 $\angle XOY$ ，則 $\overline{OH}$ 、 $\overline{OI}$ 為所求。

說明：在此作法中 $\overline{OF}$ 線段長近似 $\overline{EF}$ 線段
長，若 $\overline{OG} = \overline{EG}$ ，則 $\angle OEC' = \angle EOG$ 。

因此 $\angle XOY = \angle OEC' + \angle OC'G$
 $= \angle OEC' + \angle OGC'$
 $= \angle OEC' + (\angle OEC' + \angle EOG)$
 $= 3 \angle OEC'$
 $= 3 \angle EOH$