名师导考

黄冈考霸

高中数学

考点精讲

热点分析

能力训练

吉林人民出版社

高中数学

本册编委

林六十　庞正琳

王再盛　黄才昌

吉 林 人 民 出 版 社

(吉)新登字 01 号

3T 名师导考·高中数学　高中语文

主　　编　林六十　沈文达
责任编辑　谷艳秋　　　　封面设计　孙进臣
责任校对　郭学善　　　　版式设计　屈文杰

出 版 者　吉林人民出版社
　　　　　(长春市人民大街 124 号　邮编 130021)
发 行 者　吉林人民出版社
印 刷 者　华中理工大学印刷厂

开　　本　787×1092　1/16
印　　张　44
字　　数　1120 千字
版　　次　2000 年 7 月修订版
印　　次　2000 年 7 月第 2 次印刷
印　　数　1—8 000 册

标准书号　ISBN 7-206-02449-1/G·854
全套定价　44.00 元(共二册)每册定价:22.00 元

前　　言

为了强化训练学生的知识素养、思维技巧和应考能力，全面提高学生素质，科学实现教学目标，我们特邀请黄冈重点中学的特高级教师精心编写了这套集学、练、考三位一体的《黄冈考霸》系列丛书。

《黄冈考霸》在内容安排上既遵循教学大纲，突出“双基”(即基础知识和基本技能)，又不拘泥于教学大纲，以能力(自学能力、思维能力、动手能力、解题能力)为主线，着重综合能力和综合素质的训练和考查。《黄冈考霸》按照各科考试说明和新颁布的中、高考范围所确定的专项考点进行编写，每章分为“考点说明与要点提示”、“例题分析”和“能力训练”等功能模块。各功能模块具有如下显著特点：

【考点说明与要点提示】着重对考试说明中有关本考点的内容和要求进行扼要阐释，指明训练中应注意的关键点。

【考点例题分析】列举近几年的优秀试题，剖析其考查的主要问题和解题思路。

【考点能力训练】针对考点内容精选适量的试题，使学生将理论与实践有机地结合起来，在“做”中融会贯通，增强思维能力和应考能力。

二十一世纪是教育的世纪，教育将更加注重质量和人才素质，并将在时间和空间上进一步拓展。因此，教育的概念将扩大，它不仅要授予学生走向社会所需要的知识，而且要开拓学生继续学习的能力。“授人以鱼，不如授人以渔。”学会学习，善于思考，把“知识扎实、能力强、素质高”的教学目标融于科学合理的“学、练、考”的系列化教学活动过程之中，应当成为师生共同的追求，这也正是我们编写这套丛书的根本宗旨。

编　　者

目　录

第一章 函 数

函数的知识是数学学科的基础知识，它像一条红线贯穿于中学数学的所有教学内容，其基础知识分布在中学各年级，它又是深入学习数学科学以及其他诸学科的基础. 因此，在复习阶段有必要将函数的有关知识做个归纳、整理，使学生能更为深刻地、系统地理解、掌握函数的基本理论.

解决有关函数的问题，既要具有数学的基础知识又要具有较强的综合应用数学知识的能力. 所以它是升学考试的必考内容，其试题一般都是区分成绩的主要依据. 对近几年高考试卷的统计分析就不难发现，有关函数知识的试题分基本占整个考卷分的 30%左右. 而且近年来还以有关函数的试题作为试卷的"压轴"题. 因此，在复习、备考阶段要极其重视函数问题的综合训练.

§1.1 函数的概念

一、备考要求

函数知识的复习，一般应达到综合应用的层次. 因此，对于函数的概念的具体要求是：

1. 理解集合的定义，熟练简单的集合并、交、补的运算，会用集合符号或区间表述函数的定义域.

2. 掌握函数和反函数的定义，会求并能正确表达反函数的定义域.

3. 能熟练应用函数符号求函数值.

4. 熟悉函数 $f(x)$ 与 $f^{-1}(x)$ 的图象的关系.

二、基本内容

根据备考要求，函数的概念应掌握的基础知识应包含下列内容：

1. 集合及其关系

集合的意义及集合的表示；

集合的包含、相等关系以及并、交、补的运算及其法则；

维恩图在解决有关集合的实际问题的作用；

应重视公式 $\#(A\cup B)=\#A+\#B-\#(A\cap B)$ 的应用和并、交关系在求解方程(组)和不等式(组)的应用.

2. 函数的概念

函数和反函数的定义及其记号 $f(x)$ 和 $f^{-1}(x)$；

函数的定义域和值域及其求法；

函数 $y=f(x)$ 的图象与方程 $f(x)=0$；

函数 $y=f(x)$ 与反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的关系.

应结合一次函数与反比例函数，重视数形结合方法在求解函数问题中的应用.

三、例题分析

例 1 (94·全国)设全集 $I=\{0,1,2,3,4\}$,集合 $A=\{0,1,2,3\}$. 集合 $B=\{2,3,4\}$,则 $\overline{A}\cup\overline{B}=$( )

(A) $\{0\}$; (B) $\{0,1\}$; (C) $\{0,1,4\}$; (D) $\{0,1,2,3,4\}$.

分析 理解了集的补以及并的关系,就可迅速地做出选择.

解 $\because I=\{0,1,2,3,4\}, A=\{0,1,2,3\}, B=\{2,3,4\}$

则 $\overline{A}=\{4\}$, $\overline{B}=\{0,1\}$, $\therefore \overline{A}\cup\overline{B}=\{0,1,4\}$.

