

研究生教材

数理统计

滕素珍 编著

大连理工大学出版社

数 理 统 计

滕素珍 编著



大连理工大学出版社

内 容 提 要

本书主要包含：数理统计基本概念的解释、参数的估计方法、统计量的抽样分布、估计量的优良性、参数和非参数的假设检验。

书中较详细地讨论了应用广泛的线性模型，并将必需的概率知识和矩阵知识穿插在各章、节中。各章末所附的习题种类繁多，系统全面。

本书可作为高等工科院校和高等师范院校研究生的试用教材和作为高等院校高年级学生自学的参考书，还可以作为从事数理统计教学的教育工作者的参考书；并且是科学研究人员和高级技术工作者从事数据处理、统计分析和统计推断的理论基础和方法指导。

数 理 统 计

Shuli Tongji

滕素珍 编著

大连理工大学出版社出版、发行

(大连市凌水河)

大连理工大学印刷厂印刷

开本：787×1092 1/32 印张：11 $\frac{5}{8}$ 字数：249千字

1990年2月第1版

1990年2月第1次印刷

印数：0001—1500册

责任编辑：凌 子

封面设计：羊 戈

责任校对：杜祖诚

ISBN 7-5611-0264-X/O·46 定价：4.50元

前 言

近代的数理统计为科学研究工作者提供了必备的知识。它是一门年轻而引人入胜的科学。它在我们的现实社会、自然科学、社会科学、工程学及经济管理学科中起着重要的作用。当前，统计方法已在工农业生产、日常生活和国民经济的发展中得到了广泛的应用。

本书基本上是根据“工科研究生数理统计课程研讨会”上所讨论的基本要求编写的。主要作为高等工科院校和高等师范院校研究生的试用教材，还可以作为高等院校高年级学生的自学参考书。要求读者具备大学的微积分、基础概率和线性代数知识。

对统计理论和方法感兴趣的科学研究人员、教师和工程技术人员，本书可作为你们较系统掌握数理统计概念和方法的良好参考书。这些读者可以忽略一些定理的证明，侧重了解数理统计的思想、原理和方法，或者选读部分章、节。

本书的特点如下：

一、本书将必需的概率知识、矩阵知识穿插在有关章节中，叙述它们的结论或少量的论证。但不是以往学习内容的重复，而是综合所学的知识，发挥承上启下的作用或工具作用。

二、本书较系统地阐述了数理统计的基本概念和方法，主要公式、定理及其重要的应用。内容安排上力求由浅入深，

做到叙述详细清楚，便于自学。目的是使读者初步地掌握处理随机现象的基本方法，培养运用数理统计的原理从事科学研究和解决生产实际问题的能力。

估计理论分两章叙述。第二章讨论求参数估计的方法，内容简单易懂。第四章研究估计量的优良性，并讨论寻找最优估计量的方法。包含较清晰的理论证明和应用例题。

假设检验也分两章叙述。第五章讨论正态总体参数的假设检验和最优检验。第六章讨论非参数的假设检验，除了经常用的 χ^2 -拟合优度检验法以外，还包含K-S检验，秩检验和游程检验。

由于回归分析是数理统计的重要分支，在实际中应用很广，所以在第七章详细而系统地研究了简单线性回归模型，并保持其一定的独立性。用矩阵表达式对多元线性回归模型，分两节进行了较深刻的分析，为从事科学研究工作打下一定的理论基础。

三、增添了一些现代较新的内容。如：大样本估计理论，决策理论，贝叶斯估计，带约束的最小二乘估计，秩检验和游程检验。还简单地介绍了解决线性模型出现病态的办法。在本书的续《数理统计的应用》中，还包含随机模拟、抽样调查和产品抽样检验、试验设计、可靠性统计分析和多元统计分析等实用的内容。

四、各章中列举较多的例题，并配有大量的习题。习题包括练习公式或方法的计算题、查表题、概念性题和证明题。希望读者学习完每章内容后，做适量的习题，能够帮助理解概念和作为今后应用的模拟。书末附有习题答案，仅供读者参考。

