精英计划
JINGYINGJIHUA
考研数学系列丛书

2013年考研数学
线性代数讲义

主编◎李擂　张宇

总策划◎跨考数学考试研究中心

考研一线辅导专家强强联手，十年磨一剑的经验积累，打造“线代”经典讲义！

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

2013年考研数学
线性代数讲义

主　编：李擂　张宇
副主编：张伟　费允杰　张天德
总策划：跨考数学考试研究中心

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目（CIP）数据

考研数学线性代数讲义/李擂，张宇主编．—北京：北京理工大学出版社，2012.3

ISBN 978-7-5640-5692-6

Ⅰ.①考… Ⅱ.①李…②张… Ⅲ.①线性代数-研究生-入学考试-自学参考资料 Ⅳ.①O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字（2012）第039775号

出版发行/北京理工大学出版社
社　　址/北京市海淀区中关村南大街5号
邮　　编/100081
电　　话/（010）68914775（办公室）　68944990（批销中心）　68911084（读者服务部）
网　　址/http：//www.bitpress.com.cn
经　　销/全国各地新华书店
印　　刷/三河市文阁印刷厂
开　　本/787毫米×1092毫米　1/16
印　　张/11.5
字　　数/213千字
版　　次/2012年3月第1版　2012年3月第1次印刷　　责任校对/周瑞红
定　　价/19.80元　　责任印制/边心超

前　言

从1987年到现在，全国研究生入学考试已经走过了26个年头。对于每年逾百万的考生来说，面对这一年一度改变命运、主动选择自己未来人生道路的机会，面对日益激烈、趋于白热化的竞争势态，我们需要破釜沉舟、豪赌一年青春的勇气；也需要咬紧牙关、坚持到底的决心；更需要科学的指导、合理的规划以及高效的复习方法。作为在教学第一线奋战多年的教师，我们时常被考生的努力与坚持所感动，也时常为不少考生复习方法与方向的偏差所惋惜。这种感动和惋惜催生了一种责任、一种期望：一种将我们多年积淀的教学成果传递开去的责任，一种让更多考生从容面对考研的期望。

线性代数是考研数学的必考科目，每年共考查五道试题（2道选择题、1道填空题、2道解答题），满分33～34分。这个学科的特点是概念多、运算多，知识点之间多相互渗透、相互关联，可谓牵一发而动全身。考生在复习线性代数的时候往往会遇到两个主要的问题：一是对基本概念的理解不准确、不到位，或是不熟悉基本运算，计算错误率高；二是无法把握知识点之间的相互关联性，知识体系混乱。

针对学科的特点以及考研数学实际的要求，我们设计了这本《线性代数讲义》。全书在编排和设计上力图向考生真实地呈现考试的具体要求，勾画出一个清晰而完整的知识体系，从而帮助考生提高复习效率，在最短的时间内实现整个学科的攻关，为冲击考研数学的高分打下基础。

具体来说，本书有如下特点：

第一，重视整体知识框架的构建和知识体系内逻辑关系的再现。在每一章的开头都有知识网络图以及针对所考查的重难点进行的准确而精要的概括；同时，对大部分重要的概念（矩阵的可逆性、线性方程组、矩阵的相似对角化等），都力图从整个学科多个角度予以阐释，帮助考生系统梳理知识体系，形成对学科知识整体的认识。另外，本书在编排时，打乱了部分知识点原有的次序，而按照其逻辑关系和考试的具体要求进行了重新的组合和优化。如对秩的概念，由于矩阵的秩与向量组的秩本身联系紧密，加之考试对这两部分的考查一般来说都是相互关联、相互渗透的，那么，像大部分教材及辅导书一样，将这两部分分到矩阵以及向量这两章分别讲解并不利于考生的掌握。所以，在本书中，我们将两部分巧妙地组合起来，统一放在向量部分的第二节进行系统讲解。

