法兰西数学
精品译丛

“十一五”国家重点图书

分布系统的精确能控性、摄动和镇定

第一卷 精确能控性

□ J.–L. 利翁斯 著
□ 严金海 黄英 译 饶伯鹏 校

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

“十一五”国家重点图书

法兰西数学
精品译丛

数学天元基金资助项目

分布系统的精确能控性、摄动和镇定

第一卷 精确能控性

J.-L. 利翁斯 著

严金海 黄英 译

饶伯鹏 校

FENBU X … QUE NENGKONGXING, SHEDONG HE ZHENDING

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

《法兰西数学精品译丛》序

随着解析几何及微积分的发明而兴起的现代数学, 在其发展过程中, 一批卓越的法国数学家发挥了杰出的作用, 作出了奠基性的贡献. 他们像灿烂的星斗发射着耀眼的光辉, 在现代数学史上占据着不可替代的地位, 在大学教科书、各种专著及种种数学史著作中都频繁地出现着他们的英名. 在他们当中, 包括笛卡儿、费马、帕斯卡、达朗贝尔、拉格朗日、蒙日、拉普拉斯、勒让德、傅里叶、泊松、柯西、刘维尔、伽罗华、庞加莱、嘉当、勒贝格、魏伊、勒雷、施瓦茨及利翁斯等这些耳熟能详的名字, 也包括一些现今仍然健在并继续作出重要贡献的著名数学家. 由于他们的出色成就和深远影响, 法国的数学不仅具有深厚的根基和领先的水平, 而且具有优秀的传统和独特的风格, 一直在国际数学界享有盛誉.

我国的现代数学, 在 20 世纪初通过学习西方及日本才开始起步, 并在艰难曲折中发展与成长, 终能在 2002 年成功地在北京举办了国际数学家大会, 在一个世纪的时间中基本上跟上了西方历经四个多世纪的现代数学发展的步伐, 实现了跨越式的发展. 这一巨大的成功, 根源于好几代数学家持续不断的艰苦奋斗, 根源于我们国家综合国力不断提高所提供的有力支撑, 根源于改革开放国策所带来的强大推动, 也根源于很多国际数学界同仁的长期鼓励、支持与帮助. 在这当中, 法兰西数学精品长期以来对我国数学界所起的积极影响, 法兰西数学的深厚根基、无比活力和优秀传统对我国数学家所起的不可低估的潜移默化作用, 无疑也是一个不容忽视的因素. 足以证明这一点的是: 在我国的数学家中, 有不少就曾经留学法国, 直接受到法国数学家的栽培和法兰西数学传统和风格的熏陶与感召, 而更多的人也或多或少地通过汲取法国数学精品的营养而逐步走向了自己的成熟与辉煌.

由于语言方面的障碍, 用法文出版的优秀数学著作在我国的传播受到了较大的限制. 根据一些数学工作者的建议, 并取得了部分法国著名数学家的热情支持, 高等

教育出版社决定出版《法兰西数学精品译丛》, 将法国的一些享有盛誉并有着重要作用与影响的数学经典以及颇具特色的大学与研究生数学教材及教学参考书, 有选择地从法文原文分批翻译出版. 这一工作得到了国家自然科学基金委员会数学天元基金的支持和赞助, 对帮助并推动我国读者更好地学习和了解法国的优秀数学传统和杰出数学成就, 进一步提升我国数学 (包括纯粹数学与应用数学) 的教学与研究工作的水平, 将是意义重大并影响深远的, 特为之序.

李大潜

2008 年 10 月

J.-L. 利翁斯
J.-L. Lions
(1928—2001)

J.-L. Lions 是一位杰出的法国数学家, 历任南希大学、巴黎大学、法国综合工科大学及法兰西学院教授, 于 1973 年当选为法国科学院院士. 他亦曾当选为苏联、中国、美国、英国等 20 多个国家与地区的科学院院士.

