高等学校教材

Linear Algebra

线性代数

游宏　朱广俊

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

高等学校教材

线性代数

Xianxing Daishu

游　宏　朱广俊

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS　BEIJING

内容提要

本书涵盖了国内现行线性代数课程教学基本要求中规定的基本内容，讲授方法、顺序与传统教材有所不同。例如，由线性方程组引入矩阵的概念及运算，由线性方程组的求解引入初等变换与初等矩阵，进而引入矩阵的等价、标准形和秩的概念。教材突出了线性方程组的求解与矩阵运算，增添了数学软件 MATLAB的初步应用。

全书采取分层次与模块相结合的结构，教学适用性强。学时数少的专业可讲第一章、第二章、第三章的部分内容及行列式，学时充裕、要求较高的专业可以讲授全书。

本书适用于普通高等学校理工、经管类本专科学生的线性代数课程教学，也可供相关读者参考。

图书在版编目(CIP)数据

线性代数／游宏，朱广俊编著．--北京：高等教育出版社，2012.3

ISBN 978-7-04-034016-7

Ⅰ．①线… Ⅱ．①游… ②朱… Ⅲ．①线性代数-高等学校-教材 Ⅳ．①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 008083 号

策划编辑	兰莹莹	责任编辑	李　茜	封面设计	赵　阳	版式设计	王　莹
插图绘制	尹文军	责任校对	窦丽娜	责任印制	田　甜		

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400-810-0598
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	网　　址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印　　刷	北京市联华印刷厂	网上订购	http://www.landraco.com
开　　本	787mm×960mm　1/16		http://www.landraco.com.cn
印　　张	11.75	版　　次	2012 年 3 月第 1 版
字　　数	210 千字	印　　次	2012 年 3 月第 1 次印刷
购书热线	010-58581118	定　　价	16.60 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换

版权所有　侵权必究

物 料 号　34016-00

前　　言

随着信息技术与计算技术的飞速发展,线性代数已成为我国高等学校理工、经管等学科本科大学生的一门重要的数学基础课程。由于线性代数课程教学起步较晚,不如微积分教学成熟,因而各高校的相关教学安排也很不一致。仅就教学时数而言在各高校就有很大差别,在教学内容的取舍、内容的表述方式、数学软件的使用、联系实际等问题上一直存在不同的声音和不同的教学实践。近年来,国内出版了不少供非数学类专业本科教学使用的线性代数教材,一些教材从不同角度对传统的教学内容做了一定的改革。如,增添了数学软件的使用,增加了联系实际问题的例子,采用代数余子式归纳定义行列式,变换了基本内容的讲授顺序等。这些尝试都为线性代数教学提供了一些新的模式与思路,也给予我们不少启发。

应高等教育出版社之约,笔者吸取了新近出版的一些同类教材的新思路,也听取了一些从事线性代数教学的教师的意见,编写了这本线性代数教材,其对象主要是普通高等学校理工、经管类的本专科大学生。本教材的主要特点是突出线性方程组的求解与矩阵运算,增添了数学软件 MATLAB 的初步应用。遵循国内现行的线性代数课程教学的基本要求,本教材仍然涵盖现行的线性代数教学的基本内容,但内容的讲授方法与顺序却有较大变化,采取了分层次与模块相结合的结构,而且力求精炼,其目的是方便使用本教材的教师根据所在学校的实际情况对授课内容进行取舍。在编写本教材时,我们做了以下几方面的努力:

1. 与中学数学教学接轨,由二元、三元线性方程组引进 n 元线性方程组与矩阵的概念及运算,而不像传统教材那样先讲行列式。

2. 由线性方程组的解法引入矩阵的初等变换及初等矩阵的概念,进而引入矩阵等价、标准形和秩的概念,在等价标准形唯一性的证明和矩阵的秩的引入过程中完全不借助行列式,而依赖分块矩阵的计算。在前两章就给出线性方程组求解的过程及通解的表达式,这样,前两章就构成一个模块,为学时数少、教学要求相对较低的学校或专业提供了方便。