第二，重视考生对基本概念的理解和对基本运算的掌握。相对于其他学科，线性代数中的概念更为抽象，运算更为繁琐，每一年都有很多考生丢分在最基本的问题上。鉴于此，我们在编写本书时更加注重对知识点进行精确的阐述和清晰的解释。针对重要的概念、性质和定理，都适当添加了有助于考生理解的注释。它们是我们多年教学经验的结晶，只希望能给广大考生的复习带来帮助。

第三，重视思想方法的归纳和总结。在每一节中都有对本部分考点的解析和方法技

巧的总结，所有的例题都按照考试的要求进行了归类，对主要的思想方法都有精要的概括总结，力求帮助考生正确认识考试的具体要求，最高效地掌握主要的解题思路和方法技巧。

第四，在每一章的最后，都设置了针对本章主要内容和考点而精选出的练习题，以帮助考生保持足够的训练量，达到考试中解题熟练度和准确度的要求。我们建议考生在使用本书时，不但要独立完成每章最后的练习题，并且，对于所有的例题也要自己先做一遍，然后再与书中所给的解题过程进行对照。

最后，希望本书能成为考生在复习线性代数过程中的良师益友。由于时间仓促和编者本身水平有限，如果书中有不足乃至纰漏之处，希望广大考生与专家不吝批评指正。本书是跨考教育数学教研室集体智慧的结晶，在此，向所有对本书付出过努力和做出过贡献的老师表示由衷的感谢。

Contents 目录

第一章　行列式

知识框架图

- 定义与性质
  - 定义:不同行不同列所有 n 项元素乘积的代数和
  - 性质
    - 交换行与列,行列式的值不变
    - 交换两行(列),行列式变号
    - 某行(列)有公倍数 k,可以将 k 提出
    - 某行(列)的 k 倍加至另一行(列),行列式的值不变
- 展开定理
  - 按行展开:$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{kj}=\begin{cases} a_{i1}A_{k1}+a_{i2}A_{k2}+\cdots+a_{in}A_{kn}=0 & (i\neq k)\\ a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}=|\boldsymbol{A}| & (i=k)\end{cases}$
  - 按列展开:$\sum_{j=1}^{n} a_{ji}A_{jk}=\begin{cases} a_{1i}A_{1k}+a_{2i}A_{2k}+\cdots+a_{ni}A_{nk}=0 & (i\neq k)\\ a_{1i}A_{1i}+a_{2i}A_{2i}+\cdots+a_{ni}A_{ni}=|\boldsymbol{A}| & (i=k)\end{cases}$
- 常见公式
  - 矩阵
    - $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|,\ |k\boldsymbol{A}|=k^n|\boldsymbol{A}|,\ |\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{BA}|$
    - $|\boldsymbol{A}^{-1}|=\dfrac{1}{|\boldsymbol{A}|},\ |\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}$
    - $\begin{vmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{B}\end{vmatrix}=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$
    - $\begin{vmatrix}\boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}_{n\times n}\\ \boldsymbol{A}_{m\times m} & \boldsymbol{C}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{C} & \boldsymbol{B}_{n\times n}\\ \boldsymbol{A}_{m\times m} & \boldsymbol{O}\end{vmatrix}=(-1)^{mn}|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$
  - 特征值:$|\boldsymbol{A}|=\prod_{i=1}^{n}\lambda_i$
- 行列式的应用
  - 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆 $\Leftrightarrow|\boldsymbol{A}|\neq 0$
  - $\boldsymbol{AA}^*=\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$
  - $\boldsymbol{A}_{n\times n}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 有唯一解 $\Leftrightarrow|\boldsymbol{A}|\neq 0$
  - n 维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关 $\Leftrightarrow|\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n|\neq 0$
  - 计算矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值:$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$
  - 实对称矩阵正定的充要条件:顺序主子式全为正

概述

行列式是线性代数中最基本的运算之一,其计算方法灵活多变,与后续章节联系很多,出题方式非常多变,是考生在接触线性代数后面临的第一道关卡.

从考试的角度看,本章的主要考点有:

(1) 行列式的定义和性质;

(2) 行列式的展开定理;

(3) 利用矩阵以及特征值的相关知识计算行列式.