J.-L. Lions 教授在偏微分方程的理论和应用方面作出了卓越的贡献. 他的研究工作涉及偏微分方程的理论、控制、计算及应用等众多领域, 开创了法国的现代应用数学学派, 在国际上享有盛誉. 由于在数学上的杰出成就, J.-L. Lions 教授曾任国际数学联盟主席, 曾获过许多重大奖项，包括 1986 年度的约翰 · 冯 · 诺伊曼奖和 1991 年度的日本应用数学大奖等.

J.-L. Lions 教授毕生致力于数学的应用和发展, 历任法国国立信息与自动化研究所主席、法国国家空间研究中心主席、法国电力公司科学理事会主席、国家气象科学理事会主席及法国科学院院长.

J.-L. Lions 教授对中国科学技术的发展一直非常关心和支持, 热情培养我国派出的访问学者及博士生, 多次来华讲学访问, 并受聘为中国科学院及复旦大学等单位的名誉教授, 任中法应用数学研究所学术委员会的首届法方主席, 多次担任在我国召开的国际学术会议主席或学术委员会主席, 为促进中法间的学术交流与合作作出了不懈的努力和重要的贡献. 1998 年, J.-L. Lions 教授当选为中国科学院外籍院士, 是中国科学院中第一位来自法国的外籍院士.

目录

引 言

1. 作为开始, 我们给出本书中将要研究的问题的一个典型例子.

设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ (在应用中, $n=1,2,3$) 中的一个有界开集, 其边界 Γ 是光滑的. 在 Ω 内, 对于 $t>0$, 考察波动方程, 换句话说, 就是一个系统, 其状态 $y=y(x,t)$ 满足

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}-\Delta y=0 \quad \text{在 } Q=\Omega\times(0,T) \text{ 内}, T>0 \text{ 给定}. \tag{1}$$

假设在边界 $\Gamma\times(0,T)$上, 借助一个函数 (控制) $v=v(x,t)$, 我们能以如下的方式, 对系统施加作用

$$y=v \quad \text{在 } \Sigma=\Gamma\times(0,T) \text{ 上}. \tag{2}$$

此外, 设初始值为

$$y(x,0)=y^0(x), \quad \frac{\partial y}{\partial t}(x,0)=y^1(x) \quad \text{在 } \Omega \text{ 内}. \tag{3}$$

所研究的问题如下: 给定时刻 $T>0$. 对于在一个合适的空间中给出的所有数对 $\{y^0,y^1\}$, 能否找到一个控制 v, 使得若 $y=y(x,t)$ 是问题 (1) (2) (3) 的解, 我们有

$$y(x,T)=\frac{\partial y}{\partial t}(x,T)=0 \quad \text{在 } \Omega \text{ 内}. \tag{4}$$

如果这是可能的, 那么我们称系统在 T 时刻精确能控.

注 1 由于波的传播速度有限, 很明显地 (具体细节参见后面第一章), 系统 (1) (2) (3), 只有当 T 是足够大时, 才有可能是精确能控的. ■

注 2 前面对问题的表述是模糊的: 实际上, 需要明确在什么泛函空间中选取初始值 $\{y^0,y^1\}$. 这是一个本质性的问题, 它将是后面很长的讨论的目标. ■

注 3 表述中需要澄清的另一个模糊之处是, 我们在什么泛函空间中选取控制 v? ■

注 4 这种问题的应用价值是显而易见的: 我们寻找一个控制, 它从 $\{y^0, y^1\}$ 出发, 在 T 时刻将系统带到平衡状态.

自然地, 考虑到线性性质, 我们同样可以将系统在 T 时刻带到一个希望的状态

$$y(x,T) = z^0(x), \quad \frac{\partial y}{\partial t}(x,T) = z^1(x). \tag{5}$$

显然, 事先要在一个合适的泛函空间中选取 z^0, z^1 (与初始值 $\{y^0, y^1\}$ 在同一个空间, 那就完美了). ■

注 5 在应用中, 这种我们能在其整个边界上施加作用的系统是很少的.