3. n 维向量空间的概念介绍得较为简单,没有涉及线性变换,只提到矩阵左乘向量是线性变换。因为对国内大多数高等学校而言,线性代数的教学时数不够讲授这部分内容,即使讲授也只是粗略提一下;况且,绝大多数非数学类专业的学生在其后的专业学习和未来工作中遇到的数学问题很多都涉及线性方程组和矩阵。此外,考虑到实际的需要,介绍了不相容线性方程组的最小二乘解。

4. 方阵的行列式的基本计算方法是用消法变换化方阵为上(下)三角形矩阵,其主对角线上元素的乘积即为该方阵的行列式。本教材把方阵的行列式的定义与计算统一起来,定义方阵的行列式为其上三角化(经消法变换)后的矩阵的主对角线上元素的乘积,这与现行的教材完全不同。这种定义方式涉及定义的合理性问题,我们把定义合理性的证明连同方阵的积的行列式等于两个方阵行列式的积的证明一并处理,放在附录中,教学时由教师取舍。笔者认为,这种定义方式与计算统一起来,避开了排列的逆序数、传统行列式定义的复杂性。但是否是一种好的方式还要在教学实践中检验。

5. 增添了 MATLAB 使用的初步介绍,这在国内新近出版的某些教材中已经出现,笔者在本书中做了有益的强化。

6. 将矩阵的特征值、相似对角化与二次型合并为一章,以求精炼。但实对称矩阵可正交相似对角化、二次型的惯性定理的证明全都给出,笔者并不认为非数学类专业的学生不需要理论证明与逻辑训练,只是对不同的对象要"因材施教"。

对于教学时数较少、要求相对较低的专业和读者,教学时可只讲授前四章,甚至可只讲前三章,最后介绍一下什么是方阵的行列式(因算法和定义一致)及有助于行列式计算的几个性质即可(不讲证明)。根据笔者的教学经验,如果只讲授这些内容(包括 MATLAB 使用),25 ~ 30 学时差不多可行,如不涉及"矩阵的秩的性质"(该节打了 * 号,意指可让学生自学),或把 MATLAB 使用抽出放在数学实践课中讲授,则学时可以更少。对于学时数更少的学校或专业,也可只讲授前两章和第三章的部分内容。对于学时充裕、要求较高的专业可讲授全书。阅读过本书初稿的教师普遍认为:纵观全书,结构合理,难易适度,适用性强。笔者的本意也是想使该教材有较好的普适性。

本教材前四章由游宏编写,第五章主要由朱广俊编写,习题解答由朱广俊给出,顾燕参与了检查、修改等工作。

本教材与国内现行教材相比,体系及内容安排(包括一些主要结论的证明)变化较大,难免出现这样或那样的错误,笔者衷心希望数学界的同行和学生们批评指正。

游 宏

2011 年 9 月于苏州大学

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

目　　录

第一章　线性方程组与矩阵 …… 1

1.1　二元和三元线性方程组 …… 1

1.2　n 元线性方程组 …… 5

1.3　矩阵的概念 …… 8

1.4　矩阵的运算 …… 11

1.5　可逆矩阵 …… 18

1.6　矩阵的分块 …… 21

1.7　用 MATLAB 解题 …… 24

实验习题 …… 28

习题一 …… 28

第二章　矩阵的初等变换及其应用 …… 32

2.1　矩阵的初等变换与等价 …… 32

2.2　初等矩阵 …… 34

2.3　用初等变换求逆矩阵 …… 37

2.4　分块矩阵的初等变换 …… 40

2.5　矩阵的秩及其求法 …… 41

*2.6　矩阵的秩的某些性质 …… 44

2.7　线性方程组的解 …… 46

2.8　应用举例 …… 54

2.9　用 MATLAB 解题 …… 56

实验习题 …… 61

习题二 …… 61

第三章　n 维向量 …… 65

3.1　n 维向量及向量空间 …… 65

3.2　向量组的线性相关性 …… 68

3.3　向量组的秩 …… 73

3.4　基、维数与坐标 …… 77

3.5 向量的数量积及正交性 …… 79
3.6 线性方程组的解的结构 …… 83
3.7 线性方程组的最小二乘解 …… 88
3.8 用 MATLAB 解题 …… 90
实验习题 …… 94
习题三 …… 94