考生在复习本章时，应该注意如下三个方面：单从本章的内容来说，要理解行列式的定义、性质和展开定理，并掌握利用它们计算各种类型的数值型行列式的方法；从与其他章节结合的角度来说，要掌握矩阵的各种运算以及特征值与行列式的关系，并掌握利用它们计算各种抽象型行列式的方法；最后，从整个学科知识体系的角度来说，还需要全面总结行列式在整个理论体系中的应用，从而达到对整个学科的融会贯通.

第一节　行列式的定义

内容概要

基本概念

1. 排列与逆序

(1) **排列**：由 n 个自然数 $1,2,3,\cdots,n$ 组成的无重复有序实数组 $i_1,i_2,\cdots,i_n$ 称为一个 n 级排列.

注：n 级排列共有 $n!$ 个.

(2) **逆序**：在一个 n 级排列中，如果一个较大数排在一个较小数前面，我们就称这两个数构成一个**逆序**. 对于逆序，我们感兴趣的是一个 n 级排列 $i_1,i_2,\cdots,i_n$ 中逆序的总数，称为 n 级排列 $i_1,i_2,\cdots,i_n$ 的**逆序数**，记作 $\tau(i_1,i_2,\cdots,i_n)$.

如果 n 级排列 $i_1,i_2,\cdots,i_n$ 的逆序数是偶数，则 $i_1,i_2,\cdots,i_n$ 称为**偶排列**；如果 n 级排列 $i_1,i_2,\cdots,i_n$ 的逆序数是奇数，则 $i_1,i_2,\cdots,i_n$ 称为**奇排列**.

注：在 n 级排列中，奇排列和偶排列各占 $\frac{n!}{2}$ 个.

2. 行列式

n 阶行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 是一种运算法则，它是行列式中所有取自**不同行不同列**元素乘积的**代数和**. 它由 $n!$ 项组成，其中每一项都是行列式中 n 个不同行不同列元素的乘积，将这 n 项的行数按照自然顺序排列，假设此时其列数为 $i_1,i_2,\cdots,i_n$，当 $i_1,i_2,\cdots,i_n$ 为偶排列时，符号为正；当 $i_1,i_2,\cdots,i_n$ 为奇排列时，符号为负，也即：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i_1,i_2,\cdots,i_n} (-1)^{\tau(i_1,i_2,\cdots,i_n)} a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}.$$

注：对于初学者来说，最困难的是正确理解行列式的定义，我们从如下三个方面予以说明：

(1) 由于 n 级排列共有 $n!$ 个，可知 n 阶行列式的完全展开式中共有 $n!$ 项.

(2) 要注意区分行列式和矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$. 首先，从概念上讲，行列式是一个运算法则，其运算结果是一个数，是展开式中 $n!$ 项的代数和，而矩阵是一个数表，二者从本质上讲有区别. 其次，从形式上看，行列式的阵中行数和列数必须一样(即行列式都是“正方形”的)，而矩阵中两者可以不一样.

(3) 行列式的定义中，最核心的是“不同行”“不同列”以及“代数和”这三个限制语. 具体来说：行列式的完全展开式的 $n!$ 项中，每一项都是取自不同行不同列的 n 项元素的乘积，而每一项又根据其行和列指标的排列顺序在前面加上了正号或者负号.

考点精析与方法技巧点拨

(1) 从定义出发可以直接推出二阶行列式、三阶行列式、上三角行列式和下三角行列式的计算公式：

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc,$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}=a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2-a_3b_2c_1-a_2b_1c_3-a_1b_3c_2,$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n-1,n} & a_{nn} \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}.$$

它们是我们计算更复杂的行列式的基础. 考生可以尝试通过行列式的定义推导上述计算公式.

