休姆斯題解叢書

1986

統計學

原理及題解

詹世煌 譯

含870個問題及解答

曉園出版社

統計學
原理及題解

詹世煌 譯

曉園出版社有限公司
HSIAO-YUAN PUBLICATION COMPANY LIMITED

國立中央圖書館出版品預行編目資料

統計學原理及題解 / Murray R. Spiegel 原著；詹世煌譯. -- 再版. -- 臺北市：曉園，1983
488面；17.2×23.2公分. -- (休姆斯題解叢書)
含索引
ISBN 957-12-0413-7(平裝)

1. 統計學 - 問題集

510.22　　　　80004345

書　名　統計學原理及題解
原著者　Murray R. Spiegel
譯著者　詹世煌
發行人　黃旭政
發行所　曉園出版社有限公司
臺北市青田街7巷5號
電話 3949931(六線)　傳眞 3417931
郵撥帳號 1075734-4
門市部　北市新生南路三段96號之3
電話 3627375　傳眞 3637012
印刷行　復大印刷廠
新聞局局版台業字第1244號
版　次　1983年7月初版第一刷
1992年7月初版第四刷

定　價　$300　港幣 57 元
ISBN 957-12-0413-7

序　言

統計學，或稱統計方法，在人類奮鬥的過程中，正扮演著愈來愈重要的角色。就以一國的事務來說，統計學的影響力已延伸到農業、生物、商業、化學、交通、經濟、教育、電子、醫藥、物理、政治科學、心理、社會和無以計數的其他科學和工程的範圍。

本書的目的乃介紹一般統計原則，此對任何部門的人都是非常有用的。它的安排可爲現行統計教科書的補充教材，亦可爲統計課的教科書；而在應用統計於個人特殊研究的問題上，本書亦是有相當價值的參考書。

每章的開頭，首先清晰而適當地說明定義、定理和原則，而後配以例題和敍述。此之後便是很多已解出的習題和補充問題，而這些題目的資料，則大都取自實際的統計。習題與解答乃用來詳細地說明理論和實例，使學者能夠抓住重點，而不致陷身於五里雲霧之中，同時藉諸重要基本原則的反覆陳述，以收教導的效果。在習題與解答中亦包含了不少已導出的公式。至若大量的補充習題與解答，則對每一章的內容再做一次完整的複習。

本書只要修過算術和基本代數便可了解。在本書中所用的一些重要數學概念，在第一章即加以說明，讀者可先讀此章，或待以後需要時，再回頭來參考。

本書先討論次數分配的分析，而後是集中趨勢、離勢、偏態和峯度等的測度。很自然地，再來便討論基本機率理論和應用，以爲抽樣理論的研究舖路。首先處理包含常態分配在內的大樣本抽樣理論，以便應用於統計推定、假設檢定與顯著性，至若包含學生 t 分配、卡方分配與其應用的小樣本抽樣理論，則於次章討論。有關曲線配置和最小平方法的一章，乃是爲包含二變數的廻歸和相關做前導，包含二變數以上的複相關和偏相關則分章討論，最後二章分別爲時間數列和指數的分析。

對初級課程而言，本書已包含了相當多的內容，如此可使本書更具彈性，不但更具參考價值，且可激勵學者在此課題上有更深一層的興趣。在使用本書時，可改變後面章節的順序，甚或省略某些章節，而不致遭遇到困擾。例如，若欲在抽樣理論之前先討論相關、廻歸、時間數列和指數，則在第 5 章之後即可介紹第 13～17章。同樣地，若不願爲機率花費太多的時間，則可省略第 6 章的大部份，就初級課程而言，第 15 章可全部省略。作者在編排上之所以取現在的這種方式，乃是在現行

統計課中有一種漸增的傾向，即愈早介紹抽樣理論與統計推論愈好。

我得感謝政府及某些私人機構，他們在資料上給予我很大的協助，這些參考資料與來源遍佈於本書。我特別得感謝 Professor Sir Ronald A. Fisher, F.R.S., Cambridge, Dr. Frank Yates, F.R.S., Rothamsted, 和 Messers. Oliver 與 Boyd Ltd., Edinburgh，他們允許我使用其 " Statistical Tables for Biological, Agricultural and Medical Research " 一書中表 III 的資料。