第四章 行列式 …… 97

4.1 行列式的概念 …… 97
4.2 行列式的性质 …… 102
4.3 行列式的应用 …… 111
4.4 用 MATLAB 解题 …… 116
实验习题 …… 117
*4.5 附录 …… 118
习题四 …… 123

第五章 方阵的对角化与二次型 …… 128

5.1 方阵的特征值与特征向量 …… 128
5.2 相似矩阵与矩阵的对角化 …… 134
5.3 实对称矩阵的正交相似对角化 …… 142
5.4 二次型及其标准形 …… 145
5.5 惯性定理与正定二次型 …… 152
5.6 用 MATLAB 解题 …… 157
实验习题 …… 162
习题五 …… 162

部分习题参考答案 …… 166

参考书目 …… 179

第一章　线性方程组与矩阵

在日常生活中，除了算术以外，线性代数是应用最为广泛的数学学科. 本章将从大家熟悉的二元、三元线性方程组起步，介绍一般的 n 元线性方程组及求解的过程；并由此引出矩阵的概念，随之介绍矩阵的线性运算、乘积运算和矩阵的一些性质.

如同所有的数学学科一样，线性代数有两类基本的数学构件. 一类是对象：数组；一类是对这些对象进行运算并研究这些运算所满足的规律. 当然，还要熟悉这些概念与运算的应用.

1.1　二元和三元线性方程组

中学里，我们学习了求解一些简单的一次方程. 最简单的一次方程是

$$ax=b\ (a,b\text{ 均为实数},a\neq 0).$$

这个方程有唯一解 $x=b/a$，且这个解在数轴上可用一个点来表示.

二元一次方程的一般形式是

$$ax+by=c\ (a,b,c\text{ 均为实数},a,b\text{ 不全为零}). \tag{1.1}$$

当 $a\neq 0,b\neq 0$ 时，(1.1)式可化为 $y=-\frac{a}{b}x+\frac{c}{b}$，它有无穷多个解；它的解是一些数对 (x_0,y_0)，它们在平面直角坐标系中可表为一条直线. 例如(1.1)式中取 $a=-1,b=2,c=2$，则 $y=\frac{1}{2}x+1$，它的图像（即满足方程的点组成的图像）如图 1.1.

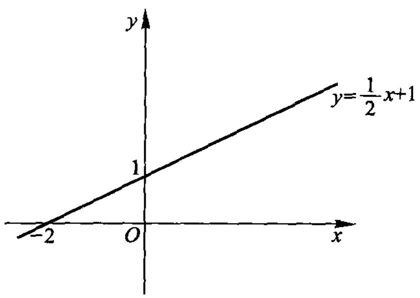


图 1.1

在某些特定的数集或条件下，方程(1.1)也可能只有有限个解. 例如大家熟

知的“鸡兔同笼”问题：笼子里养着鸡和兔，已知笼子里有 100 条腿，问鸡和兔各有多少只？假设鸡的个数为 x，兔的个数为 y，则 $2x+4y=100$. 又鸡与兔的个数 x,y 应为非负整数，因此这个方程只能有有限个解. 本教材中，所研究的问题基本上都是在实数集上考虑的. 过去，我们谈到数集，只注意它的对象，对其中的运算有所忽略. 事实上，当把运算考虑进去时，有理数集、实数集、复数集可分别称为有理数域、实数域、复数域. 下面给出数域的概念.

定义 1.1 设 F 是复数集的一个不少于两个元素的子集，如 F 对“+”、“-”、“×”、“÷”四种运算封闭，即若 $a,b\in F$，则 $a\pm b, ab, \dfrac{a}{b}\in F(b\neq 0)$，则称 F 为一个**数域**.