(2) 行列式的定义也可以写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{j_1,j_2,\cdots,j_n}(-1)^{\tau(j_1,j_2,\cdots,j_n)}a_{j_11}a_{j_22}\cdots a_{j_nn}$$

$$=\sum(-1)^{\tau(j_1,j_2,\cdots,j_n)+\tau(i_1,i_2,\cdots,i_n)}a_{j_1i_1}a_{j_2i_2}\cdots a_{j_ni_n}.$$

精讲精练

一、有关逆序的计算

例 1.1 试计算下列 n 级排列的逆序数.

(1)$n,n-1,\cdots,1$; (2)$3,4,\cdots,n,1,2$.

解 (1)$n,n-1,\cdots,1$ 是完全倒序的排列,$n,n-1,\cdots,1$ 中任意两个数都构成逆序,可知其逆序数 $\tau(n,n-1,\cdots,1)=C_n^2=\dfrac{n(n-1)}{2}$.

(2)$3,4,\cdots,n$ 这 $n-2$ 个数每一个都与 $1,2$ 构成逆序,故 $\tau(3,4,\cdots,n,1,2)=2(n-2)$.

二、对行列式定义的考查

例 1.2 假设 $f(x)=\begin{vmatrix} 2x & x & 2 & 3 \\ 1 & x & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 3x & -1 \\ 2 & 5 & 3 & x \end{vmatrix}$,试计算 $f(x)$ 中 x^4 与 x^3 的系数.

解 由行列式的定义可知,$f(x)$ 是一个 4 次多项式.

在 $f(x)$ 的展开式中,要取出 x^4,则只有对角线上四项相乘,也即 $2x\cdot x\cdot 3x\cdot x=6x^4$. 由于此时列指标的排列顺序为 $1,2,3,4$,逆序数为 0,可知 x^4 的系数为 6.

类似要取出 x^3,则只有 $a_{12}\cdot a_{21}\cdot a_{33}\cdot a_{44}=x\cdot 1\cdot 3x\cdot x=3x^3$,由于此时列指标的排列顺序为 $2,1,3,4$,逆序数为 1,可知 x^3 的系数为 -3.

例 1.3 计算 n 阶行列式 $D_n=\begin{vmatrix} 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$.

解 由于该行列式中每一行有且仅有一个非零元,故行列式的完全展开式中也有且仅有一项非零. 也即 $a_1a_2\cdots a_n$,它的列指标排列顺序为 $2,3,\cdots,n,1$,其逆序数为 $\tau(2,3,\cdots,n,1)=n-1$. 故 $D_n=(-1)^{n-1}a_1a_2\cdots a_n$.

第二节 行列式的性质与展开定理

内容概要

一、行列式的性质

性质一:将行列式的行和列互换后,行列式的值不变,也即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

性质二:将行列式的任意两行(或两列)互换位置后,行列式改变符号.

推论 1:如果行列式有两行(或两列)相同,则行列式的值为 0.

性质三:将行列式的某一行(或某一列)乘以一个常数 k 后,行列式的值变为原来的 k 倍.

推论 2:如果一个行列式的某一行(或某一列)全为 0,则行列式的值等于 0.

推论 3:如果一个行列式的某两行(或某两列)元素对应成比例,则行列式的值等于 0.

性质四:如果行列式某一行(或某一列)的所有元素都可以写成两个元素的和,则该行列式可以写成两个行列式的和,这两个行列式的这一行(或列)分别为对应的两个加数,其余行(或列)与原行列式相等. 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

推论 4:将行列式的一行(或列)的 k 倍加到另一行(或列)上,行列式的值不变.

注:对于上述性质,考生可以不用掌握证明过程,但需要熟练掌握利用它们对行列式进行变形或发现行列式的特殊性质,进而计算行列式的方法.