我亦得對 Schaum Publishing Company 的幕後人員致上我的謝忱，由於他們良好的合作精神，方能滿足作者似乎是永無休止的要求。

M. R. SPIEGEL

目　　錄

第 一 章

變數和圖形

統計學

統計學乃是收集、整理、彙總、陳述和分析資料，且對分析的結果導出有效的結論，而做合理決策的一種科學方法。

狹義而言，統計學通常被用來表資料本身，或由資料所導出來的數字，如平均數，故有所謂的就業統計、事故統計等。

母體和樣本、敍述統計學和歸納統計學

在收集如一大學學生的身高和體重，或某工廠某天所生產之螺絲釘的良品數和壞品數等之一群個體或物體的特性時，要對整個群體加以觀察是不可能或不切實際的，此尤以群體大時爲然。不檢驗整個群體，即所謂的母體，代之而起的，吾人僅檢驗群體的一小部份，此一小部份即爲所謂的樣本。

一母體可爲有限或無限。例如，某工廠某天所生產之所有螺絲釘所成的母體爲有限，但連續投一硬幣時之所有可能的現象（正、反）所成的母體爲無限。

若以一樣本代表一母體，則有關此母體的重要結論可由此樣本的分析來推得。討論此一推論爲有效情況的統計學，稱爲歸納統計學或統計推論。由於此種推論不能絕對地無誤，因此通常用機率語言來說明它的結論。

只用來陳述或分析一群資料，而不對較大之群體作任何之結論或推論的統計學，稱爲敍述統計學。

在討論統計學之前，我們先來複習一些重要的數學概念。

不連續變數和連續變數

變數爲一符號，如X，Y，H，x，B，它可爲一些值之集合中的任意值，此

集合稱為此變數的定義域。若一變數僅可為一值，則稱為常數。

若一變數在理論上可為二已知值間的任意值，則稱為連續變數，否則為不連續變數。

【例 1】 一家庭中的孩子數 N 可為 0，1，2，3，…中的任意值，但不能為 2.5 或 3.842，故 N 為一不連續變數。

【例 2】 某人的身高 H 依測量的精確度可為 62 英吋、63.8 英吋或 65.8341 英吋，故 H 為連續變數。

資料依其可由不連續或連續變數來描述，分別稱為不連續資料或連續資料。1000個家庭中每一家的孩子數為不連續資料之例，但 100 個大學生的身高為連續資料。通常由測量所得者為連續資料，而由計數或點計所得者，為不連續資料。

我們可將變數的概念推廣到非數量的物體。例如，彩虹中的顏色 C 為一變數，它可為“值”紅，橙，黃，綠，藍，靛和紫色。通常可用數量來表示此種變數，例如，以 1 表紅，2 表橙等。

資料的四捨五入

將 72.8 四捨五入到最近的個位為 73，此乃因 73 比 72 更接近 72.8。同樣的，72.8146 四捨五入到小數第二位為 72.81，因為 72.81 比 72.82 更接近 72.8146。

將 72.465 四捨五入到小數第二位時，我們便面臨到一種困境了，因 72.465 到 72.46 的距離與 72.47 相同。在此情形下，實務上若前一數為偶數，則將 5 捨去，故 72.465 四捨五入後為 72.46，183.575 四捨五入後為 183.58，116,500,000 四捨五入到百萬數為 116,000,000。當運算數目很多時，此法可使累積之四捨五入誤差為最小。

科學記號

當小數點之前或之後有很多零時，可用 10 的次冪之科學記號法來表示此數。

【例 1】 $10^1=10$，　$10^2=10\times10=100$，　$10^5=10\times10\times10\times10\times10=100,000$，$10^8=100,000,000$

【例 2】 $10^0=1$，　$10^{-1}=.1$ 或 0.1，　$10^{-2}=.01$ 或 0.01，　$10^{-5}=.00001$

【例 3】　$864,000,000=8.64\times10^{8}$，　$.00003416=3.416\times10^{-5}$

當乘上 10^{8} 時，小數點向右移 8 位；當乘上 10^{-6} 時，小數點向左移 6 位。

通常我們用括號或點來表二數或多個數的相乘。故 $(5)(3)=5\cdot3=5\times3=15$，$(10)(10)(10)=10\cdot10\cdot10=10\times10\times10=1000$。若以字母來表數字時，括號或點可以省略。例如 $ab=(a)(b)=a\cdot b=a\times b$。