因复数运算满足加法、乘法的交换律、结合律以及乘法对加法的分配律，这些运算规律自然地遗传给对“+”、“×”运算封闭的子集. 易验证有理数集、实数集、复数集都满足上述运算性质，故它们都是数域. 数集

$$Q(\sqrt{2})=\{a+b\sqrt{2}\mid a,b\text{ 为有理数}\}$$

按数的四则运算也构成一个数域（请同学们按数域的定义自己证明）. 这说明在有理数域与实数域之间还有很多数域. 今后，记有理数域为 $\mathbf{Q}$，实数域为 $\mathbf{R}$，复数域为 $\mathbf{C}$. 读者可尝试证明有理数域为最小的数域，即，任何数域都包含有理数域.

例 1.1 在 $\mathbf{R}$ 中求解下列四个二元一次方程组.

$$\text{a)}\begin{cases}x_1-2x_2=1,\\2x_1+3x_2=0;\end{cases}\qquad \text{b)}\begin{cases}x_1-2x_2=1,\\2x_1-4x_2=2;\end{cases}$$

$$\text{c)}\begin{cases}x_1-2x_2=1,\\2x_1-4x_2=3;\end{cases}\qquad \text{d)}\begin{cases}x_1-2x_2=1,\\2x_1+2x_2=-1,\\2x_1-x_2=\dfrac{1}{2}.\end{cases}\tag{1.2}$$

解 用消元法求解方程组 a). 将 a) 的第一个方程乘 -2 加至第二个方程得 $7x_2=-2$，即 $x_2=-\dfrac{2}{7}$，代入第一个方程得 $x_1=\dfrac{3}{7}$. 经检验，$\left(\dfrac{3}{7},-\dfrac{2}{7}\right)$ 为方程组 a) 的唯一解；它表示直线 $x_1-2x_2=1$ 与 $2x_1+3x_2=0$ 的交点. 见图1.2.

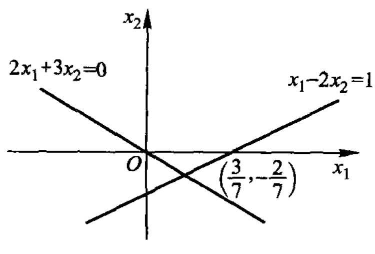


图 1.2

方程组 b)有无穷多个解,它的第二个方程是多余的. 解的图像是一条直线. 用消元法可得方程组 c)无解,因方程组 c)表示的两条直线平行. 见图 1.3.

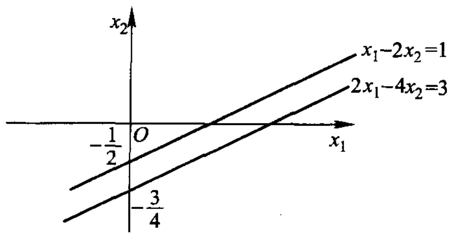


图 1.3

方程组 d)有唯一解,将 d)的第二个方程乘$\frac{1}{2}$加至第一个方程,得到它的第三个方程,从而第三个方程是多余的.

三元一次方程的一般形式是

$$ax+by+cz=d\ (a,b,c,d\ 均为实数,a,b,c\ 不全为零). \tag{1.3}$$

这里,不准备对上面方程的解作详细讨论,只考虑某些情况下方程的解的图像. 当 $c\neq0$ 时,对 x,y 的任一组值(x_0,y_0),代入方程(1.3)后可得 z 的唯一的值 z_0,即得到方程(1.3)的一个解(x_0,y_0,z_0). 故方程(1.3)一般有无穷多个解. 在 a,b,c 不全为零的条件下,方程(1.3)在空间直角坐标系中的图像是一个平面.