二、行列式的展开定理

1. 余子式

将元素 a_{ij} 所在的行和列划掉之后得到 $n-1$ 阶行列式,称之为元素 a_{ij} 的余子式,记作 M_{ij},

$$M_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1(j-1)} & a_{1(j+1)} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2(j-1)} & a_{2(j+1)} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{(i-1)1} & a_{(i-1)2} & \cdots & a_{(i-1)(j-1)} & a_{(i-1)(j+1)} & \cdots & a_{(i-1)n} \\ a_{(i+1)1} & a_{(i+1)2} & \cdots & a_{(i+1)(j-1)} & a_{(i+1)(j+1)} & \cdots & a_{(i+1)n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n(j-1)} & a_{n(j+1)} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

给余子式加上符号 $(-1)^{i+j}$ 则成为**代数余子式**,记作 $A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$.

2. 行列式按行按列的展开定理

行列式的值等于其任何一行(或列)所有元素与其代数余子式乘积之和,即

$$|\boldsymbol{A}| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \qquad (i = 1,2,\cdots,n)$$

$$= a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} \qquad (j = 1,2,\cdots,n)$$

推论:行列式的一行(或列)所有元素与另一行(或列)对应元素的代数余子式的乘积之和为零,即

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{kj} = a_{i1}A_{k1} + a_{i2}A_{k2} + \cdots + a_{in}A_{kn} = 0 \qquad (i \neq k)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ji}A_{jk} = a_{1i}A_{1k} + a_{2i}A_{2k} + \cdots + a_{ni}A_{nk} = 0 \qquad (i \neq k)$$

3. 两种特殊的拉普拉斯展开式

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{D} & \boldsymbol{B} \end{vmatrix} = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|, \begin{vmatrix} \boldsymbol{C} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{A} & \boldsymbol{D} \end{vmatrix} = (-1)^{mn} |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|,$$

其中,$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 分别为 m 阶,n 阶方阵.

考点精析与方法技巧点拨

(1) 行列式的性质可以结合矩阵的初等变换来理解,它们实质上是告诉我们对矩阵(方阵)做初等变换时,行列式的值的变化情况:交换两行(列),行列式变号;某行(列)乘以常数 k,行列式的值变为 k 倍;将一行(列)的若干倍加至另一行(列),行列式不变.利用行列式的这些性质,我们可以对行列式进行变形、化简,进而计算出行列式.

(2) 行列式展开定理在行列式的计算中有非常重要的作用,通过它我们可以实现对行列式的“降阶”,这是计算行列式的主要思路之一.

(3) 利用行列式的性质与展开定理,我们还可以得到范德蒙行列式的计算公式:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (a_j - a_i).$$

考生可以不用掌握该公式的证明过程,记住结论即可.

精讲精练

一、低阶行列式的计算

1. 直接计算

例 1.4 设 a,b 为实数,则当 $a =$ ______,且 $b =$ ______时,$\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ -b & a & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0$.

【分析】 直接计算或展开.

解 $\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ -b & a & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -a^2 - b^2 = 0$,所以 $a = b = 0$.

【评注】 三阶和二阶的行列式有计算公式，可以直接计算. 四阶或四阶以上的行列式则一般要通过展开定理化为低阶行列式进行计算，部分三阶行列式由于直接计算较为复杂，也要先利用展开定理"降阶"，再进行计算. 如下面两题.

2. 利用展开定理

例 1.5 解方程 $\begin{vmatrix} \lambda-3 & -1 & 2 \\ 2 & \lambda-3 & -1 \\ 2 & -1 & \lambda-3 \end{vmatrix}=0.$

解 本题是一个三阶行列式，有直接的计算公式，但运用起来比较麻烦，也不利于求解. 故考虑利用行列式的性质先化简，再计算.

将第一行的 -1 倍加到第三行：$\begin{vmatrix} \lambda-3 & -1 & 2 \\ 2 & \lambda-3 & -1 \\ 2 & -1 & \lambda-3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \lambda-3 & -1 & 2 \\ 2 & \lambda-3 & -1 \\ 5-\lambda & 0 & \lambda-5 \end{vmatrix}$，

再将第三列加到第一列，得 $\begin{vmatrix} \lambda-3 & -1 & 2 \\ 2 & \lambda-3 & -1 \\ 5-\lambda & 0 & \lambda-5 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & 2 \\ 1 & \lambda-3 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda-5 \end{vmatrix}=(\lambda-5)(\lambda-2)^2$，

故解 $\begin{vmatrix} \lambda-3 & -1 & 2 \\ 2 & \lambda-3 & -1 \\ 2 & -1 & \lambda-3 \end{vmatrix}=0$，得 $\lambda_1=5,\lambda_2=2$（2 重）.