读者可根据自己的基础及规定的课时数选学内容。选学时，应注意到系统性和完整性。

现将具体的安排建议如下：

(1) 若讲授全部内容，包括目录列举的星号(*)及本书内的小标题星号(*)内容，约需要52学时。

(2) 若除带星号(*)的内容以外，全部讲授，约需要45学时。

(3) 在(2)的基础上，系统地讲授第七章中简单线性回归模型，对多元线性回归模型的方法和应用只作简单介绍，而不进行论证，则约需要40学时。

本书经林安西、李学伟、张亚军、江先荣、吴宝玉、林建华等同志的审阅和指导，并提出宝贵意见，特此，向各位老师表示衷心的感谢。

本书几经试用、修改和补充，才完成现在的稿。由于作者水平有限，书中一定存在不妥之处，真诚的希望读者提出批评和指正。

滕素珍

1989年8月于大连理工大学

目 录

前 言

第一章 数理统计引言	1
§ 1.1 统计推断	2
§ 1.2 数理统计的基本概念	3
一、总体和样本	3
二、随机样本	5
三、参数空间	8
四、统计量	9
五、顺序统计量和经验分布函数	12
习题一	16
第二章 参数的估计方法	19
§ 2.1 点估计	19
§ 2.2 频率代替法和矩法	20
一、频率代替法	20
二、矩法	21
§ 2.3 最小二乘法	25
§ 2.4 极大似然法	30
一、似然函数	32

二、极大似然估计量.....	32
* § 2.5 贝叶斯估计.....	41
一、决策理论的基本概念.....	41
二、贝叶斯估计量.....	43
习题二.....	50

第三章 统计量的抽样分布..... 56

§ 3.1 特征函数.....	57
一、随机变量的特征函数.....	57
二、特征函数的基本性质.....	60
§ 3.2 χ^2 -分布	64
§ 3.3 t -分布和 F -分布.....	68
一、 t -分布.....	68
二、 F -分布.....	70
§ 3.4 样本平均数和样本方差的分布.....	71
一、样本平均数的分布.....	71
二、正态总体样本线性组合的分布.....	73
三、样本平均数和样本方差的独立性.....	75
四、样本平均数和样本方差的函数的分布.....	79
§ 3.5 顺序统计量的分布.....	82
一、顺序统计量的联合分布.....	82
二、任何一个顺序统计量的分布.....	82
三、任何两个顺序统计量的联合分布.....	85
四、样本极差的分布.....	87

习题三	88
第四章 估计量的优良性和最优估计量	95
§ 4.1 充分统计量和完备统计量	95
一、充分统计量	95
二、完备统计量	101
§ 4.2 无偏估计量和一致最小方差无偏估计量	103
一、无偏估计量	103
二、一致最小方差无偏估计量	108
§ 4.3 大样本估计量及其优良性	115
一、有效估计量	115
二、一致估计量	127
§ 4.4 置信区间	129
一、置信区间的意义	129
二、正态总体数学期望的置信区间	134
三、两个正态总体数学期望之差 ($\mu_1 - \mu_2$) 的 置信区间	138
四、正态总体方差 σ^2 的置信区间	144
习题四	145
第五章 参数的假设检验	152
§ 5.1 统计假设检验的基本概念	152
一、原假设和备择假设	153
二、临界域	154

三、两类错误.....	154
四、假设检验的基本步骤.....	156
§ 5.2 正态总体数学期望和方差的检验.....	160
一、数学期望的检验.....	160
二、方差的检验.....	168
§ 5.3 最优检验.....	173
一、势函数.....	174
二、最优检验.....	177
习题五.....	185
第六章 非参数的假设检验.....	191
§ 6.1 χ^2 -拟合优度检验.....	191
§ 6.2 Kolmogorov-Smirnov 检验.....	198
一、一个总体分布函数的检验.....	198
二、两个总体分布函数的比较.....	202
§ 6.3 独立性检验.....	209
一、 (X, Y) 的联合分布是二维正态分布.....	210
二、 (X, Y) 的联合分布是任何二维分布.....	212
习题六.....	219
第七章 线性模型.....	223
§ 7.1 引言.....	223
§ 7.2 简单线性回归模型.....	226
一、线性模型.....	226