例 1.2 求解三元一次方程组

$$\begin{cases} x_1-x_2-x_3=4, \\ 3x_1+5x_2+x_3=-2, \\ -x_1+2x_2+6x_3=1. \end{cases} \tag{1.4}$$

解 用消元法,将第一个方程分别乘-3 和 1 加至第二、第三个方程,得到

$$\begin{cases} x_1-x_2-x_3=4, \\ 8x_2+4x_3=-14, \\ x_2+5x_3=5, \end{cases}$$

交换第二、第三个方程得

$$\begin{cases} x_1-x_2-x_3=4, \\ x_2+5x_3=5, \\ 8x_2+4x_3=-14, \end{cases} \tag{1.5}$$

将(1.5)式第二个方程乘-8 加至第三个方程得$-36x_3=-54$,即 $x_3=\frac{3}{2}$. 代入第二个方程,解得 $x_2=-\frac{5}{2}$. 继而求得 $x_1=3$. 故 $\left(3,-\frac{5}{2},\frac{3}{2}\right)$为方程组(1.4)的唯一

解. 它所对应的点是方程组(1.4)中的三个方程所对应的三个平面的公共点.

例 1.3　考察下面三个三元一次方程组

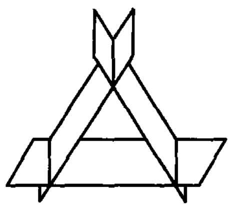
$$
\text{a)}\ \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 4, \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 = -2, \\ 2x_1 + 6x_2 + 2x_3 = -6; \end{cases} \quad
\text{b)}\ \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 4, \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 = -2, \\ 2x_1 + 6x_2 + 2x_3 = 5; \end{cases} \quad
\text{c)}\ \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 4, \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 = -2, \\ 2x_1 + 2x_2 = -1, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 3. \end{cases} \tag{1.6}
$$

解　用消元法可得:a)有无穷多个解,解的图像是方程 $x_1-x_2-x_3=4$ 与 $4x_2+2x_3=-7$ 所对应的平面的交线. a)的第三个方程是多余的. 方程组 b)无解,它的后两个方程对应的平面交于一条直线,但该直线平行于第一个方程所对应的平面. 方程组 c)含四个方程,但第一个方程与第三个方程的和等于第四个方程,从而第四个方程是多余的. 而前三个方程组成的方程组同 b)一样无解.

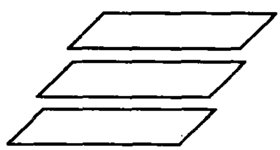
上面的二元、三元线性方程组的例子告诉我们,一般的方程组并不都像中学里遇到过的方程组那样"单纯",即只有唯一的解. 它可能无解,可能有无穷多个解,当然也可能只有唯一解.

从几何的观点,三元一次方程组的解的情况是由方程所对应的平面的位置决定的:当两个平面的交线与第三个平面平行(或三个平面平行)时,方程组无解;当三个平面交于一条直线或三个平面重合时,方程组有无穷多个解;当三个平面交于一点时,方程组有唯一解.

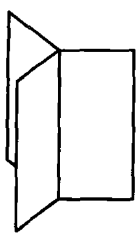
见图 1.4.



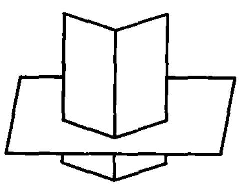
(a) 无解



(b) 无解，三平面平行但不重合



(c) 有无穷多个解



(d) 有唯一解

图 1.4

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

二元、三元一次方程组的解所对应的图像都仅与直线、平面相关,而与弧、曲线、曲面无关.所以一次式常称为线性式,这也是线性代数的“线性”一词的来源.

对于多于三个变量的线性方程组,现实世界中没有图像与之对应;但现实生活中,这类线性方程组的确存在,我们需作进一步讨论.

1.2 n 元线性方程组

先看一个例子.

例 1.4 图 1.5 是二横、三纵的街道交通交汇图,其中Ⓐ,Ⓑ,…,Ⓕ表示节点,汽车进出的流量已标于图上,现要计算每两个节点间路段上的交通流量 $x_1,\cdots,x_7$(假设在每个节点处进入与离开的汽车数量相同).