科學記號在演算時相當有用，此尤以須指出小數點的位置時爲然。其使用時，用下述之法則

$$(10^{p})(10^{q})=10^{p+q},\qquad \frac{10^{p}}{10^{q}}=10^{p-q}$$

在此，p 和 q 爲任意數。

10^{p} 中，p 稱爲指數，而 10 稱爲底數。

【例 1】　$(10^{3})(10^{2})=1000\times100=100,000=10^{5}$　（即 10^{3+2}），

$$\frac{10^{6}}{10^{4}}=\frac{1,000,000}{10,000}=100=10^{2}\ （即\ 10^{6-4}）$$

【例 2】　$(4,000,000)(0.0000000002)=(4\times10^{6})(2\times10^{-10})=(4)(2)(10^{6})(10^{-10})$

$$=8\times10^{6-10}=8\times10^{-4}=0.0008$$

【例 3】　$$\frac{(0.006)(80,000)}{0.04}=\frac{(6\times10^{-3})(8\times10^{4})}{4\times10^{-2}}=\frac{48\times10^{1}}{4\times10^{-2}}=\left(\frac{48}{4}\right)\times10^{1-(-2)}$$

$$=12\times10^{3}=12,000$$

有效數字

若一身高的精確記錄爲 65.4 英吋，其意爲眞正的高度介於 65.35 和 65.45 英吋之間。精確的數字是暫不管確定小數點位置的零，稱爲此數之有效數字。

【例 1】　65.4 有 3 個有效數字。

【例 2】　4.5300 有 5 個有效數字。

【例 3】　$.0018=0.0018=1.8\times10^{-3}$ 有 2 個有效數字。

【例 4】　$.001800=0.001800=1.800\times10^{-3}$ 有四個有效數字。

相對於測量值，由計數或點計所得的數皆爲正確值，因此有無限多的有效數字。在某些此類情形下，若沒有更進一層的資料，則欲決定那一數字爲有效，得煞費思

量。例如，數 186,000,000 可有 3 ， 4 ，…， 9 個有效數字。若已知其有 5 個有效數字，則此數最好記錄爲 186.00 百萬或 1.8600×10^8 。

演　算

在做包含乘法、除法和方根之數的演算時，最後所得之結果的有效數字的位數，不能多於各數有效數字位數之最少者（見習題 9 ）。

【例 1 】　$73.24\times4.52=(73.24)(4.52)=331$

【例 2 】　$1.048/.023=72$

【例 3 】　$\sqrt{38.7}=6.22$

【例 4 】　$(8.416)(50)=420.8$，若 50 爲正確值。

在做數之加法和減法時，其最後所得之結果在小數點後的有效數字的位數，不能超過各數小數點後有效數字位數之最少者（見習題 10 ）。

【例 1 】　$3.16+2.7=5.9$

【例 2 】　$83.42-72=11$

【例 3 】　$47.816-25=22.816$，若 25 爲正確值。

上述之對加法和減法的法則可予以推廣（見習題 11 ）。

函　數

若變數 Y 的每一值，有一個或多個變數 X 的值與之對應，則謂 Y 爲 X 的一函數，寫成 $Y=F(X)$ 以說明其間的函數依存關係。亦可以 G ， ϕ 等字母來代表函數。

變數 X 稱爲自變數， Y 稱爲因變數。

若 X 的每一值僅有一 Y 值與之對應，則稱 Y 爲 X 的單值函數，否則稱爲 X 的複值函數。

【例 1 】　美國的人口數 P 爲時間 t 的函數，可寫爲 $P=F(t)$ 。

【例 2 】　一垂直彈簧的強度 S 爲置放於其底端之重量 W 的函數，即 $S=G(W)$ 。

變數間的函數依存關係或對應關係通常用表來敍述。但是它亦可用該變數的代數方程式來表示，如 $Y=2X-3$ ，此時 Y 值由對應之不同 X 值而定。

若$Y=F(X)$，則$F(3)$表$X=3$時的Y值，$F(10)$表$X=10$時的Y值等。故若$Y=F(X)=X^2$，則當$X=3$時，Y值爲$F(3)=3^2=9$。

函數的概念可推廣到兩個或多個變數的情形（見問題 17 ）。

直角坐標

考慮二互相垂直的直線$X'OX$和$Y'OY$，此分別稱爲X軸和Y軸（見圖 1-1 ），此圖中已標出適當的尺度。此二線將整個平面（稱爲 XY 平面）分割成四個區域，I，II，III，IV，此四區域分別稱爲第一，第二，第三和第四象限。