故选择(C).

例 2 (95·全国) 已知 I 为全集,集合 M、$N\subset I$,若 $M\cap N=N$,则( ).

(A) $\overline{M}\supseteq\overline{N}$; (B) $M\subseteq\overline{N}$; (C) $\overline{M}\subseteq\overline{N}$; (D) $M\supseteq\overline{N}$.

分析 由条件 $M\cap N=N$,则 $N\subset M$. 做出维恩图(图 1-1)就可得正确判断.

解 $\because M\cap N=N$, 则 $N\subseteq M$. $\therefore \overline{M}\subseteq\overline{N}$. 故选择(C).

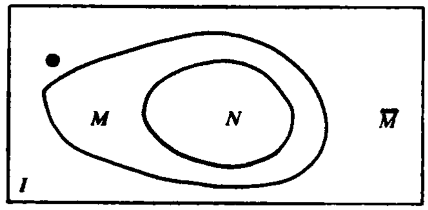

图 1-1

例 3 (96·全国)已知全集 $I=N$,集合 $A=\{x\mid x=2n, n\in N\}$, $B=\{x\mid x=4n, n\in N\}$,则( )

(A) $I=A\cup B$;

(B) $I=\overline{A}\cup B$;

(C) $I=A\cup\overline{B}$;

(D) $I=\overline{A}\cup\overline{B}$.

分析 显然理解 $A=\{x\mid x=2n, n\in N\}=\{$全体正偶数$\}$,$B$ 是所有能被 4 整除的正整数,就可得解.

解 显然 A 是正偶数集,则 $\overline{A}$ 是所有正的奇数集,又 $\overline{B}=\{x\mid x$ 不能被 4 整除,$x\in N\}$,可见,$\overline{A}\subset\overline{B}$.

$\therefore$选择(C).

例 4 (97·全国) 设集合 $M=\{x\mid 0\leqslant x<2\}$,集合 $N=\{x\mid x^2-2x-3<0\}$,则集合 $M\cap N=$( )

(A) $\{x\mid 0\leqslant x<1\}$; (B) $\{x\mid 0\leqslant x<2\}$; (C) $\{x\mid 0\leqslant x\leqslant 1\}$; (D) $\{x\mid 0\leqslant x\leqslant 2\}$.

分析 显然关键是求解 $x^2-2x-3<0$.

解 $\because N=\{x\mid x^2-2x-3<0\}=\{x\mid (x+1)(x-3)<0\}=\{x\mid -1<x<3\}$.

$\therefore$ $M\cap N=\{x\mid 0\leqslant x<2\}$.

$\therefore$ 选择(B).

例 5 设 $A=\{0,1\}$,$B=\{x\mid x\subseteq A\}$, 确定 A 与 B 的关系,并求 B.

分析 显然,正确求解这个题,关键是理解条件和题意. 即应理解条件中的集合 B 的元素是 A 的子集;要求 B 指的是写出(用穷举法)B 的元素.

解 $\because A=\{0,1\}$, 则 A 的子集一共有 2^2 个,它们是$\varnothing$,$\{0\}$,$\{1\}$和 A.

$\therefore$ $B=\{x\mid x\subseteq A\}=\{\varnothing,\{0\},\{1\},A\}$.

于是 A 是 B 的一个元素.

例 6 (1) 设 $A=\{y\mid y=x^2, x\in \mathrm{R}\}$, $B=\{y\mid y=2-|x|, x\in \mathrm{R}\}$,求 $A\cap B$.

(2) 设 $I=\{(x,y)\mid x,y\in\mathrm{R}\}$，$P=\{(x,y)\mid \frac{y-3}{x-2}=1,x,y\in\mathrm{R}\}$，$Q=\{(x,y)\mid y=x+1,x,y\in\mathrm{R}\}$，求 $\overline{P}\cap Q$.

分析 这两个题关键都是对集合表述的理解.事实上，这里，A、B 都是实数集的子集，常见的错误是将 A、B 分别理解为抛物线和折线；而对于(2)，虽理解了 P、Q 是平面点集，但对 P 则忽视 $x\neq 2,y\neq 3$，因此出现了 $\overline{P}\cap Q=\varnothing$ 的错误.

解 (1) $\because A=\{y\mid y=x^2,x\in\mathrm{R}\}=[0,+\infty)$，$B=\{y\mid y=2-|x|,x\in\mathrm{R}\}=(-\infty,2]$.

$\therefore A\cap B=\{y\mid 0\leqslant y\leqslant 2\}=[0,2]$.

(2) $\because P=\{(x,y)\mid \frac{y-3}{x-2}=1,x,y\in\mathrm{R}\}$

$=\{(x,y)\mid y=x+1$，且 $x\neq 2,y\neq 3\}$

$=\{(x,y)\mid y=x+1,x,y\in\mathrm{R}\}\cap\{(x,y)\mid x\neq 2,y\neq 3\}$.

又 $I=\{(x,y)\mid x、y\in\mathrm{R}\}$，

则 $\overline{P}=\{(x,y)\mid y\neq x+1\}\cup\{(x,y)\mid x=2,y=3\}$.

$\therefore \overline{P}\cap Q=\{(x,y)\mid x=2,y=3\}=\{(2,3)\}$.

例 7 设 $A=\{x\mid x^2-5x+4\geqslant 0\}$，$B=\{x\mid m+1\leqslant x\leqslant 2m-1\}$，若 $A\cap B=\varnothing$，求 m 的值.