二、简单线性回归模型.....	227
三、最小二乘估计量和最小二乘分析.....	229
四、 σ^2 的无偏估计量.....	241
§ 7.3 回归系数的假设检验和置信区间.....	242
一、回归系数的假设检验.....	245
二、置信区间.....	247
§ 7.4 回归模型的显著性检验.....	248
§ 7.5 预测.....	251
§ 7.6 多元线性回归模型 I	253
一、几种特殊矩阵.....	256
二、多元线性回归模型的矩阵表达式.....	257
三、 β 的最小二乘估计量及其性质.....	261
四、 σ^2 的无偏估计量及其性质.....	265
*五、带有约束的最小二乘估计量.....	267
§ 7.7 多元线性回归模型 II	2
一、 β 和 σ^2 的极大似然估计量.....	268
二、极大似然估计量 β 和 σ^2 的性质.....	269
三、多元线性回归模型的假设检验.....	272
四、回归系数的假设检验.....	280
五、预测.....	283
§ 7.8 方差分析.....	286
一、单因子方差分析.....	287
*二、双因子方差分析.....	293
习题七.....	299

附录.....	308
I 习题答案.....	308
II 常用数理统计表.....	321
附表1 随机数表.....	321
附表2 二项分布数值表.....	325
附表3 普阿松分布的概率数值表.....	332
附表4 普阿松分布数值表.....	334
附表5 标准正态分布数值表.....	335
附表6 χ^2 -分布上侧分位数表.....	338
附表7 t -分布上侧分位数表.....	341
附表8 F -分布上侧分位数表.....	343
附表9 D_n 的极限分布数值表.....	357
附表10 秩检验分位数表.....	358
参考文献.....	359

第一章 数理统计引言

实质上，数理统计是一门数据的科学，近年来取得了很大的进展。因为它是一门理论性强、应用广泛的学科，所以除了必需掌握一些基本的统计理论外，还应该深入理解它的使用方法和思考方法。

数理统计的基本内容包括三部分：收集数据，统计分析和统计推断。收集数据可以通过实验、抽样调查、普查或者根据以往资料来获得。统计分析是指用科学的方法对数据进行归纳整理，从而揭示出它们的特性和重要关系，以便了解数据的变动规律及趋向。统计推断是数理统计中的重要课题。它是指利用收集的数据，在统计分析的基础上，对总体进行推断。往往我们不是对研究的全部对象进行观测，而是从全体对象组成的总体中抽取能代表总体的样本，对样本进行观测，取得数据，随之将此数据加以归纳整理，最后对总体进行推断。取得数据的目的是为了得到总体的情报，以便对总体采取必要的措施。例如，了解一个城市的居民出行情况，由于人力、物力、时间的限制，不可能对每个人都调查，而是通过抽样调查，即抽取样本，由样本提供的信息，估计整个城市居民的出行量或预测未来特定年的出行量。

一般地，抽取样本是采取随机的方式。换句话说，是对随机现象进行观测而获得数据。因此，数理统计是通过随机现象的大量观测，总结出随机现象的规律性。简单地说，

数理统计是应用样本提供的信息推断总体。

§ 1.1 统计推断

自第一章至第七章将系统地讨论统计推断的理论和方法。大多数情形，不论理论还是实际，都是把所产生的数据的分析作为最终的努力方向。不过，数理统计涉及的数据是随机试验的结果。

例1.1.1 一个试验工作者，为了确定某个物理量 a (常数)，进行 n 次独立试验。因为他做的度量受随机误差的影响，所以把度量得到的数据写作 a 加上随机变量 ε_i ，即度量模型为

$$y_i = a + \varepsilon_i \quad i = 1, 2, \dots, n$$

例1.1.2 一批产品，总数是 N ，次品率 θ 是未知数。显然次品数 $N\theta$ 也是未知数。要知道关于 θ 的信息，一个办法是对全体产品逐一检验；另一个办法是抽取样本进行检验。因为前者化费太大，尤其是破坏性产品，一经检验就浪费了，所以很少采用此种办法。通常采用后者，从总体中抽取随机样本，对样本的每个产品逐一检验，获得关于 θ 的信息。此时，数据的收集是样本中的次品数。

实质上，统计推断问题，是用随机试验产生的数据，检验理论与实际的符合性。

随机试验就是对随机现象的观测。在概率论中，随机现象服从什么概率分布是已知的。但是，在实际问题中，随机现象服从什么概率分布是未知的。所谓未知，一是指概率分布的类型未知。例如，录音机的寿命服从什么分布，不可能

精确回答。二是指概率分布的类型已知，而概率分布所含有的参数未知。例如，人的身高服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$ ，其中 μ 和 σ^2 的精确值未知。