點O稱爲原點。對已知點P向X軸和Y軸作垂線，此垂線和X軸，Y軸的交點，其所得之X值和Y值稱爲P的坐標，或直角坐標，以(X,Y)表之。坐標X稱橫坐標，坐標Y稱爲縱坐標。圖 1-1 中點P的橫坐標爲 2，縱坐標爲 3，因而P的坐標爲$(2,3)$。

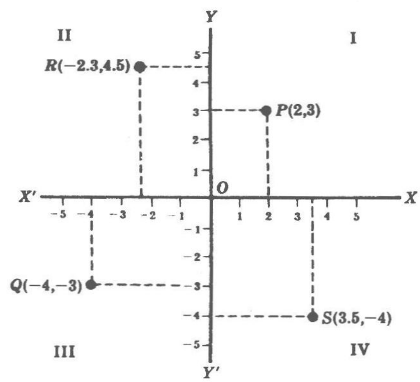

圖 1-1

相反的，若已知一點的坐標，我們可找出或繪出此點。故右圖中的點坐標（$-4,-3$），（$-2.3,4.5$）和（$3.5,-4$）可分別以Q，R和S來表示。

經過O點繪出Z軸而與XY平面垂直，則可將上述的概念加以推廣。在此情形下，點P的坐標以(X,Y,Z)來表示。

圖　形

圖形是變數間關係的圖形表現。統計學中用很多類的圖形，各類圖形的應用依資料的性質和圖形所要表達的目的而定。圖形有條形圖，圓形圖等。這些圖形有時亦稱爲圖（ chart ）或圖表（ diagram ）。

方程式

方程式爲形如$A=B$的述句，A稱爲方程式的左邊元素，B稱爲右邊元素。只

要對方程式的兩邊作同樣的運算，可得同義方程式。故在方程式兩邊加、減、乘、除同一值，可得一同義方程式，唯一的例外是不能除以 0 。

【例】 已知方程式 $2X+3=9$

兩邊減 3 ： $2X+3-3=9-3$ 或 $2X=6$

兩邊除以 2 ： $2X/2=6/2$ 或 $X=3$

X 值爲此一方程式的解。X 以 3 代，可得 $2(3)+3=9$ 或 $9=9$ ，此爲一恒等式。得到一方程式之解的過程稱爲解方程式。

上述的概念可推廣到二個方程式有二個未知數，三個方程式有三個未知數等的求解。這樣的方程式稱爲聯立方程式（見問題 30 ）。

不等式

符號 $<$ 和 $>$ 分別意謂“小於”和“大於”。符號 $\leqq$ 和 $\geqq$ 分別意謂“小於或等於”和“大於或等於”。上述之符號稱爲不等號。

【例 1 】 $3<5$ 讀成“ 3 小於 5 ”。

【例 2 】 $5>3$ 讀成“ 5 大於 3 ”。

【例 3 】 $X<8$ 讀成“ X 小於 8 ”。

【例 4 】 $X\geqq 10$ 讀成“ X 大於或等於 10 ”。

【例 5 】 $4<Y\leqq 6$ 讀成“ 4 小於 Y ，而 Y 小於或等於 6 ”，或“ Y 介於 4 和 6 之間，不包含 4 但包含 6 ”，或“ Y 大於 4 且小於或等於 6 ”。

包含不等號的關係稱爲不等式。正如我們稱等式中的元素一般，不等式 $4<Y\leqq 6$ 中， 4 ， Y 和 6 爲此不等式的元素。

在下列情形下，一有效的不等式仍爲有效：

(a) 從每一元素中加或減同一數。

【例】 由於 $15>12$ ， $15+3>12+3$ （即 $18>15$ ）且 $15-3>12-3$ （即 $12>9$ ）。

(b) 每一元素乘或除同一正數。

【例】 由於 $15>12$， $(15)(3)>(12)(3)$ （即 $45>36$） 且 $\frac{15}{3}>\frac{12}{3}$ （即 $5>4$ ）。

(c)　每一元素乘或除同一負數，但不等號的方向改變。

【例】　由於 $15>12$，$(15)(-3)<(12)(-3)$（即 $-45<-36$）且 $\frac{15}{-3}<\frac{12}{-3}$（即 $-5<-4$）。