分析 显然关键是对 B 中的元素的理解.由于 x 的范围是用参数 m 来确定，故应由 $m+1\leqslant 2m-1$，得 $m\geqslant 2$，因此，当 $m\geqslant 2$ 时，$B\neq\varnothing$，当 $m<2$ 时，$B=\varnothing$.

解 显然 $A=\{x\mid x^2-5x+4\geqslant 0\}=\{x\mid x\leqslant 1\}\cup\{x\mid x\geqslant 4\}$.

当 $m<2$ 时，$B=\varnothing$，则 $A\cap B=\varnothing$.

当 $m\geqslant 2$ 时，设 $A_1=\{x\mid x\leqslant 1\}$，$A_2=\{x\mid x\geqslant 4\}$，

则 $A=A_1\cup A_2$.

于是，若 $A\cap B=(A_1\cup A_2)\cap B=(A_1\cap B)\cup(A_2\cap B)=\varnothing$，

则$\begin{cases}A_1\cap B=\varnothing, & ①\\ A_2\cap B=\varnothing. & ②\end{cases}$

$\because m\geqslant 2$，则 $x\geqslant m+1\geqslant 3$，$\therefore B=\{x\mid 3\leqslant m+1\leqslant x\leqslant 2m-1\}$，

$\therefore A_1\cap B=\varnothing$，即当 $m\geqslant 2$ 时 ①成立.

对于②，$\because A=\{x\mid x\geqslant 4\}$，$B=\{x\mid m+1\leqslant x\leqslant 2m-1\}$，

只需 $2m-1<4$，即 $m<\frac{5}{2}$时，$A\cap B=\varnothing$.

$\therefore$ 当 $m<\frac{5}{2}$时，②成立.

$\therefore$ 当 $2\leqslant m<\frac{5}{2}$时，$A\cap B=\varnothing$.

综合，当 $m<\frac{5}{2}$时，$A\cap B=\varnothing$.

显然，本题的解答，一是要重视对任何集合 A，均有 $A\cap\varnothing=\varnothing$.所以要研究 B 是空集的情况；对于非空集合 B，为求得 m，也可由求解$\begin{cases}m\geqslant 2,\\ m+1>1,\\ 2m-1<4,\end{cases}$ 得到 $2\leqslant m<\frac{5}{2}$的结论.

例 8 某重点中学今年理科班有 420 名学生.参加毕业会考后，对语文和数学两科成绩统计发现，他们都至少有一科获得优秀成绩.且两科均获得优秀与语文或数学获优秀人数之比为 1∶3∶5.试求出各类的人数.

分析 这里全集 I 是该校理科班的 420 名学生. 只须作出维恩图(图 1-2),就可得解. 也可用计算并集元素个数的公式得到.

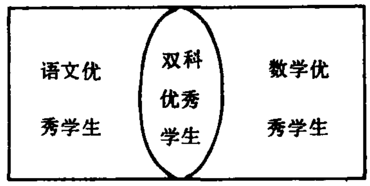

图 1-2

解 设 $A=\{$语文成绩为优秀的学生$\}$,

$B=\{$数学成绩为优秀的学生$\}$,

则 $A\cap B=\{$语、数两科均为优秀的学生$\}$且 $A\cup B=I$.

又设 $\#(A\cap B)=k$,则 $\#A=3k$, $\#B=5k$.

由 $\#(A\cup B)=\#A+\#B-\#(A\cap B)$,

$\because$ $\#(A\cup B)=420$,

则 $420=3k+5k-k$,

$\therefore k=60$, $\therefore \#A=180$, $\#B=300$.

答:两科均优秀的人数为 60 人,语文成绩优秀的为 180 人,数学优秀的为 300 人.

例 9 以 D_f 表示函数 f 的定义域,求下列函数的定义域 D_f,并分别以集合的记号和区间表示 D_f.

(1) $y=f(x)=(x-1)\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$;

(2) $y=\dfrac{\sqrt{1+x}}{\lg(2-x)}$;

(3) $y=\arcsin\dfrac{x-1}{2}+\sqrt{x^2-2x}$;

(4) $y=\sqrt{1-|x+a|}-\sqrt{1-|x-a|}\quad(a>0)$.

分析 由解析式表达的函数关系,其定义域是指使解析式有意义的自变量的全体值,因此,求定义域可按运算的意义求得. 关键是求解不等式.

解 (1) $D_f=\{x\mid\dfrac{1+x}{1-x}\geqslant 0$ 且 $x\neq 1\}$.

由 $\dfrac{1+x}{1-x}\geqslant 0$,则 $(x+1)(x-1)\leqslant 0(x\neq 1)$.

$\therefore\quad -1\leqslant x<1$.

$\therefore$定义域为 $D_f=\{x\mid -1\leqslant x<1\}=[-1,1)$.

(2) $D_y=\{x\mid x+1\geqslant 0\}\cap\{x\mid 2-x>0$,且 $\lg(2-x)\neq 0\}$,

由 $x+1\geqslant 0$,则 $x\geqslant -1$. 又 $2-x>0$,则 $x<2$. 又 $\lg(2-x)\neq 0$,则 $2-x\neq 1$,$\therefore$ $x\neq 1$.

$\therefore$ $D_y=\{x\mid -1\leqslant x<2$,且 $x\neq 1\}=[-1,1)\cup(1,2)$.

