ADVANCED ENGINEERING MATHEMATICS

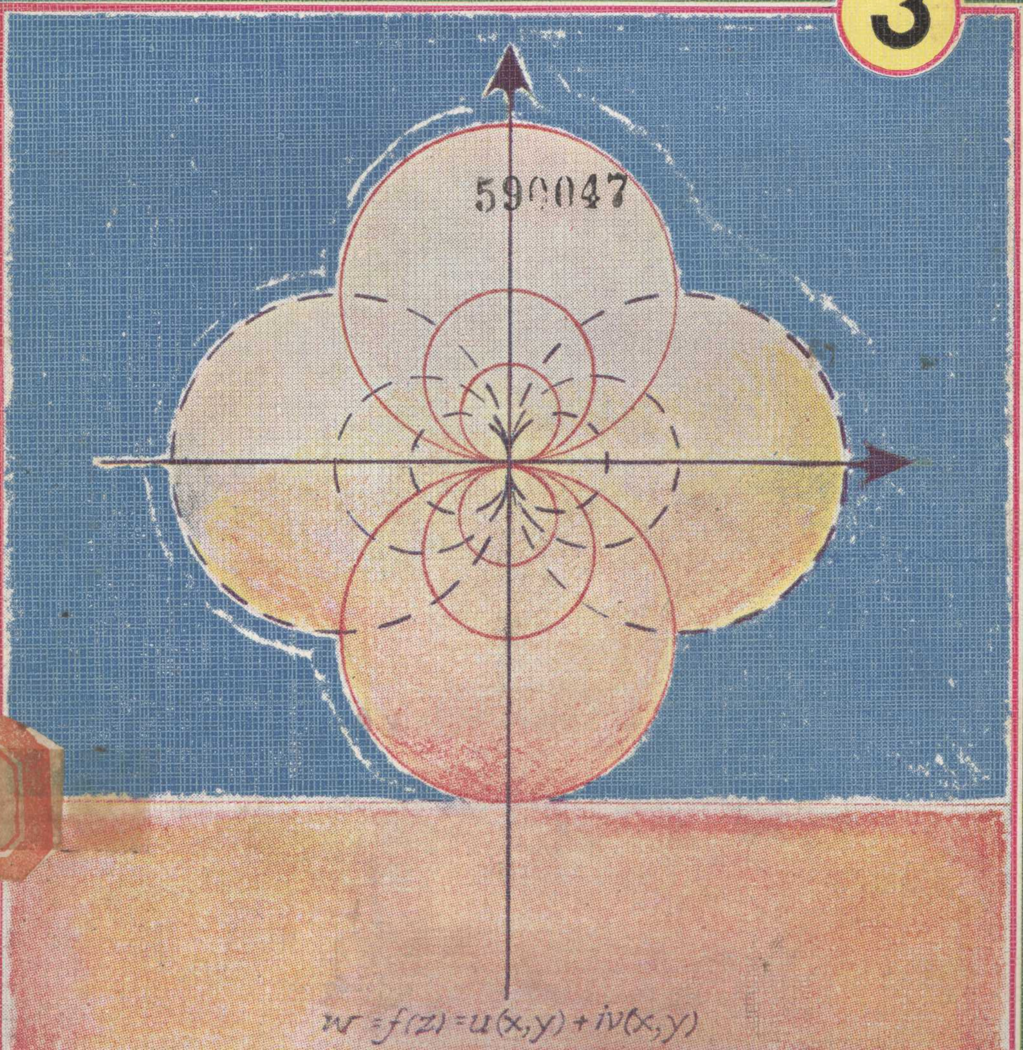
Erwin Kreyszig

Fourth Edition

高等工程數學

黃文儀譯

3



高等工程數學

第四版(1979)

第 三 册

原著者
Erwin Kreyszig
PROFESSOR OF MATHEMATICS
OHIO STATE UNIVERSITY

譯 者
黃 文 儀
私立大同工學院教授

東華書局 印行

中華民國六十九年三月初版

大學用書 高等工程數學（全四冊）

第三冊 定價 新台幣七十元整

（外埠酌加運費滙費）

譯者 黃文儀

發行人 卓鑫淼

出版者 臺灣東華書局股份有限公司
臺北市博愛路一〇五號
電話：3819470 郵撥：6481

印刷者 合興印刷廠

行政院新聞局登記證 局版臺業字第零柒貳伍號

（69008）

原　序

本書目的　　此書主旨，係對研習工程及物理之讀者，介紹近代數學中，有關實際問題之各種最重要課目。各項主題，依據其在應用方面遭遇之多寡情形，精心加以選擇。近年來，在工程教育專題討論會上，所發表各種有關現代數學之新觀念，均被考慮予以搜集。無論對已在數學訓練方面，早訂有擴展課程計劃之各院校，或正準備適應一般潮流，而加強其數學訓練計劃之學術機構，此書應均適合。