例 1.6 方程 $\begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & 3 \\ 1 & \lambda-4 & 3 \\ -1 & -a & \lambda-5 \end{vmatrix}=0$ 有一个二重根，求 a.

解
$$\begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & 3 \\ 1 & \lambda-4 & 3 \\ -1 & -a & \lambda-5 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \lambda-2 & -(\lambda-2) & 0 \\ 1 & \lambda-4 & 3 \\ -1 & -a & \lambda-5 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \lambda-2 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda-3 & 3 \\ -1 & -a-1 & \lambda-5 \end{vmatrix}$$
$$=(\lambda-2)(\lambda^2-8\lambda+18+3a).$$

若 $\lambda=2$ 是方程的二重根，则有 $2^2-16+18+3a=0$，解得 $a=-2$.

若 $\lambda=2$ 不是方程的二重根，则 $\lambda^2-8\lambda+18+3a$ 为完全平方式，从而 $18+3a=16$，解得 $a=-\dfrac{2}{3}$.

【评注】 例 1.5 与例 1.6 实质上是考查相应矩阵特征值的计算. 求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，也就是计算行列式 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|$（以三阶的为主）. 在计算该行列式时，一般不直接利用公式展开，为了便于计算，可以通过行或列之间的加减提出一次因式（一般形如 $\lambda-a$），再求解二次方程. 这种计算方法考生一定要熟练掌握.

例 1.7(2012—1,2,3) 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ a & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，求 $|\boldsymbol{A}|$.

解 按照第一列展开得

$$\begin{vmatrix}1&a&0&0\\0&1&a&0\\0&0&1&a\\a&0&0&1\end{vmatrix}=1\times\begin{vmatrix}1&a&0\\0&1&a\\0&0&1\end{vmatrix}+a\times(-1)^{4+1}\begin{vmatrix}a&0&0\\1&a&0\\0&1&a\end{vmatrix}=1-a^4.$$

注:2012—1,2,3 表示 2012 年数学 1,2,3 真题,下同.

【评注】 低阶行列式计算的一般思路是:二阶和三阶的行列式可以直接利用计算公式;阶数更高或直接计算较为麻烦时,可以借助行列式的性质对行列式进行化简,或利用展开定理将行列式化为更低阶的行列式再进行计算.

3. 利用拉普拉斯展开式

例 1.8 四阶行列式 $\begin{vmatrix}a_1&0&0&b_1\\0&a_2&b_2&0\\0&b_3&a_3&0\\b_4&0&0&a_4\end{vmatrix}$ 的值等于( ).

(A)$a_1a_2a_3a_4-b_1b_2b_3b_4$　　(B)$a_1a_2a_3a_4+b_1b_2b_3b_4$

(C)$(a_1a_2-b_1b_2)(a_3a_4-b_3b_4)$　　(D)$(a_2a_3-b_2b_3)(a_1a_4-b_1b_4)$

解 先将第四行分别和第三行及第二行交换,得

$$D=\begin{vmatrix}a_1&0&0&b_1\\0&a_2&b_2&0\\0&b_3&a_3&0\\b_4&0&0&a_4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_1&0&0&b_1\\b_4&0&0&a_4\\0&a_2&b_2&0\\0&b_3&a_3&0\end{vmatrix},$$

再将第四列分别和第三列及第二列交换,得

$$D=\begin{vmatrix}a_1&0&0&b_1\\b_4&0&0&a_4\\0&a_2&b_2&0\\0&b_3&a_3&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_1&b_1&0&0\\b_4&a_4&0&0\\0&0&a_2&b_2\\0&0&b_3&a_3\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}a_1&b_1\\b_4&a_4\end{vmatrix}\begin{vmatrix}a_2&b_2\\b_3&a_3\end{vmatrix}=(a_2a_3-b_2b_3)(a_1a_4-b_1b_4).$$

故选(D).