(3) $D_y=\left\{x\,\middle|\,\left|\dfrac{x-1}{2}\right|\leqslant 1\right\}\cap\{x\mid x^2-2x\geqslant 0\}$,

由 $\left|\dfrac{x-1}{2}\right|\leqslant 1$,则 $-1\leqslant x\leqslant 3$. 又 $x^2-2x\geqslant 0$,则 $x\leqslant 0$ 或 $x\geqslant 2$. $\therefore$ $D_y=\{x\mid -1\leqslant x\leqslant 0\}\cup\{x\mid 2\leqslant x\leqslant 3\}=[-1,0]\cup[2,3]$.

(4) $D_y=\{x\mid 1-|x+a|\geqslant 0\}\cap\{x\mid 1-|x-a|\geqslant 0\}$,

由 $1-|x+a|\geqslant 0$, 则 $|x+a|\leqslant 1$, $\therefore -1-a\leqslant x\leqslant 1-a$.

又 $1-|x-a|\geqslant 0$,则 $|x-a|\leqslant 1$, $\therefore -1+a\leqslant x\leqslant 1+a$.

显然,上述两个不等式对任意的 a,因而 $a>0$ 均成立. 于是由 $a>0$ 知 $-1-a<-1+a$, $1-a<1+a$. 因此

(i) 当 $1-a<-1+a$,即 $a>1$ 时,$D_y=\varnothing$.

(ii) 当 $-1+a<1-a$，即 $0<a\leqslant 1$ 时，$D_y=\{x\mid -1+a\leqslant x\leqslant 1-a\}=[-1+a,1-a]$.

∴ 当 $0<a\leqslant 1$ 时，$D_y=[-1+a,1-a]$. 当 $a>1$ 时，$D_y\doteq\varnothing$.

例 10 设 $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$. (1) 求 $f(f(x))$；(2) 试用 $f(x)$ 表示 $f(3x)$；(3) 证明 $f(x)$ 的反函数是其自身，即

$$f^{-1}(x)=\frac{x}{x-1}.$$

分析 本题关键是对函数记号 f 的理解、应用以及反函数的求法.

解 (1) ∵ $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$，∴ $f(f(x))=\dfrac{f(x)}{f(x)-1}=\dfrac{\dfrac{x}{x-1}}{\dfrac{x}{x-1}-1}=x$.

(2) 设 $y=f(x)=\dfrac{x}{x-1}$，则 $x=\dfrac{y}{y-1}$.

∴ $f(3x)=\dfrac{3x}{3x-1}=\dfrac{3\cdot\dfrac{y}{y-1}}{3\cdot\dfrac{y}{y-1}-1}=\dfrac{3y}{2y+1}$，∴ $f(3x)=\dfrac{3f(x)}{2f(x)+1}$.

(3) 由 (2) 知 $x=\dfrac{y}{y-1}$，即 $x=f^{-1}(y)=\dfrac{y}{y-1}$，∴ $f^{-1}(x)=\dfrac{x}{x-1}$.

例 11 设 $f(x)=\begin{cases}x+1 & (x<0),\\ x^2 & (x\geqslant 0).\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}3x+1 & (x\leqslant 1),\\ 0 & (1<x\leqslant 5),\\ -x-1 & (x>5).\end{cases}$

求 $h(x)=f(x)+g(x)$ 的表达式，并指出 $h(x)$ 的定义域.

分析 求 $h(x)$ 的表达式，关键是对函数定义中定义域以及函数运算的理解. 为实施运算，须在共同的定义（存在）域内，才有意义.

解 ∵ 当 $x<0$ 时，$f(x)=x+1$. 而对于 $g(x)$，由于 $x\leqslant 1$ 时，$g(x)=3x+1$.

为使它们能相加，须对 $g(x)$ 的定义域分段为 $x<0$ 以及 $0\leqslant x\leqslant 1$.

显然当 $x<0$ 时，$g(x)=3x+1$.

∴ 当 $x<0$ 时，$h(x)=f(x)+g(x)=4x+2$.

类似地当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，$h(x)=f(x)+g(x)=x^2+3x+1$.

当 $1<x\leqslant 5$ 时，$h(x)=f(x)+g(x)=x^2$.

当 $x>5$ 时，$h(x)=x^2-x-1$.

$$\therefore h(x)=\begin{cases}4x+2 & (x<0),\\ x^2+3x\neq 1 & (0\leqslant x\leqslant 1),\\ x^2 & (1<x\leqslant 5),\\ x^2-x-1 & (x>5).\end{cases}$$

∴ $D_h=(-\infty,+\infty)$.

例 12 设 $y=f(x)=\dfrac{2x-5}{x-3}$.

(1) 求函数 $y=f(x)$ 的定义域 D_f 和值域 $M(f)$；

(2) 若 $y=f(x)(x\in A)$. 值域为 $(-\infty,0]\cup[4,+\infty)$，求 A.

分析 (1) 由于 $y=f(x)=\dfrac{2x-5}{x-3}=2+\dfrac{1}{x-3}$，则 $x=\dfrac{3y-5}{y-2}$ 为其反函数. 可由反函数 $x=\dfrac{3y-5}{y-2}$ 的定义域求得函数的值域.

(2) 注意到$(-\infty,0]\cup[4,+\infty)\subset M(f)$，则 $A=\{x|\frac{2x-5}{x-3}\leqslant 0\}\cup\{x|\frac{2x-5}{x-3}\geqslant A\}$.