基本微積分，係研讀本書前之惟一先修課程。

本書所搜集之材料，係選自美國，加拿大，及歐洲各學校大學部及研究所內，爲研習工程，物理，或數學者所講授之主要課程。

本書第四版之改進要點

此一版本與第一，二及三版主要不同之處如下：

習題　　習題均已改變。並包含更多的應用問題。

模型化（Modeling）可藉於不同章節之應用而更加深印象。

線性常微分方程式　　於第二章中包含**微分運算子**（Differential Operators）新的一節。**相平面法**（Phase plane methods），**穩定性**（Stability）以及著名的**范德伯方程式**（Van der Pol equation）則於新的一章（第三章）中加以探討。

微分方程式系統　　加上了不用矩陣之基本方法。採用矩陣的方法

則加以擴充而成爲新的一節。

拉普拉斯變換運算法　　包含 褶積(Convolution)。整章重寫而更爲緊湊。在此新版中，兩個移位定理(Shifting theorems)包含於同一節，微分方程較早出現，並介紹褶積及其應用，部分分式法(Partial fractions)於稍後討論，並且不那麽強調。

偏微分方程式　　本章包含新的一節討論拉氏變換運算法對偏微分方程的應用。

矩陣　　本章部分加以重組與重寫，以符合近代線性代數之潮流。新的一版也包括較多的應用。

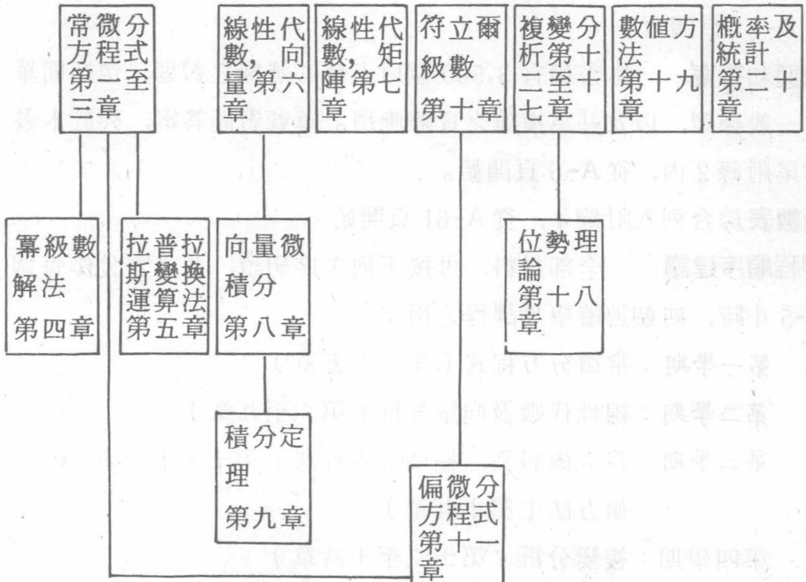
複變分析改成如下更有利之方式。關於複數有短的三節(前面版本爲長的一節)對本題作一簡單的介紹。基於相同的理由，保角寫像(Conformal mapping)的那一章，於開始時有較多的例題。有關數列(Sequence)與級數(Series)之一章則加以重寫，以便使在複變分析的班級上，僅需要本章最初兩節，因此可節省許多時間而不致於喪失關聯性。冪級數(Power series)，泰勒級數(Taylor seires)與勞倫級數(Laurent seires)出現於同一章，也就是說它們比前面版本彼此更靠近。

數值分析　　本版包含關於線規(Splines)新的一節，它對於工學專家有日漸增加的重要性。

概率與統計　　習題加以擴充而包含較多的應用。

參考資料於附錄1中者，補充了新資料。

本書內容及其安排　　本書各重要部分之間，其主題材料之安排，可由下列圖解表示。



本書中對常微分方程式，線性代數和向量分析，以及複變分析，此三種也許是工程師們最感重要之部門，所提供之討論，極具分量。其他如符立爾級數；偏微分方程式，數值方法等各章之長度，亦使能包含足夠之材料，以便於一般的各類課程採作教本之用。