例 1.9 记 $f(x)=\begin{vmatrix}x-2&x-1&x-2&x-3\\2x-2&2x-1&2x-2&2x-3\\3x-3&3x-2&4x-5&3x-5\\4x&4x-3&5x-7&4x-3\end{vmatrix}$,则方程 $f(x)=0$ 的根的个数为(包括虚根)________.

【分析】 多项式根的个数等于其次数,根据行列式的定义,$f(x)$ 最高为 4 次多项式,但由于高次项有可能相互抵消,故仍需先利用行列式的性质进行化简.

解 求方程 $f(x)=0$ 的根的个数,即求 $f(x)$ 为 x 的几次多项式.

注意到行列式的每列元素中 x 的系数是大致相同的,故将第一列的 -1 倍分别加到第二三四列,得

$$f(x)=\begin{vmatrix} x-2 & 1 & 0 & -1 \\ 2x-2 & 1 & 0 & -1 \\ 3x-3 & 1 & x-2 & -2 \\ 4x & -3 & x-7 & -3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x-2 & 1 & 0 & 0 \\ 2x-2 & 1 & 0 & 0 \\ 3x-3 & 1 & x-2 & -1 \\ 4x & -3 & x-7 & -6 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} x-2 & 1 \\ 2x-2 & 1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} x-2 & -1 \\ x-7 & -6 \end{vmatrix}=5x(x-1),$$

所以方程 $f(x)=0$ 的根的个数为 2.

【评注】 拉普拉斯展开式是分块矩阵行列式的一种计算公式,它们可以看做是展开定理的推广.事实上,它们在计算行列式中的作用与展开定理也类似,都是将高阶行列式降阶,而利用分块矩阵的方法对行列式进行降阶往往比展开定理效率更高.一般来说,如果行列式中有较多的 0,就可以考虑先通过矩阵的初等行变换将这些 0 集中起来,如果此时的行列式可以写成分块矩阵的形式,就可以利用公式进行计算.

4. 利用范德蒙行列式

例 1.10 计算 $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \\ b+c+d & a+c+d & a+b+d & a+b+c \end{vmatrix}$.

解 注意到行列式的第一行与第四行对应元素之和均为 $a+b+c+d$,故可以将第一行加到第四行:

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \\ b+c+d & a+c+d & a+b+d & a+b+c \end{vmatrix}=(a+b+c+d)\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

再对后面的行列式经过三次交换,把第四行换到第一行即得

$$原式=-(a+b+c+d)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}$$

$$=-(a+b+c+d)(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c).$$

例 1.11 计算 $\begin{vmatrix} a_1^3 & a_1^2b_1 & a_1b_1^2 & b_1^3 \\ a_2^3 & a_2^2b_2 & a_2b_2^2 & b_2^3 \\ a_3^3 & a_3^2b_3 & a_3b_3^2 & b_3^3 \\ a_4^3 & a_4^2b_4 & a_4b_4^2 & b_4^3 \end{vmatrix}$, $(a_1,\cdots,a_4\neq 0)$.

【分析】 从行列式的形式很容易联想到范德蒙行列式，注意到每行的元素是成等比规律递变的，为了将它变为范德蒙行列式，可以在每一行提出公因式，将第一个元素变为1.