解 (1) $\because$ $y=f(x)=\frac{2x-5}{x-3}$，则 $D_f=\{x|x\neq 3,x\in\mathrm{R}\}=(-\infty,3)\cup(3,+\infty)$. 若 $x\in D_f$，则 $x=\frac{3y-5}{y-2}$. $\therefore$ $M(f)=\{y|y\neq 2,y\in\mathrm{R}\}=(-\infty,2)\cup(2,+\infty)$.

(2) 显然 $\{x|\frac{2x-5}{x-3}\leqslant 0\}=\{x|(x-3)(2x-5)\leqslant 0,x\neq 3\}=\{x|\frac{5}{2}\leqslant x<3\}=[\frac{5}{2},3)$.

又 $\{x|\frac{2x-5}{x-3}\geqslant 4\}=\{x|\frac{x-7}{x-3}\leqslant 0\}=\{x|(x-3)(x-7)\leqslant 0,x\neq 3\}=\{x|3<x\leqslant 7\}=(3,7]$.

$\therefore$ $A=\{x|\frac{5}{2}\leqslant x<3\}\cup\{x|3<x\leqslant 7\}=[\frac{5}{2},3)\cup(3,7]$.

例 13 设函数 $y=f(x)$的图象为 C，试证：

(1) 若 C 关于直线 $x=a$ 成对称，则 $y=f(2a-x)$；

(2) 若 C 关于直线 $y=x$ 成对称，则 $x=f(y)$；

(3) 若 C 关于直线 $y=-x$ 成对称，则$-y=f(-x)$；

(4) 若 C 关于直线 $y=x+b$ 成对称，则 $x+b=f(y-b)$.

分析 只须借助图象，求出图象上的任意点关于给定的直线的对称点的坐标.

证明 (1) 如图 1-3. 设 $M(x,y)$为 $y=f(x)$的图象 C 上的任一点. $M'(x',y')$为 M 关于直线 $x=a$ 的对称点，则 $x+x'=2a$，$y'=y$. $\therefore$ $x'=2a-x$，$y'=y$.

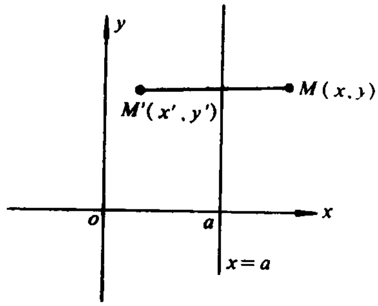

图 1-3

$\because$ $M'(x',y')$是 C 上的一点，则 $y'=f(x')$，

$\therefore$ $y=f(2a-x)$.

(4) 如图 1-4. 过 M 和 M' 作纵标线 MP 和 $M'P'$. 过 $B(0,b)$作 $BQ\perp MP$ 于 Q，交 $M'P'$ 于 Q'，则

$$\mathrm{Rt}\Delta BQM\cong\mathrm{Rt}\Delta BQ'M'.$$

$\therefore$ $y'=P'M'=P'Q'+Q'M'=BQ+Q'M'=x+b$，

$x'=OP'=BQ'=QM=PM-PQ=y-b$.

$\because$ $M'(x',y')$是 C 上的一点，

则 $y'=f(x')$，$\therefore$ $x+b=f(y-b)$.

(2)、(3)的证明留给读者自证.

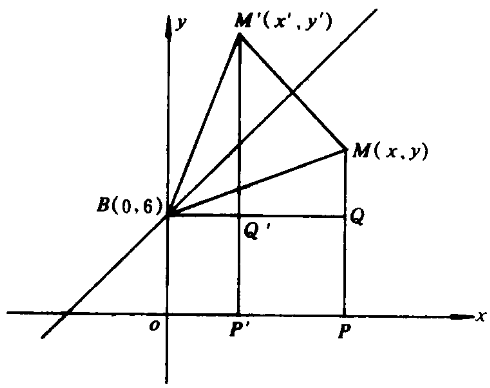

图 1-4

§1.2 函数的性质

一、备考要求

关于函数的性质.一般应通过复习达到理解、会用.具体要求是：

1. 理解函数的奇、偶性质；周期性质以及单调性质；

2. 对具体给定的函数的性质会正确地做出判断；

3. 能应用函数的性质解决一些实际问题.

二、基本内容

函数的性质，根据备考要求，在复习时应突出下列内容：

(1) 函数的奇、偶性，周期性以及单调性的概念及其图象的特点.

(2) 性质的判定：

关于函数性质的判定，既要判定定义域，又要判定方程(或不等式).

对于奇、偶性质：要求定义域关于原点成对称，又要满足 $f(-x)\pm f(x)=0$(或 $f(-x)=-f(x)$，或 $f(-x)=f(x)$).

对于周期性质：要求定义域是无限的，又要满足对任意 x，满足 $f(x\pm T)=f(x)$(T 为正常数).

对于单调性质：要确定判定的定义域，又要满足对定义域内的任意 x_1、x_2，当 $x_1<x_2$ 时，总有 $f(x_1)<f(x_2)$(或 $f(x_1)>f(x_2)$).

重点是函数性质的判定.应能根据判定方程(或不等式)，结合图象正确地做出判断.

三、例题分析

例 1 (93·全国) $F(x)=(1+\frac{2}{2^x-1})f(x)$ $(x\neq 0)$是偶函数，且 $f(x)$不恒等于零，则 $f(x)$ ( )

(A) 是奇函数； (B) 是偶函数；

(C) 可能是奇函数也可能是偶函数；

(D) 不是奇函数也不是偶函数.