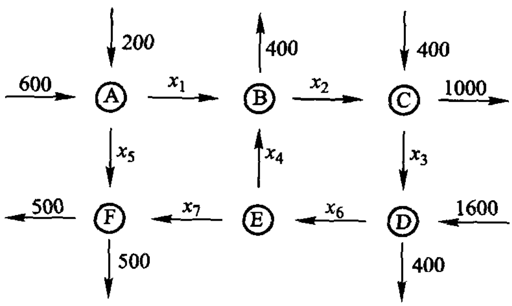


图 1.5

根据已知条件可得 6 个节点的流量方程为

$$
\begin{aligned}
600+200&=x_1+x_5 &&(\text{节点 A}),\\
x_1+x_4&=x_2+400 &&(\text{节点 B}),\\
x_2+400&=1000+x_3 &&(\text{节点 C}),\\
1600+x_3&=400+x_6 &&(\text{节点 D}),\\
x_6&=x_4+x_7 &&(\text{节点 E}),\\
x_5+x_7&=500+500 &&(\text{节点 F}),
\end{aligned}
$$

将上面的方程加以整理得

$$
\begin{cases}
x_1 + x_5 = 800, \\
x_1 - x_2 + x_4 = 400, \\
x_2 - x_3 = 600, \\
x_3 - x_6 = -1200, \\
x_4 - x_6 + x_7 = 0, \\
x_5 + x_7 = 1000,
\end{cases} \tag{1.7}
$$

这是一个含 7 个未知量、6 个方程的线性方程组.

一般的 n 元(即含 n 个未知量)线性方程组可写成如下形式:

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m,
\end{cases} \tag{1.8}
$$

其中 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 表示 n 个未知量, m 是方程的个数, a_{ij} $(i=1,\cdots,m;j=1,\cdots,n)$ 称为方程组的系数,它的第一个足标 i 表示它在第 i 个方程(行)中,第二个足标 j 表示它是第 j 个未知量(列)的系数, b_i $(i=1,\cdots,m)$ 称为方程组的常数项. 方程组(1.8)的全称为**含 n 个未知量 m 个方程的线性方程组**. 一般来讲, m 未必等于 n. 若所有的 $b_i=0$ $(i=1,\cdots,m)$,则称方程组(1.8)为**齐次线性方程组**. 否则称方程组(1.8)为**非齐次线性方程组**.

若取一组数 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 分别代替方程组(1.8)中的 n 个未知量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$,使方程组(1.8)的 m 个等式都成立,则称有序数组 $(c_1, c_2, \cdots, c_n)$ 是方程组(1.8)的一个**解**. 方程组(1.8)的全部解所组成的集合称为方程组(1.8)的**解集合**. 如果方程组(1.8)有解,则称它是**相容**的,否则,称它是**不相容**的. 若两个线性方程组的解构成的集合相同,则称它们是**同解的方程组**.

现在我们来求解方程组(1.7),仍用大家熟悉的消元法:将它的第一个方程乘 -1 加至第二方程得 $-x_2+x_4-x_5=-400$,再将它加至(1.7)式的第三个方程得 $-x_3+x_4-x_5=200$,将这个方程加至(1.7)式的第四个方程得 $x_4-x_5-x_6=-1000$,再将它乘 -1 加至(1.7)式的第五个方程得 $x_5+x_7=1000$. 这样,变换后得到的方程组为

$$
\begin{cases}
x_1 + x_5 = 800, \\
-x_2 + x_4 - x_5 = -400, \\
-x_3 + x_4 - x_5 = 200, \\
x_4 - x_5 - x_6 = -1000, \\
x_5 + x_7 = 1000,
\end{cases} \tag{1.9}
$$

再将 x_6,x_7 移至方程的右边得

$$\begin{cases} x_1 \qquad\qquad\quad +x_5=800, \\ \quad -x_2 \qquad +x_4-x_5=-400, \\ \qquad\quad -x_3+x_4-x_5=200, \\ \qquad\qquad\qquad x_4-x_5=-1000+x_6, \\ \qquad\qquad\qquad\quad x_5=1000-x_7, \end{cases} \tag{1.10}$$