爲便利選用本書部分內容起見，各章均儘可能保持其獨立性。

所有各章均分爲若干較短之節數，每節均含有闡釋觀念、方法、結果、以及工程應用之例題及習題。

本書包含各種歷史性之註腳，原始參考文獻，以及400個以上之插圖。

參考資料　若干用作參考及進一步研究之書籍，可於本書末尾從A-1頁開始查得。部分有關特殊函數之公式，則包含在附錄3內，

從A-54 頁開始。

習題和答案　本書備有 3,500 個以上精心選擇之習題，包括簡單之一般練習，以及甚爲複雜之實際應用。單號習題答案，列於本書末尾附錄 2 內，從 A-6 頁開始。

函數表綜合列入附錄 4，從 A-61 頁開始。

課程順序建議　全部材料，可按下列次序研讀，並適宜分作每週 3-5 小時，四個連續學期課程之用：

第一學期：常微分方程式（第一至五章）

第二學期：線性代數及向量分析（第六至九章）

第三學期：符立爾級數，偏微分方程式（第十、十一章），數值方法（第十九章）

第四學期：複變分析（第十二至十八章）

另一有關**工程統計學**（每週 3-5 小時；第二十章）之課程，則可在上列之任一學期中，或以後開授。

單獨一學期課程　此外本書亦適宜於作一學期獨立課程，每週三小時之用，例如：

常微分方程式入門（第一，二章）

拉氏變換運算法（第五章）

向量代數及微積分（第六，八章）

矩陣及線性方程式系統（第九章）

符立爾級數及偏微分方程式（第十，十一章）

複變分析（第十二至第十七章）

數值分析（第十九章）

縮短課程　縮短課程時，可予省略之節數，均在每章前面，加以註明。

選擇主題之準則　本書一類之著作，究應包含那些主題？以及此等主題應如何安排和介紹？

爲尋得上述各基本問題之答案起見，我們可追溯工程數學發展之一段歷史，此項發展顯示出如下兩種有趣事實。

1. 數學在工程科學中日趨重要，且可預測此項情形，將一直繼續下去。此種趨勢之一重要原因，係由於近代工程問題已變成如此複雜，使得我們不可能似以往之純靠物理直覺，或僅憑過去經驗以求得其解答。此種實驗方法，過去對若干問題之解答，相當成功。但當極高速度，極大力量，極高溫度，或其他不正常條件摻入時，則無法予以解決而致失敗。且當各種具有不尋常物理特性之近代新穎材料（如塑膠，合金等）出現後，情況更加嚴重。因此上述之實驗工作，達到費時，費力之驚人複雜程度。此時數學乃可予以協助，以籌劃實驗及其構造，計算出實驗數據，並減少其尋求解答之工作與費用。

2. 過去基於純理論性之原因而發展之數學方法，在工程數學中突然變成十分重要。例如矩陣，保角寫像之理論，以及具有週期性解答之微分方程式之理論等。

以上之發展事實，對工程數學教學方面之反應如何？由於所需求之數學不斷增加，我們應否在課程中，增加更多之主題數目，而致減少每一主題所佔有之時間？或應集中精力，選出若干具有實際重要性之少數重要事物，俾便適於教學訓練，並啓迪學生之數學思想，以發展其本身之創造能力？

六十或八十年以前，無人能預知保角寫影或矩陣，將在工程業務之數學部分，佔據重要之位置。在相似情形下，欲預測何類數學理論，在今後二十或三十年，將對工程應用方面增加其重要性，亦

屬極爲困難。惟無論將發生之事實如何，具有良好數學訓練基礎之學者，將可適合未來之各種需要，而能利用其所學，以熟習新穎數學方法。

因此工程數學教育最重要之目標，在使學生如何熟習運用數學之思考方法，並認識各項指導原理及觀念之幕後背景。此點較僅學習如何正式運用數學方法，更爲重要。學者應認識數學並非搜羅戲法或秘訣，而係建立在較少數基本觀念上的一門具有實際重要性和系統性科學，其中包含有極具效力之各種統一方法。學者尤應深切體會運用數學程序於工程問題之必要，而發覺理論和應用間之相互關係，有如樹木和果實間之彼此密切性一樣。

讀者將可看出應用數學來解答工程問題時，包含三項主要步驟:

1. 將已知物理資料翻譯成數學形式（模型化）（Modeling）如此我們可得出該物理情況之一種數學翻版模型。此模型可能即爲一微分方程式，一組聯立線性方程式，或其他之數學表示式。