因而, 实际上本质的问题是这样的: 设给定 Γ_0 为 Γ 的子集. 我们对系统施加作用的方式为:

$$\begin{cases} y = v & \text{在 } \Gamma_0 \times (0,T)\text{上}, \\ y = 0 & \text{在 } (\Gamma \diagdown \Gamma_0) \times (0,T)\text{上}. \end{cases} \tag{6}$$

而我们提出的要求同前面一样.

这就是对 v 加了一个约束

$$v = 0 \quad \text{在 } (\Gamma \diagdown \Gamma_0) \times (0,T)\text{上}. \tag{7}$$

■

注 6 在问题的表述中, 还有一个模糊之处是: 如果问题在 T 时刻是精确能控的(泛函空间已经明确了), 一般来说, 将有无穷个控制 v 能解答这个问题.

定义

$$\mathcal{U}_{\rm ad} = \{v \,|\, v \text{ 属于一个“合适的”泛函空间, 使得对于给定的 } \{y^0, y^1\}, (4) \text{ 成立}\}. \tag{8}$$

能否选取一个 “提升”

$$v = v(y^0, y^1) \tag{9}$$

使得在一个合适的拓扑下, 映射

$$\{y^0, y^1\} \longrightarrow v(y^0, y^1) \tag{10}$$

是连续的?

事实上, 就是这个问题引导出了我们现在所阐述这些求解方法.

2. 寻找 “提升” 的直接求解法

回到系统 (1) (2) (3), 并由 (8)定义 $\mathcal{U}_{\rm ad}$ (允许控制集).

先验地, 假设:

$$v \in L^2(\Sigma). \tag{11}$$

这里它只是一个选择. 可能有很多其他的选择. 所有这些会在第一章 (以及以后的各章) 中详细地检查. 那么, 很自然地, 要考察下面的, 也是“经典的”, 最优控制问题: 记

$$J(v) = \frac{1}{2}\int_\Sigma v^2 \mathrm{d}\Gamma \mathrm{d}t \tag{12}$$

为代价函数. 我们求解

$$\inf J(v), \quad v \in \mathcal{U}_{\mathrm{ad}}. \tag{13}$$

当然, 只有当 $\mathcal{U}_{\mathrm{ad}}$ 是非空时, 这个问题才有意义, 也即, 假设问题是精确能控的; 但是目前承认这个条件, 我们能从 (13) 中得出什么结论, 对此我们非常感兴趣. 自然的问题应该是这样的: 问题 (13) 具有一个唯一的解 u. 我们能否用一个优化系统来刻画 u, 并且由此能否得到满足 (10)的提升? ■

在此, 优化系统 (简写为 S.O.) 是取在分布意义下的优化系统, 与 J.-L. LIONS [1] 中的一样. 为了求解优化系统, 一般的方法是利用罚函数方法. 引入:

$$J_\varepsilon(v,z) = \frac{1}{2}\int_\Sigma v^2 \mathrm{d}\Gamma \mathrm{d}t + \frac{1}{2\varepsilon}\|z'' - \Delta z\|^2_{L^2(\Omega)}, \tag{14}$$

其中 $z'' = \dfrac{\partial^2 z}{\partial t^2}$.

在(14)中, 假设

$$\begin{cases} v \in L^2(\Sigma),\ z'' - \Delta z \in L^2(Q), & \\ z = v & \text{在 } \Sigma \text{ 上}, \\ z(x,0) = y^0(x), \dfrac{\partial z}{\partial t}(x,0) = y^1 & \text{在 } \Omega \text{ 内}, \\ z(x,T) = \dfrac{\partial z}{\partial t}(x,T) = 0 & \text{在 } \Omega \text{ 内} \end{cases} \tag{15}$$