分析 掌握了奇偶函数的概念，根据 $F(x)$是偶函数的条件，进行验证可确定选择.

解 ∵ $F(x)$是偶函数，则 $F(-x)=F(x)$. ∴$(1+\frac{2}{2^{-x}-1})f(-x)=(1+\frac{2}{2^x-1})f(x)$，则 $(1+\frac{2^{x+1}}{1+2^x})f(-x)=\frac{2^x+1}{2^x-1}f(x)$. ∴ $\frac{1+2^x}{1-2^x}f(-x)=\frac{2^x+1}{2^x-1}f(x)$.

显然 $\frac{2^x+1}{2^x-1}\neq 0$，则 $f(-x)=-f(x)$. ∴ $f(x)$为奇函数，故选 (A).

例 2 (95·全国)如图 1-5.函数 $y=-\frac{1}{x+1}$的图象是( )

分析 显然，掌握了图象是反比例函数的图象通过平移，反射而得，就可确定.

解 显然 $y=-\frac{1}{x+1}$可由反比例函数 $y=\frac{1}{x}$的图象经过平移，反射而得.选(B).

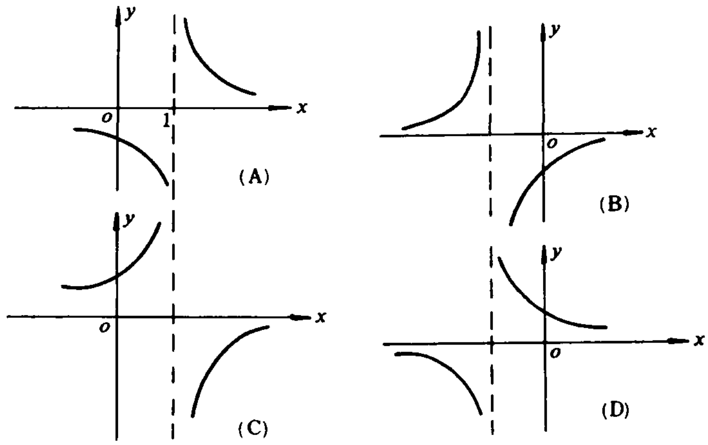

图 1-5

又 $y=-\dfrac{1}{x+1}$的定义域 $x\neq-1$，故排除(A)、(C). 当 $x=0$ 时，$y=-1$. 排除(D)，故选(B).

例 3 (96·全国) 设 $f(x)$是$(-\infty,+\infty)$内的奇函数，$f(x+2)=-f(x)$，当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，$f(x)=x$.

则 $f(7.5)$等于(　　)

(A) 0.5；　(B) -0.5；　(C) 1.5；　(D) -1.5.

分析 由于 $f(x)$当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时的值是确定的，因此，关键成了如何由 $f(x+2)=-f(x)$ 的条件使 f 在 7.5 处的值转化为 0 到 1 之间的值.

解 从定义域为$(-\infty,+\infty)$和条件 $f(x+2)=-f(x)$，不难发现有关系：

$$f(x+4)=f[(x+2)+2]=-f(x+2)=f(x).$$

可见 $f(x)$为以 $T=4$ 的周期函数.

又 ∵ $f(x)$为奇函数，∴ $f(7.5)=f(2\times 4-0.5)=f(-0.5)=-f(0.5)=-0.5$.

故选(B).

例 4 (97·全国)定义在区间$(-\infty,+\infty)$的奇函数 $f(x)$为增函数；偶函数 $g(x)$在区间$[0,+\infty)$的图象与 $f(x)$的图象重合，设 $a>b>0$ 给出下列不等式① $f(b)-f(-a)>g(a)-g(-b)$；② $f(b)-f(-a)<g(a)-g(-b)$；③ $f(a)-f(-b)>g(b)-g(-a)$；④ $f(a)-f(-b)<g(b)-g(-a)$. 其中成立的是(　)

(A) ①与④；　(B) ②与③；　(C) ①与③；　(D) ②与④.

分析 这是多项选择的问题. 一般宜根据条件，直接验证而确定.

解 ∵$f(x)$ 为奇函数，则 $f(-x)=-f(x)$，且 $f(0)=0$，又 $f(x)$为增函数，当 $a>b>0$ 时，$f(a)>f(b)>0$. 又 $g(x)$为偶函数，且在$[0,+\infty)$内与 $f(x)$两图象重合，则 $g(x)=\begin{cases} f(x) & (x\geqslant 0), \\ -f(x) & (x<0). \end{cases}$

于是当 $a>b>0$ 时，$[f(b)-f(-a)]-[g(a)-g(-b)]$

$$=[f(b)+f(a)]-[f(a)-f(b)]=2f(b)>0,$$

则　$f(b)-f(-a)>g(a)-g(-b)$.

可见①正确，因而②不真.

又当 $a>b>0$ 时，

$$[f(a)-f(-b)]-[g(b)-g(-a)]$$
$$=[f(a)+f(b)]-[f(b)-f(a)]=2f(a)>0$$

可见③正确.因而④不真.

故选(C).