2. 將此模型利用數學方法處理之，此即導致已知問題數學形式之解答。

3. 將此數學解答之結果，以物理條件解釋之。

所有以上三步驟似有相等之重要性，而本書在作各種介紹時，主要在輔助讀者，能充分發揮其完成三項步驟之技術。故有關應用問題之選擇，以具有一般性者爲優先。

在若干之討論情形下，常不免依賴各種已知結果，其證明之手續或方法，常超出類似本書水準之範圍。遇有此等情形時，書中均一一加以明顯之註解。因困難之隱瞞，或事物之過度簡化，對從事職業性工作之讀者均無裨益。

以上即係作者對選擇及介紹本書題材之若干指導原則。各項材

料之選擇，均曾根據過去及目前之教學及研究經驗，在極爲審愼之態度下，作成決定。有時寧可對勸使包含工程數學中之“每一重要事物”之誘惑性建議，拒絕加以考慮。

關於如何方能對各項主題，儘可能作簡單明瞭而準確之介紹方面，作者曾加以特別之努力，其中亦包括註解符號之選擇，每章中水準之深度，逐漸增加，並避免各種艱深理論之跳越及累積。

銘謝　作者對其從前許多老師，同事，和同學，在編著本書時所提供之協助和建議，深致謝意。原稿之若干部分，係以油印形式，先分發給各班同學，再由他們細閱後，加註改進建議退還。與許多工程師及數學家口頭或書面之討論，對作者實有極大之幫助，其中本人願特別提到褒格曼（S. Bergman）(†)，坎培爾（S.L. Campell），卡格（J.T. Cargo），張伯（P.L. Chambré），克郎漢（A. Cronheim），弟拉尼（J. Delany），德特曼（J.W. Dettman），赫爾索（R.G. Helsel），胡夫（W.N. Huff），克利普（E.C. Klipple），可姆科（V. Komkow），孔氏（H. Kuhn），蘭伯（G. Lamb），曼氏（H.B. Mann），馬克思（I. Marx），孟羅（W.D. Munroe），浦氏（H.W. Pu），瑞多（T. Rado）(†)，瑞契多夫（P.V. Reichelderfer），雪克（J.T. Scheick），史密斯（H.A. Smith），史本賽（J.P. Spencer），托德（J. Todd），懷斯（H.J. Weiss），及衞南斯基（A. Wilansky）等在美國之各位教授，多倫多（Toronto）之柯克斯特（H.S.M. Coxeter）教授，以及在歐洲之保羅（B. Baule）(†)，彭克（H. Behnke），費羅原（H. Florian），格拉夫（H. Graf），何亨伯格（F. Hohenberg），克羅特（K. Klotter），賓氏（M. Pinl），路特（F. Reutter），史密登（C. Schmieden），恩格（H. Unger），華爾特（A. Walther）(†)，衞南德（H. Wie-

landt）教授等。在此作者僅能表示其誠摯之謝意。

最後，本人應向約翰－衛律和孫氏公司（John Wiley and Sons）對其編印此版本書時之有效合作和審愼精神，表示感謝。

許多讀者所提供之寶貴建議，均在編印此版時，予以採納。其他任何對改進本書之批評和意見，將受本人之衷心歡迎。

愛文－克雷斯聚格
（Erwin Kreyszig）

高 等 工 程 數 學

第三冊　目錄

第十章　符立爾級數及積分

第十一章　偏微分方程式

第十二章　複數·複變解析函數

第十三章　保角寫像法

第十章

符立爾級數及積分

Fourier Series and Integrals

週期性函數經常在工程問題中出現。這些函數，如能以簡單的週期性函數，例如正弦、餘弦等來表示，則其實際用途，極為重要，由此即導出所謂符立爾級數。此類級數，是為了紀念法國物理學家約瑟夫 - 符立爾（JOSEPH FOURIER）(1768 - 1830 年)而命名的，為解答各種包含常微分，及偏微分方程式問題的一個極有效之工具。

本章將討論並說明有關符立爾級數之基本觀念、事實、及技巧。包括闡釋範例以及若干重要之工程應用問題。更進一步之應用，將於下章之偏微分方程式，及界值問題中討論。

符立爾級數之理論相當複雜，但其應用較為簡易。在某一觀點看來，符立爾級數，較泰勒級數更為普遍，因許多具有實用興趣之非連續週期性函數，可展開為符立爾級數，但當然不能以泰勒級數表示之。