對　數

每一正數 N 可表爲 10 的次冪，對 $N=10^p$，我們可求得 p，p 稱爲 N 以 10 爲底的對數，或 N 的常對數，簡寫成 $p=\log N$ 或 $p=\log_{10} N$。例如，由於 $1000=10^3$，$\log 1000=3$。同樣地，由於 $0.01=10^{-2}$，$\log 0.01=-2$。

當 N 爲介於 1 和 10 之間的數，即 10^0 和 10^1 時，由附錄中的對數表可求得 $p=\log N$ 爲介於 0 和 1 間的數。

【例 1】　欲求 $\log 2.36$，首先在左欄首 N 開始找起，直到二數字 23 爲止，而後往右到標爲 6 的一欄，其值爲 3729，因此 $\log 2.36=0.3729$，即 $2.36=10^{0.3729}$。

所有正數的對數，可由介於 1 和 10 間的對數來求得。

【例 2】　由例 1，$2.36=10^{0.3729}$，兩邊連乘 10，則

$$23.6=10^{1.3729},\ 236=10^{2.3729},\ 2360=10^{3.3729},\ \cdots$$

故　$\log 2.36=0.3729$，　$\log 23.6=1.3729$，　$\log 236=2.3729$，$\log 2360=3.3729$。

【例 3】　由於 $2.36=10^{0.3729}$，連除 10，得

$$0.236=10^{0.3729-1}=10^{-0.6271},\quad 0.0236=10^{0.3729-2}=10^{-1.6271},\ \cdots$$

通常我們寫 $0.3729-1$ 爲 $9.3729-10$ 或 $\overline{1}.3729$，$0.3729-2$ 爲 $8.3729-10$ 或 $\overline{2}.3729$ 等。故有

$$\log 0.236\ =9.3729-10=\overline{1}.3729=-0.6271$$

$$\log 0.0236=8.3729-10=\overline{2}.3729=-1.6271\text{，等。}$$

所有這些對數的小數部份 0.3729，稱爲尾數。尾數之小數點前的部份，即 1，2，3 或 $\overline{1}$，$\overline{2}$ 或 $9-10$，$8-10$，稱爲對數的首數。

下列之法則可很容易地加以證明：

(1) 大於 1 的數，其首數爲正，且比小數點前之位數少 1。

故 2360， 236， 23.6 和 2.36 之對數的首數爲 3， 2， 1， 0；且其對數爲 3.3729， 2.3729， 1.3729， 0.3729 。

(2) 小於 1 的數，其首數爲負，且比小數點後 0 的個數多 1 。

故 .236， .0236， .00236 對數之首數爲 −1， −2， −3，而其對數分別爲 $\bar{1}.3729$， $\bar{2}.3729$， $\bar{3}.3729$，或 9.3729 − 10， 8.3729 − 10， 7.3729 − 10 等。

若欲求四位數如 2.364 和 758.2 的對數，則可用插值法（見習題 36 ）。

反對數

指數式 $2.36 = 10^{0.3729}$ 中，數 2.36 稱爲 0.3729 的反對數，寫成 antilog 0.3729 。若一數的對數爲 0.3729 ，則立刻可得

$$\text{antilog } 1.3729 = 23.6\,, \quad \text{antilog } 2.3729 = 236\,, \quad \text{antilog } 3.3729 = 2360\,, \cdots$$

$$\text{antilog } 9.3729 - 10 = \text{antilog } \bar{1}.3729 = 0.236\,,$$

$$\text{antilog } 8.3729 - 10 = \text{antilog } \bar{2}.3729 = 0.0236\,,$$

任意數的反對數可由附錄中的表推算出來。

【例】 欲求 antilog 8.6284 − 10 ，首先找表中的尾數 0.6284 ，由於列標爲 42，而行首爲 5，因此所求之數爲 425 。而由於首數爲 8 − 10 ，因此所求之數爲 0.0425 。

同樣的， antilog 3.6284 = 4250 ， antilog 5.6284 = 425,000 。

若表中無法找到尾數，可用插值法求之（見習題 37 ）。

利用對數的演算 應用下述之性質

$$\log MN = \log M + \log N$$

$$\log \frac{M}{N} = \log M - \log N$$

$$\log M^{p} = p \log M$$

利用這些結果，可得