再次强调，数理统计的思考方法是从总体中抽取随机样本，用样本提供的信息，推断总体服从什么类型的概率分布或估计参数的精确值。当然，推断是有风险的，所以每一个推断必然伴随概率，以判定推断的可靠性。

§ 1.2 数理统计的基本概念

一、总体和样本

数理统计学，不论理论或应用，最基本的问题是研究总体和样本的关系，所以总体和样本这两个术语贯穿于本书的各章、节。

在多数实际问题中，人们感兴趣的是一批物或一群人具有的某种特性。例如，要调查某地区全体大学生的身高、体重和视力，以便了解青年学生的健康状况。又如，要检查某灯泡厂每天生产的灯泡的耐用时间，以便了解产品的质量，等等。某地区的全体大学生，每天生产的一批灯泡，都称为总体。

定义1.2.1 所研究对象的全体组成的集合称为总体。组成总体的每个对象称为个体。

一般来说，总体有两种类型：（1）由所研究的全体人或物组成的集合；（2）由数组成的集合。而第一种情形可以归结到第二种情形。因为由人或物构成的样本空间，每个人或物对应一个数。例如，每个人对应一个身高，称这个数是

随机变量。如果对人的总体来说，则人的身高的全体组成了数的总体。数组成的总体，能够从理论上通过概率分布来描述。如果感兴趣的是人的身高，则总体服从正态分布。如果感兴趣的是人的性别，即男性和女性；或人的年龄，即小于30岁和大于、等于30岁，则总体服从贝努里分布。如果感兴趣的是男性人数，则总体服从二项分布。

定义1.2.2 总体的任何一个子集合，称为从总体中抽取的样本。样本中包含个体的数目称为样本容量。

从总体中抽取样本时，最重要的问题是尽可能地避免样本偏差，所以通常采用随机的方式抽样。随机的意思是指总体中每个个体都以某个概率被抽取入样；每次抽取时，每个个体以相等的概率被抽到，或以不等的概率被抽到。

通常采用简单随机抽样、分层抽样、等距抽样、整群抽样等，简单随机抽样可用抽签的方法，或用随机数表，见附表1。

随机数表由0到9的数字随机排列而成。附表1只给出 $50 \times 50 = 2500$ 个数字，排成50行50列，根据需要可以把它当作任何数来使用。

例1.2.1 为了检验1000个灯泡的耐用时间，从中随机抽取20个进行检验，则1000个灯泡组成一个总体，20个灯泡组成一个样本，试用随机数表抽样。

解 在随机数表中，任取一行和一列，如从第4行和第24列出发，向下取三位数：372, 243, 793, 474, 050, 207, 746, 386, 146, 532, 676, 407, 951, 225, 436, 934, 537, 278, 138, 769.

当某号码入样，如果再次碰到该号码时，则舍去。如果已达到表下端，则移到下一列的上端继续往下边取。

把1000个灯泡依次从0~999编号，把入样号码取出来，获得容量为20的样本。我们期望样本中灯泡的平均耐用时间相当接近1000个灯泡的平均耐用时间。

抽样的方法是多种的，留在本书的续篇中介绍。

二、随机样本

在数理统计中，我们关心的是总体所包含的个体的某一项或某几项数字指标，以及该数字指标在总体中的分布情况。例如，对灯泡，关心的是它的耐用时间；对人，关心的是他的身高和体重。因为每个个体的数字指标往往都是不同的，所以在抽样之前，数字指标不能预先准确知道，而是在抽样之后，才能获得样本的一组观察值。因此，数字指标是随机变量。用 X 表示数字指标，则 X 是一个随机变量。今后，把总体和数字指标所有可能取值的全体组成的集合等同起来。说总体 X 服从什么分布，就意味着数字指标 X 服从什么分布。

若我们关心的是总体中个体的二项数字指标，令 X, Y 分别表示该二项数字指标，则 (X, Y) 表示二维随机变量。二项数字指标 (X, Y) 所有可能取值的全体组成一个二维总体，该总体 (X, Y) 服从二维概率分布。

从总体抽取容量为 n 的样本，它们的数字指标分别用 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 表示，则样本是 n 维随机变量。当样本已经抽定，意味着一次抽样后，通过对样本的观测，获得样本的一组数字，称这组数字是样本观察值，用 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 表示。 $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 是 n 维空间上的一个点。一组样本观察值 $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 可看作是随机试验的一个结果。把随机试验的所有可能结果组成的集合称为样本空间。它可以是 n 维空间或