均成立. 在本引言中, 我们试图阐明我们的一般思路, 这个思路引导出了我们在本书中所介绍的一般方法. 因而, 考察下面的问题

$$\inf J_\varepsilon(v,z), \quad v, z \text{ 满足 } (15). \tag{16}$$

这个问题存在唯一解

$$u_\varepsilon, y_\varepsilon. \tag{17}$$

如果问题是精确能控的, 那么 $\mathcal{U}_{\mathrm{ad}}$ 非空. 假如我们选取:

$$v \in \mathcal{U}_{\mathrm{ad}}, \quad z = y(v) = (1)\ (2)\ (3) \text{ 的解}, \tag{18}$$

那么

$$J_\varepsilon(v,y(v)) = J(v), \tag{19}$$

由此

$$\inf J_\varepsilon(v,z) \leqslant \inf J(v), \quad v \in \mathcal{U}_{\mathrm{ad}}. \tag{20}$$

由 (20) 可以推出

$$\begin{aligned} &\|u_\varepsilon\|_{L^2(\Sigma)} \leqslant C, \\ &\|y_\varepsilon'' - \Delta y_\varepsilon\|_{L^2(Q)} \leqslant C\sqrt{\varepsilon}, \end{aligned} \tag{21}$$

这里 C 是一个不依赖于 ε 的常数.

于是可以抽取一个子序列, 仍记为 u_ε, 使得

$$u_\varepsilon \longrightarrow \widehat{u} \text{ 在 } L^2(\Sigma) \text{ 中弱收敛, 且 } \widehat{u} \in \mathcal{U}_{\mathrm{ad}}. \tag{22}$$

那么

$$J_\varepsilon(u_\varepsilon, y_\varepsilon) \geqslant J(u_\varepsilon)$$

给出

$$\liminf J_\varepsilon(u_\varepsilon, y_\varepsilon) \geqslant \liminf J(u_\varepsilon) \geqslant J(\widehat{u}). \tag{23}$$

与 (20) 比较, 我们看到 $J(\widehat{u}) \leqslant \inf J(v), v \in \mathcal{U}_{\mathrm{ad}}$. 因此 $J(\widehat{u}) = \inf J(v), v \in \mathcal{U}_{\mathrm{ad}}$, 由此

$$u_\varepsilon \longrightarrow u \text{ 在 } L^2(\Sigma) \text{ 上弱收敛 (实际上, 是强收敛), } u \text{ 是(13) 的解.} \tag{24}$$

现在我们要对 (16) 建立优化系统. 引入

$$p_\varepsilon = -\frac{1}{\varepsilon}(y_\varepsilon'' - \Delta y_\varepsilon). \tag{25}$$

我们有 (这是 Euler 方程!)

$$-\int_Q p_\varepsilon(\zeta'' - \Delta\zeta)\mathrm{d}x\mathrm{d}t + \int_\Sigma u_\varepsilon v \mathrm{d}\Gamma\mathrm{d}t = 0. \tag{26}$$

$\forall \zeta, v$ 满足

$$\begin{aligned} &\zeta'' - \Delta\zeta \in L^2(Q), \zeta(x,0) = \zeta'(x,0) = \zeta(x,T) = \zeta'(x,T) = 0 \quad \text{在 } \Omega \text{ 内}, \\ &\zeta = v \quad \text{在 } \Sigma \text{ 上}. \end{aligned} \tag{27}$$

由 (26) 及 (27) 可以推出

$$\begin{cases} p_\varepsilon'' - \Delta p_\varepsilon = 0 & \text{在 } Q = \Omega \times (0,T) \text{ 内}, \\ p_\varepsilon = 0 & \text{在 } \Sigma \text{ 上}, \\ \dfrac{\partial p_\varepsilon}{\partial \nu} = u_\varepsilon & \text{在 } \Sigma \text{ 上}. \end{cases} \tag{28}$$

我们到了一个关键点. 在 Q 上, 我们有一族波动方程的解, 使得 Cauchy 值 $p_\varepsilon, \dfrac{\partial p_\varepsilon}{\partial \nu}$ 落在 $L^2(\Sigma)\times L^2(\Sigma)$ 的一个有界集中.