本章最後一節，將致力於符立爾積分之討論。對偏微分方程式之應用，則將在下章中考慮之（11.6 節）。

研讀本章前之預修課目：基本積分學。

短期課程可省略之節數：10.6-10.8 節。

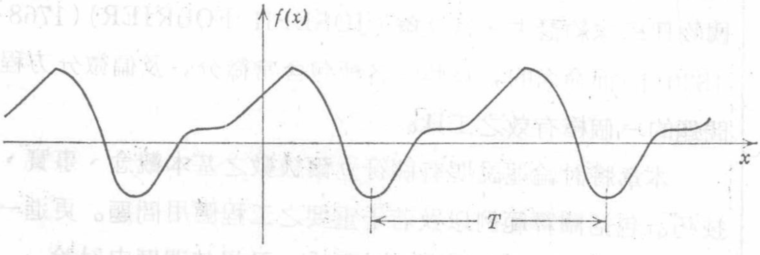
習題答案：附錄 1。

10·1　週期性函數・三角級數

若函數 $f(x)$ 對所有實數 x 均有定義，且存在某一正數 T，使得對所有 x 而言有

(1)
$$f(x+T)=f(x)$$

則 $f(x)$ 稱爲具有**週期性**。數字 T 則稱爲 $f(x)$ 之**週期**[1]。此種函數之圖形，可對其在長度爲 T 的任何區間內之圖形，作週期性之重複變化而得到（第203圖）。



第**203**圖　週期性函數。

由(1)式可知，若 n 爲任何整數，對所有 x 而言有

$$f(x+nT)=f(x)$$

故 $2T, 3T, 4T, \cdots$ 等亦爲 $f(x)$ 的週期。此外，若 $f(x)$ 及 $g(x)$ 之週期爲 T，則函數

$$h(x)=af(x)+bg(x) \qquad (a, b \text{ 爲常數})$$

之週期亦等於 T。

註 1：若一週期性函數 $f(x)$ 具有最小週期 $T(>0)$，此即被稱爲 $f(x)$ 之**原始週期**（*primitive period*）。例如，$\sin x$ 和 $\sin 2x$ 之原始週期分別爲 2π 和 π。無原始週期的週期性函數之例，有 $f=$ 常數及 $f(x)=0$ ｛x 爲有理數｝，其他情況 $f(x)=1$。

熟悉之週期性函數，例如正弦和餘弦函數。注意函數 $f=c=$ 常數，根據定義亦爲週期性函數，因其對任何正值 T 均滿足(1)式。

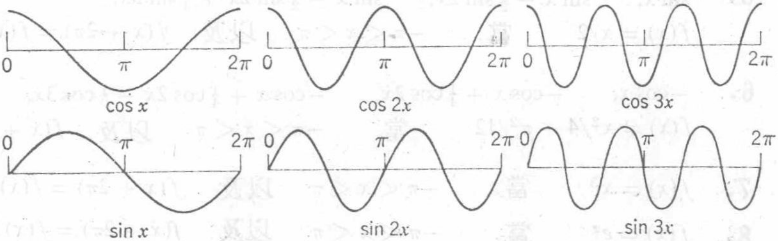
本章前面幾節，將討論週期爲 2π 之各種函數，用下列週期爲 2π 之簡單函數

$$1,\quad \cos x, \sin x,\quad \cos 2x, \sin 2x, \cdots,\quad \cos nx, \sin nx, \cdots$$

來表示之問題（第204圖）。與此有關之級數形式爲

$$a_0 + a_1\cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + \cdots, \tag{2}$$

其中 a_0，a_1，a_2，…，b_1，b_2，…均爲實値常數。此種級數，稱爲**三角級數**（Trigonometric series），而 a_n 及 b_n 稱爲此級數之**係數**。我們可看出此級數中每一項之週期，均等於 2π。因此，**若級數具有收斂性，則其和亦爲週期等於 2π 之函數。**



第**204**圖　餘弦及正弦函數之週期等於 2π。

在工程問題中出現之週期性函數，通常均較複雜，故有將其用簡單週期性函數表示之必要。我們將明瞭，任何出現在應用問題中，例如有關振動問題等，週期爲 2π 之週期性函數 $f(x)$，均可以三角級數來表示。同時我們將導出(2)式中，各係數以 $f(x)$ 表示之公式，使得(2)式具有收斂性，其和恰爲 $f(x)$。稍後，我們將所得結果，推廣於週期爲任何數値之函數；此一推廣方法十分簡單。