这里 x_6,x_7 称为自由未知量,其余的未知量可用 x_6,x_7 表出,得

$$x_1=-200+x_7,\ x_2=-600+x_6,\ x_3=-1200+x_6,\ x_4=x_6-x_7,\ x_5=1000-x_7.$$

对于 x_6,x_7 的任一组值 (c_1,c_2),由上式可唯一地确定 $x_1,\cdots,x_5$ 的值. 方程组(1.7)虽然在理论上有无穷多个解,但实际问题中,由于汽车的数量必须取整数,并且它的取值范围也受这一区域日常汽车实际流量的限制,因而实际上 x_6,x_7 只能取有限多组值,但方程组(1.7)的解毕竟不唯一. 实际问题中我们可通过调整节点 E,F 处的汽车流量而改变这一区域的交通状况.

不仅 x_6,x_7 可以作为自由未知量,x_5,x_6 也可作为自由未知量(还可取其他两个变元作为自由未知量). 取 x_5,x_6 作为自由未知量而得到的方程组(1.7)的解在这个实际问题中表示可通过调节其他路段的汽车流量来改变这一区域的交通状况. 但也不是任意两个变元都可选作自由未知量(如 x_5,x_7 取作自由未知量就不可行),这些问题都值得我们探讨.

例 1.5 求解线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1-2x_2 \qquad\quad +6x_4=2, \\ 2x_1 \ -x_2+2x_3 \ +x_4=-2, \\ 3x_1+2x_2+3x_3 \ +x_4=-1, \\ \qquad 2x_2 \ +x_3+5x_4=4. \end{cases} \tag{1.11}$$

解 将方程组(1.11)的第一个方程分别乘 $-1,-\frac{3}{2}$ 加至第二、第三个方程,得到

$$\begin{cases} 2x_1-2x_2 \qquad\quad +6x_4=2, \\ \qquad\quad x_2+2x_3-5x_4=-4, \\ \qquad 5x_2+3x_3-8x_4=-4, \\ \qquad 2x_2 \ +x_3+5x_4=4, \end{cases} \tag{1.12}$$

将方程组(1.12)的第二个方程分别乘 $-5,-2$ 加至第三、第四个方程,得到

$$\begin{cases}2x_1-2x_2 \qquad\quad +6x_4=2, \\ \qquad\quad x_2+2x_3 \ -5x_4=-4, \\ \qquad\qquad -7x_3+17x_4=16, \\ \qquad\qquad -3x_3+15x_4=12,\end{cases} \tag{1.13}$$

将方程组(1.13)的第三、四两个方程交换，变换后将第三个方程乘$-\frac{7}{3}$加至第四个方程，得到

$$\begin{cases}2x_1-2x_2 \qquad\quad +6x_4=2, \\ \qquad\quad x_2+2x_3 \ -5x_4=-4, \\ \qquad\qquad -3x_3+15x_4=12, \\ \qquad\qquad\qquad -18x_4=-12,\end{cases} \tag{1.14}$$

求得

$$x_1=-\frac{1}{3}, \quad x_2=\frac{2}{3}, \quad x_3=-\frac{2}{3}, \quad x_4=\frac{2}{3}.$$

注意 线性方程组(1.10)和(1.14)的形状都像一个阶梯，称之为**行阶梯形方程组**.

在上面求解线性方程组(1.7)与(1.11)的过程中，应体会到还存在一些问题，如

(i) 对线性方程组作消元变换后得到的线性方程组与原方程组是否同解？虽然中学里对二元、三元线性方程组也是通过消元变换来求解，但是没有严格证明消元变换不改变方程组的解.

(ii) 带着未知量、运算符号和等号作消元变换是否累赘？

(iii) n 元线性方程组在什么条件下无解、有解？有解的情况下，何时有无穷多个解？何时有唯一解？

1.3 矩阵的概念

将线性方程组(1.8)式等号左边的未知量 x_i $(i=1,\cdots,n)$ 及“+”号去掉，就得到一个含有 $m\times n$ 个数据的 m 行 n 列的数表.