一般来说, 设 ϕ 为下面问题的解

$$\begin{cases} \phi''-\Delta\phi=0 & \text{在 } Q \text{ 内}, \\ \phi=0 & \text{在 } \Sigma \text{ 上}, \\ \phi(x,0)=\phi^0(x), \quad \dfrac{\partial\phi}{\partial t}(x,0)=\varphi^1(x) & \text{在 } \Omega \text{ 内}, \end{cases} \tag{29}$$

引进

$$\|\{\phi^0,\phi^1\}\|_F=\Big(\int_\Sigma\Big(\frac{\partial\phi}{\partial\nu}\Big)^2\mathrm{d}\Gamma\mathrm{d}t\Big)^{\frac12}. \tag{30}$$

就是这个式子, 若 T 充分大, 是关于初始值 $\{\phi^0,\phi^1\}$ 的一个范数 (这将在第一章中着重细化), 因为, 若 $\|\{\phi^0,\phi^1\}\|_F=0$, 那么

$$\frac{\partial\phi}{\partial\nu}=0 \quad \text{在 } \Sigma \text{ 上},$$

因而 Cauchy 值 ϕ 及 $\dfrac{\partial\phi}{\partial\nu}$ 在 Σ 上为零. 因而, 若 T 充分大, 可以得到 $\phi=0$ (Holmgren 唯一性定理——参见后面的第一章).

因而, 我们就此在初始值空间上定义了一个(新的) Hilbert 结构.

因而, 存在一个 Hilbert 空间 F (其显式表示将在第一章中很轻易地给出), 使得对于问题 (28)

$$\{p_\varepsilon(0),p'_\varepsilon(0)\} \text{ 在 } F \text{ 中有界}. \tag{31}$$

在上述条件下, 我们可以对优化系统取极限 (在此, 我们不细化这个拓扑). 因此得到, 若 u 是 (13) 的解, 若 y 是相应的 (优化) 状态, 那么存在 p, 满足

$$\begin{cases} y''-\Delta y=0, \quad y(0)=y^0, \quad y'(0)=y^1, \quad y=u & \text{在 } \Sigma \text{ 上}, \\ p''-\Delta p=0, \quad p=0, \quad \dfrac{\partial p}{\partial\nu}=y & \text{在 } \Sigma \text{ 上}, \\ y(T)=y'(T)=0 \end{cases} \tag{32}$$

(在此, 记 $y(0)=y(x,0), y(T)=y(x,T)$, 等等).

由此, 我们导出了一个算法.

我们从下面的方程开始

$$\phi''-\Delta\phi=0, \quad \phi(0)=\phi^0, \quad \phi'(0)=\phi^1, \quad \phi=0 \quad \text{在 } \Sigma \text{ 上}. \tag{33}$$

对于给定的 $\{\phi^0,\phi^1\}$, 这定义了 ϕ. 那么我们求解

$$\psi''-\Delta\psi=0, \quad \psi(T)=\psi'(T)=0, \quad \psi=\frac{\partial\phi}{\partial\nu} \quad \text{在 } \Sigma \text{ 上}. \tag{34}$$

我们定义算子 K:

$$\{\phi^0, \phi^1\} \to \{\psi(0), \psi'(0)\}.$$

考察方程

$$K\{\phi^0, \phi^1\} = \{y^0, y^1\}. \tag{35}$$

由 (32) 可知, 存在一个解, 它恰好就是

$$\phi^0 = p(0), \quad \phi^1 = p'(0). \tag{36}$$

此外, 可以证明解的唯一性.

所有的事情都归结为算子 K 的求逆.

注 7 实际上, 由于技术上的原因, 我们引入算子 Λ, 定义为

$$\Lambda\{\phi^0, \phi^1\} = \{\psi'(0), -\psi(0)\} \tag{37}$$

并且求解

$$\Lambda\{\phi^0, \phi^1\} = \{y^1, -y^0\}. \tag{38}$$

当然, 这样又回到与 (35) 一样的地方! ■

注 8 总之, 我们所介绍并将详细研究的直接方法是基于:

a) 一个唯一性定理. 正是由于这个唯一性定理, 我们才能够引入一个由 (30) 给出的 (新的) Hilbert 结构 F;

b) 由唯一性定理引入的一个 Hilbert 空间 (F).