例 5　(98·全国)向高为 H 的水瓶中注水.注满为止，如果注水量 V 与水深 h 的函数关系的图象如图 1-6 所示，那么水瓶的形状是(　)

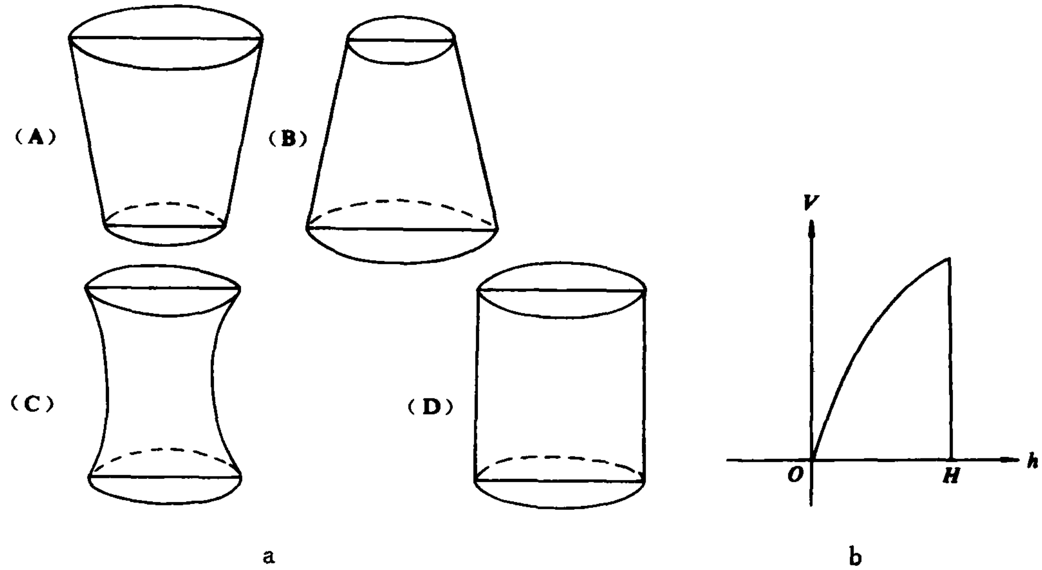

图 1-6

分析　右图是函数关系 $V=f(h)(0\leqslant h\leqslant H)$ 的大致图象，仔细观察，分析这条曲线不难发现，随着 h 的增加，其体积 V 增加得"很快".再观察瓶，也不然发现，一方面随着高度 h 的增高，体积均会增加.另一方面每个瓶增高相同的高度时，(B)瓶的体积较其余各瓶均快.(A)瓶也增加，但较(B)慢；(C)虽也增加，但在增加过程中，"中途时"又有一个减缓增加的过程；(D)瓶增加是线性的.故应选(B).

读者如能相应地画出(A)、(C)、(D)三瓶的函数关系 $V=f(h)$ 的大致曲线，则是一个很好的练习.

例 6　研究函数 $f(x)=x(\frac{1}{2^x-1}+\frac{1}{2})$ 的奇偶性.

分析　由于 $D_f=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 是关于原点对称的，故只须研究 $f(-x)$.

解　$\because D_f=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，$\therefore$ 对任意 $x\in D_f$ 有 $-x\in D_f$.

又　$f(-x)=-x(\frac{1}{2^{-x}-1}+\frac{1}{2})=x(\frac{2^x}{2^x-1}-\frac{1}{2})$

$$=x(1+\frac{1}{2^x-1}-\frac{1}{2})=x(\frac{1}{2^x-1}+\frac{1}{2})=f(x).$$

$\therefore f(x)$ 为偶函数.

例 7　已知 $f(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 内的奇函数.且当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)=3x^2+2x-1$，求 $f(x)$.

分析 这是求 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内的表达式的问题.已知 $f(x)$是奇函数,且 $x\geqslant 0$ 时 $f(x)=3x^2+2x-1$.故只需求另一半就可以了.

解 $\because$ $f(x)$ 是奇函数,则 $f(-x)=-f(x)$.

若 $x<0$,则$-x>0$, $\therefore$ $f(x)=-f(-x)=-(3x^2-2x-1)=-3x^2+2x+1$.

$\therefore f(x)=\begin{cases}3x^2+2x-1 & (x\geqslant 0),\\ -3x^2+2x+1 & (x<0).\end{cases}$

例 8 设 $f(x)$是以 T 为周期的周期函数,则 $F(x)=f(ax+b)(a\neq 0)$是以$\frac{T}{|a|}$为周期的周期函数.

分析 欲证$\frac{T}{|a|}$是 $F(x)$的周期,首先要验证 $F(x+\frac{T}{|a|})=F(x)$.其次要证明$\frac{T}{|a|}$是最小的周期.

证明 (1) 显然$\frac{T}{|a|}$是 $F(x)$的一个周期.

事实上,$\because$ $F\left(x+\frac{T}{|a|}\right)=f\left(a(x+\frac{T}{|a|})+b\right)$

$=f((ax+b)\pm T)=f(ax+b)=F(x)$.

$\therefore$ $F(x)$是一个周期函数,$\frac{T}{|a|}$是它的一个周期.

(2) 再证$\frac{T}{|a|}$是最小的正周期.

用反证法.若 T' 为 $F(x)$的一个周期, 且 $T'<\frac{T}{|a|}$,则 $F(x+T')=F(x)$. 于是 $f(a(x+T')+b)=f(ax+b)$, 即 $f((ax+b)+aT')=f(ax+b)$.

可见$|a|T'<T$ 为 $f(x)$的一个周期.这与 T 为 $f(x)$的周期矛盾.

$\therefore$ $\frac{T}{|a|}$是 $F(x)$的周期.