解 原式

$$=\begin{vmatrix} a_1^3 & a_1^2b_1 & a_1b_1^2 & b_1^3 \\ a_2^3 & a_2^2b_2 & a_2b_2^2 & b_2^3 \\ a_3^3 & a_3^2b_3 & a_3b_3^2 & b_3^3 \\ a_4^3 & a_4^2b_4 & a_4b_4^2 & b_4^3 \end{vmatrix} = a_1^3a_2^3a_3^3a_4^3\begin{vmatrix} 1 & b_1/a_1 & (b_1/a_1)^2 & (b_1/a_1)^3 \\ 1 & b_2/a_2 & (b_2/a_2)^2 & (b_2/a_2)^3 \\ 1 & b_3/a_3 & (b_3/a_3)^2 & (b_3/a_3)^3 \\ 1 & b_4/a_4 & (b_4/a_4)^2 & (b_4/a_4)^3 \end{vmatrix}$$

$$= a_1^3a_2^3a_3^3a_4^3\prod_{1\leqslant i<j\leqslant 4}\left(\frac{b_j}{a_j}-\frac{b_i}{a_i}\right).$$

【评注】 考生需要熟记范德蒙行列式的形式，一般来说，在利用它进行计算时，都需要对待求的行列式进行变形，才能利用公式计算.

二、高阶行列式的计算

1. 三角化

例 1.12 计算 $\begin{vmatrix} a_0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_1 & & & \\ 1 & & a_2 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ 1 & & & & a_n \end{vmatrix}$，$(a_i\neq 0, i=1,\cdots,n)$.

解 注意到该行列式与上三角行列式比较接近，故可以考虑利用行列式的性质将其三角化：即通过将第 $2,3,\cdots,n+1$ 列的 $\dfrac{-1}{a_1},\dfrac{-1}{a_2},\cdots,\dfrac{-1}{a_n}$ 分别加到第一列，即得到：

$$D_n=\begin{vmatrix} a_0-\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{a_i} & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix} = a_1a_2\cdots a_n\left(a_0-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right).$$

【评注】"爪型"行列式是高阶行列式中一种基本的类型，计算它的基本思路是"三角化". 考生可以自行推导一下与它类似的下面行列式的计算公式：

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & a_0 \\ & & & a_1 & 1 \\ & & a_2 & & 1 \\ & \iddots & & & \vdots \\ a_n & & & & 1 \end{vmatrix}, (a_i\neq 0, i=1,\cdots,n).$$

例 1.13 计算 $\begin{vmatrix} 1+a & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2+a & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & n & \cdots & n+a \end{vmatrix}$.

解 (方法一)将 2 至 n 行所有元素均加至第一行得

$$\begin{vmatrix} 1+a & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2+a & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & n & \cdots & n+a \end{vmatrix} = \left[\frac{n(n+1)}{2}+a\right]\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2+a & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & n & \cdots & n+a \end{vmatrix},$$

故将第一行的 $-i$ 倍加至第 i 行($i=2,3,\cdots,n$)得

$$原式 = \left[\frac{n(n+1)}{2}+a\right]\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a \end{vmatrix} = \left[\frac{n(n+1)}{2}+a\right]a^{n-1}.$$

(方法二)将第一列的 -1 倍加至其他列可得

$$\begin{vmatrix} 1+a & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2+a & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & n & \cdots & n+a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+a & -a & \cdots & -a \\ 2 & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & 0 & \cdots & a \end{vmatrix}.$$

再将 2 至 n 行加至第一行得

$$\begin{vmatrix} 1+a & -a & \cdots & -a \\ 2 & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & 0 & \cdots & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{n(n+1)}{2}+a & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & 0 & \cdots & a \end{vmatrix} = \left[\frac{n(n+1)}{2}+a\right]a^{n-1}.$$

(方法三)将第一行的 $-i$ 倍加至第 i 行($i=2,3,\cdots,n$)得

$$\begin{vmatrix} 1+a & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2+a & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & n & \cdots & n+a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+a & 1 & \cdots & 1 \\ -2a & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -na & 0 & \cdots & a \end{vmatrix},$$

再将第 i 列的 i 倍加至第一列得($i=2,\cdots,n$)

$$\begin{vmatrix} 1+a & 1 & \cdots & 1 \\ -2a & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -na & 0 & \cdots & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{n(n+1)}{2}+a & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a \end{vmatrix} = \left[\frac{n(n+1)}{2}+a\right]a^{n-1}.$$