那么, 所有的事都归结为, 求 Λ 的逆, 我们将看到这是肯定的: 此外, 前面的罚函数方法也隐含了这一点.

这就是为什么我们建议用 HUM (Hilbert Uniqueness Method) 作为本书所研究的方法的术语. ■

3. 前面的方法将以直接的方式进行演示, 第一章将针对上面的情形——接着, 后续的各章将针对众多其他类型的情形. 显然, 实际上, 从它的原理来看, 这个方法具有很强的可塑性和很强的普遍性: 从唯一性定理出发, 我们能引入一系列的 Hilbert 结构. (例如在 (30) 中, 实际上, 可以用任何其他的 Hilbert 范数来替代$\dfrac{\partial\phi}{\partial\nu}$的 $L^2(\Sigma)$ 范数. 甚至可以选取一个 Σ 上的 Banach 空间的范数!) 并且, 我们还能够考察不同的边界条件的不同的唯一性定理.

我们还获得了一个 "广泛的计划", 研究的路线图如下.

第一章研究上面探讨的情形.

第二章介绍一般的方法.

第三章总是对波动方程研究控制施加于 Dirichlet 及 Neumann 混合型边界条件, 或纯的 Neumann 型边界条件. 我们同样考察 (在第六章) 传播问题 (它对应于间断系数).

第四章研究一些振动平板模型. 在一些分散的论文中, 对这种情形的其他的模型进行了研究, 其中利用了 HUM 方法以及新的技术发展, 它们分散在 E. ZUAZUA 的一系列论文中, 以及 J. LAGNESE 和 J.-L. LIONS [1]的书中.

我们对弹性系统给出一些介绍.

第五章研究同时控制: 能否用同一个控制来精确地控制一些不同的系统?

第七章考察控制是位于 Ω 内部 (并非在其边界上)的情形.

第八章 (很快地) 重新审视所有的一切, 是从我们刚刚概括过的优化系统角度来看.

我们当然可以研究对偶问题, 这一技术将在本著作的第二卷中再做审视.

4. 本书所推荐的求解方法均是构造性的. 在我们与 R. GLOWINSKI 及其同事的一系列论文中, 这个构造性方法正是我们从数值的观点所要证明的.

这一系列论文中的第一篇即将发表: R. GLOWINSKI, C. LI, J.-L. LIONS [1].

5. 很自然地, 利用 Fourier 方法, 我们总是能够得到所有解的 "显式表达式", 这样一来, 精确能控性问题就可化归为与调和分析 (或者非调和 Fourier 分析) 相关的问题, 参见 D. L. RUSSELL [1] 以及这篇论文的参考文献. 此处所介绍的方法具有更广泛的一般性, 而调和分析方法仅在某些需要技术处理的地方出现.

另外一个非常一般性的方法是由 D. L. RUSSELL 提出的, 并引发了众多的工作; 主要可参阅 G. CHEN [1] [2], J. LAGNESE [1] 以及这两篇文章中的参考文献. 此方法需要给出一个镇定反馈算子的显式表达. 举例来说, 对问题 (1) (2) (3), 我们构造 (如果可能的话) 一个算子

$$y = S(\frac{\partial y}{\partial \nu}, \frac{\partial y}{\partial t}) \quad (S = \text{反馈} \cdots\cdots) \text{ 在 } \Sigma \text{ 上} \tag{39}$$

使得当 $t \to +\infty$ 时, 问题 (1) (2) (3) 的解 (在一个合适的范数下) 是指数衰减的. 同样参阅 I. LASIECKA 和 R. TRIGGIANI [1].

那么由此, 我们就可以推出精确能控性.

这里我们是倒过来做的, 我们用 HUM 方法证明在合适空间上的精确能控性, 然后由此, 我们以一个系统的方式推出镇定, 参阅此方面的第一篇论文 J.-L. LIONS [3].