定义 1.2 由数域 F 中 $m\times n$ 个数 a_{ij} $(i=1,\cdots,m;j=1,\cdots,n)$ 排列成的 m 行 n 列的数表

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{1.15}$$

称为 $m\times n$ **矩阵**，其中 a_{ij}为该矩阵的第 i 行第 j 列的元素.

通常用大写黑体的英文字母来表示矩阵，矩阵(1.15)可简写为 $\boldsymbol{A}$，或 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，或 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$.

数域 F 中 $m\times n$ 矩阵的集合记为 $M_{m\times n}(F)$，实数域 $\mathbf{R}$ 中 $m\times n$ 矩阵的集合记为 $M_{m\times n}(\mathbf{R})$. 若 $m=n$，则称 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶**方阵**. 数域 F 上 n 阶方阵的集合记作 $M_n(F)$. a_{ii} $(i=1,\cdots,n)$称为方阵 $\boldsymbol{A}$ 的**主对角线元素**，简称**对角线元素**.

若 $m=1$，$\boldsymbol{A}$ 是 1 行 n 列的矩阵，此时称 $\boldsymbol{A}=(a_{11},a_{12},\cdots,a_{1n})$为**行矩阵**，又称为**行向量**. 行向量也记作 $\boldsymbol{A}=(a_{11},a_{12},\cdots,a_{1n})$. 若 $n=1$，$\boldsymbol{A}$ 是 m 行 1 列的矩阵，此时称

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$$

为**列矩阵**，又称为**列向量**. 当 $m=n=1$ 时，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 由一个数 a_{11}构成. 若 $\boldsymbol{A}$ 的所有元素都等于 0，则称 $\boldsymbol{A}$ 为**零矩阵**，记为 $\mathbf{0}_{m\times n}$或 $\mathbf{0}$.

两个矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{s\times t}$，如果满足 $m=s,n=t$，则称 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 是**同型矩阵**. 如

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad 与 \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

是同型矩阵.

若两个 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})$的对应位置的元素相等，即 $a_{ij}=b_{ij}$ $(i=1,\cdots,m;j=1,\cdots,n)$，则称 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ **相等**，记作 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.

例 1.6 设

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & 3 & 4 \end{pmatrix},$$

若 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$，则 $x_1=1,x_2=2,x_3=-1,y_1=0$.

n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 中，如果除主对角线元素外其余的元素都为 0，称 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶**对角矩阵**，即

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \tag{1.16}$$

记为 $A=\operatorname{diag}(a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn})$.

若(1.16)式中的 $a_{11}=a_{22}=\cdots=a_{nn}$，即

$$A=\operatorname{diag}(a,a,\cdots,a)\quad(a=a_{11}), \tag{1.17}$$

则称 A 为**标量矩阵**，若(1.17)式中的 $a=1$，称 A 为 n 阶**单位矩阵**(或**恒等矩阵**)，记为 I_n. 即

$$I_n=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}. \tag{1.18}$$

若 n 阶方阵 $A=(a_{ij})$，当 $i>j$ 时，有 $a_{ij}=0$，即

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \tag{1.19}$$

则称 A 为**上三角形矩阵**. 反之，当 $i<j$ 时，有 $a_{ij}=0$，即

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \tag{1.20}$$

则称 A 为**下三角形矩阵**.

矩阵的概念不仅可以由线性方程组的系数排列提取出来，日常生活中的许多问题都可以提取或得到矩阵.

例 1.7 某航空公司在四个城市之间开辟了若干航线，图 1.6 表示了四个城市间的航班图. 如果从 A 城市到 B 城市有航班，则用线段连接 A，B 并且箭头指向 B；如果 B 城市也有到 A 城市的航班，则画双向箭头.

我们用 0 表示没有航班，用 1 表示有航班，横写的行表示入港城市，竖写的列表示出港城市，那么下页表反映了四个城市间的航班情况：

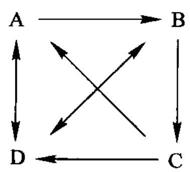


图 1.6

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com