例 9 若函数 $y=f(x)(x\in\mathrm{R})$的图象关于 $x=a$ 和 $x=b(a\neq b)$成对称,则 $y=f(x)$必为周期函数.

分析 关键是根据对称的条件,寻找一个 T,使得 $f(x\pm T)=f(x)$.

证明 $\because$ $y=f(x)$的图象关于 $x=a$ 成对称,则 $f(x)=f(2a-x)$.

又 $y=f(x)$的图象关于 $x=b$ 成对称,则对于 $2a-x$,有 $f(2a-x)=f(2b-(2a-x))=f((2b-2a)+x)$,

$\therefore$ $f(x)=f((2b-2a)+x)$.

可见 $f(x)$为周期函数,$T=|2b-2a|$是它的一个周期.

注 特别地,若 $y=f(x)$为偶函数,其图象关于 $x=a(a\neq 0)$成对称,则 $y=f(x)$为周期函数,$T=|2a|$为其一个周期.

例 10 设 f 定义在 R 上,且满足

$$f(x+1)+f(x-1)=\sqrt{2}f(x),$$

试证 $f(x)$是周期函数.

分析 显然,对于这样含有"抽象"的函数记号的函数性质问题,只能从它所满足的关系,去推演存在一个常数 $T>0$,使得 $f(x+T)=f(x)$.于是这里的关键就成了想办法消去 $\sqrt{2}$.

解 $\because$ $f(x+1)+f(x-1)=\sqrt{2}f(x)$,用 $x-1$ 代 x 得

$$f(x)=\sqrt{2}f(x-1)-f(x-2).$$

于是，$f(x)=\sqrt{2}[\sqrt{2}f(x-2)-f(x-3)]-f(x-2)$

$=(\sqrt{2})^2f(x-2)-\sqrt{2}f(x-3)-f(x-2)$

$=f(x-2)-\sqrt{2}f(x-3)$ （用 $x-3$ 代原关系式中的 x）

$=f(x-2)-[f(x-2)+f(x-4)]$

$=-f(x-4).$

则 $f(x+8)=-f[(x+8)-4]=-f(x+4)=-[-f(x+4-4)]$

$=f(x).$

∴ $T=8$ 是 $f(x)$的一个周期.

注 从结论 $f(x)=-f(x-4)$推得 $f(x)$为周期函数知，一般地，若 $f(x)=-f(x-l)$，则 $f(x)$必为一个周期函数，且 $2l$ 是它的一个周期.

类似地，若任意的 $x\in\mathrm{R}$，恒有

$$f(x-1)+f(x+1)=f(x)$$

则 $f(x)$为周期函数，$T=6$ 是它的一个周期.

例 11 设函数 f 和 g 是分别以 T_1 和 T_2 为周期的周期函数，若 $T_1/T_2\in Q$. 则 $f(x)$与 $g(x)$的和差、积、商（求商时，除式不为零）仍为周期函数.

分析 显然，只须根据条件直接验证. 当然，若 T 为 $f(x)$的周期，则对任意的整数 n，nT 也仍是周期. 直接可以由周期函数的定义推得.

证明 设$\dfrac{T_1}{T_2}=\dfrac{m}{n}\in\mathrm{Q}$ $(m,n)=1$，则 $nT_1=mT_2$，设 $nT_1=mT_2=T$. 则(1) 对于 $f(x)\pm g(x)$：

$$f(x+T)\pm g(x+T)=f(x+nT_1)\pm g(x+mT_2)=f(x)\pm g(x).$$

∴ $f(x)\pm g(x)$为周期函数，$T=nT_1=mT_2$ 为它的一个周期.

(2) 对于 $f(x)\cdot g(x)$：

显然有 $f(x+T)\cdot g(x+T)=f(x+nT_1)\cdot g(x+mT_2)=f(x)\cdot g(x)$.

∴ $f(x)\cdot g(x)$为周期函数，$T=nT_1=mT_2$ 为它的一个周期.

(3) 对于 $f(x)/g(x)$ $(g(x)\neq 0)$：

有 $f(x+T)/g(x+T)=f(x+nT_1)/g(x+mT_2)=f(x)/g(x)$.

∴ $f(x)/g(x)$为周期函数，$T=nT_1=mT_2$ 为它的一个周期.

例 12 (1) 设 $f(x)$为$(-\infty,+\infty)$内的一个偶函数，若 $f(x)$在$(0,+\infty)$内递增(减)，则 $f(x)$在$(-\infty,0)$内递减(增).

(2) 设 $f(x)$为$(-\infty,+\infty)$内的一个奇函数，若 $f(x)$在$(0,+\infty)$内递增(减)，则 $f(x)$在$(-\infty,0)$内递增(减).

分析 只须按定义直接验证.

证明 (1) ∵$f(x)$在$(0,+\infty)$递增，则对任意 x_1、$x_2\in(-\infty,0)$，设 $x_1<x_2$，则有$-x_1$、$-x_2\in(0,+\infty)$，且$-x_1>-x_2$.

于是，$f(-x_1)>f(-x_2)$，∵$f(x)$为偶函数，则 $f(x_1)>f(x_2)$，∴ $f(x)$在$(-\infty,0)$内递减.

其余情形同理可证.

例 13 研究函数 $y=f(x)=3x^2+4|x|-5$ 的单调性.

分析 对含有绝对值的问题一般应先去绝对值，然后进行研究. 当然也可应用绝对值的性