对某些情形的镇定问题, V. KOMORNIK 和 E. ZUAZUA [1] 给出了一个十分一般且十分灵活的解答.

在本著作的第三卷 J.-L. LIONS [5] 中, 对所有这些将再做考察.

6. 有了 HUM 这样一个系统解决精确能控性的工具, 自然地我们要研究这一方法与摄动相关的鲁棒性.

一般的研究 "计划" 如下:

(i) 研究带有奇异摄动的系统的精确能控性. 这个方向的两篇早期论文由 J.-L. LIONS [6] [7] 完成.

(ii) 研究带有强振荡系数的系统的精确能控性. 参见 M. AVELLANEDA 和 F. H. LIN [1], 和论文预印本 J.-L. LIONS [3], 以及 D. CIORANESCU 和 P. DONATO [1] 的工作.

(iii) 最后, 研究定义在一些摄动区域上, 或者在 "薄" 区域上 (三维情形到二维情形的过渡), 系统的精确能控性, 这与 Ph. CIARLET [1] 及其同事们的工作相关联.

所有这些将在本著作第二卷 J.-L. LIONS [4] 中加以研究.

7. 从技术的观点来看, 除了非齐性偏微分方程的 "标准" 方法外 (参见 J.-L. LIONS 和 E. MAGENES [1]), 本卷中所使用的方法如下:

(i) 乘子方法, 早已被所有引用该方法的作者使用, 在 (1) (2) (3) 的情形下, 由于 L. F. HO [1] 的一个非常有意思的观察得以完善 (在 (1) (2) (3) 的特殊情形下, 可以用来刻画空间 F);

(ii) 调和分析的一些结果;

(iii) 微局部技巧, 以及一些最新结果, 在附录中加以演示, 这个附录属于 C. BARDOS, G. LEBEAU 和 J. RAUCH [1], 也是由他们修改的.

在最后, 我们还使用了对于凸函数的一般的对偶方法 (仅出现在本卷的最后一章).

8. 使用了HUM 的一些不同的变式.

首先, 我们可以引入其他的范数, 不同于本卷中所研究的范数, 方法是基于关于初始值 ϕ^0, ϕ^1 的用曲面积分表示的二阶泛函. 这些例子将在别处给出. 由此, 在 W. KRABS, G. LEUGERING 和 T. I. SEIDMAN [1]的框架下, 我们能够得到一些不同的结果, 一些推广 (以及一些未解决的问题).

再考察 (28). 利用由 (30) 引进的空间 F, 我们推出 (31). 我们也可以在 T 时刻进行同样的过程. 在本卷所研究的情形中 (那里我们可以将时间反转), 这么做完全没有任何改变. 然而, 当系统是不可反转时, 情况就变得大不相同了, 那时我们必须严格区分算子是原系统的模型还是它的对偶系统的模型. 这样我们就被引向了 RHUM, 这在本著作第二卷中加以研究.

在此观点下, 我们将研究 G. LEUGERING [1] [2] 的工作.

在这样的观点下, 我们同样能够研究部分精确能控性 (参见 J.-L. LIONS [4]) 以及 K. NARUKAWA [1] 的有意思的结果.

9. 在本书的撰写过程中, 作者从与许多学者的大量讨论中得益匪浅. 他们是 J. BALL, C. BARDOS, G. ESKIN, R. GLOWINSKI, P. GRISVARD, A. HARAUX, L. F. HO, V. KOMORNIK, J. LAGNESE, I. LASIECKA, W. LITTMAN, L. MARKUS, S. MITTER, D. L. RUSSELL, R. TRIGGIANI, E. ZUAZUA 等. 我非常感谢他们.

本书稿是由 E. ZUAZUA 根据 J.-L. LIONS [3] 在纪念 J. von Neumann 大会上演讲以及法兰西学院 1986/87 年度的课程讲义编写的. 无论在内容还是在形式上, 他均作了大量的改进. 对此, 我要特别地感谢他. 自然地, 他不对本发行版中可能出现