丛书主编 / 杨林仙

重难点专项训练

NLIC2970547412

经典例题·针对训练·答案全解

本册主编 / 武秀琴

全国名校一线特、高级教师联合编著

高中数学

高二(上)

山西出版集团·山西教育出版社

重难点专项训练

★★★★★

宁波大学园区图书馆
藏书
NLIC

丛书主编/[illegible]

NLIC2970547412

《重难点专项训练编委会》编著

高中数学

（高二上）

山西出版集团　山西教育出版社

图书在版编目（C I P）数据

重难点专项训练. 高二数学. 上册/武秀琴编著. —太原：山西教育出版社，2008. 6

ISBN 978－7－5440－3563－7

Ⅰ. 重… Ⅱ. 武… Ⅲ. 数学课－高中－习题 Ⅳ. G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2008）第 039106 号

重难点专项训练 · 高二数学上册

责任编辑 孙 铁
助理编辑 解 红
复　　审 李 飞
终　　审 刘立平
装帧设计 刘志斌
印装监制 贾永胜

出版发行 山西出版集团 · 山西教育出版社
（太原市水西门街馒头巷 7 号 电话：4035711 邮编：030002）
印　　装 山西新华印业有限公司人民印刷分公司
开　　本 850×1168 1/32
印　　张 17. 25
字　　数 709 千字
版　　次 2008 年 6 月第 1 版 2008 年 6 月山西第 1 次印刷
印　　数 1—5000 册
书　　号 ISBN 978－7－5440－3563－7
定　　价 23. 00 元

如发现印装质量问题，影响阅读，请与印刷厂联系调换。电话：0358－7641044

547

目　录

第一章　不等式

第二章　直线、圆及圆锥曲线方程

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

第一章 不 等 式

第一节 不等式的性质

学 习 目 标

1. 正确理解不等式的性质,并能正确运用不等式性质证明简单的不等式.
2. 掌握比较实数大小的方法(主要是作差比较法和作商比较法),并能准确应用.

细 解 知 识 点

知识点1 不等式的有关概念

(1)用不等号(>, <, ≥, ≤, ≠ 等)表示不等关系的式子,称为不等式,用“>”“<”连接的式子称为严格不等式;用“≥”“≤”或者“≠”连接的式子称为非严格不等式.

(2)不论用什么实数代替不等式中的字母,不等式都能成立,则称这个不等式为绝对不等式;只能用某些范围内的实数代替式子中的字母,不等式才能成立,则称这个不等式为相对不等式;不论用什么样的实数代替不等式中的字母,不等式都不能成立,则称这个不等式为矛盾不等式.

(3)对于两个不等式,如果两个不等式的左边都大于(或都小于)右边,则称这两个不等式为同向不等式,如 $a>b$ 与 $c>d$ 为同向不等式;如果一个不等式的左边大于右边,而另一个不等式的左边小于右边,则称这两个不等式为异向不等式,如 $a>b$ 与 $c<d$ 是异向不等式.

知识点 2　实数大小的比较

对于两个确定的实数 a、b，$a>b$，$a=b$ 和 $a<b$ 三者必居其一，且只居其一.

实数比较大小的依据：

(1)设 a、b 是两个确定的实数，则

$a>b \Leftrightarrow a-b>0$；

$a=b \Leftrightarrow a-b=0$；

$a<b \Leftrightarrow a-b<0$.

因此，比较两个实数的大小，常用作差比较法.其解题步骤是：①作差：将比较的两个数相减；②变形：常采用配方、因式分解等恒等变形手段，变形的目的不是化简，而是为了判断符号；③判断符号：即确定作差的结果与 0 的大小关系；④做出结论.

(2)设 a、b 是两个确定的正实数，则

$a>b \Leftrightarrow \dfrac{a}{b}>1$；

$a=b \Leftrightarrow \dfrac{a}{b}=1$；

$a<b \Leftrightarrow \dfrac{a}{b}<1$.

因此，比较两个正数的大小，常用作商比较法.其解题步骤是：①作商：将比较的两个数相除；②变形：变形的主要目的是比较商与 1 的大小关系；③结论：即确定商与 1 的大小关系，从而做出结论.

知识点 3　不等式的性质

定理 1　对称性：$a>b \Leftrightarrow b<a$.

定理 2　传递性：若 $\left.\begin{matrix} a>b \\ b>c \end{matrix}\right\} \Rightarrow a>c$.

定理 3　可加性：$a>b \Leftrightarrow a+c>b+c$.

推论 1　移项法则：$a>b+c \Leftrightarrow a-b>c$.

推论 2　同向不等式相加：$\left.\begin{matrix} a>b \\ c>d \end{matrix}\right\} \Rightarrow a+c>b+d$.

注：此性质可推广到 n 个同向不等式相加.

推论 3　异向不等式相减：$\left.\begin{matrix} a>b \\ c<d \end{matrix}\right\} \Rightarrow a-c>b-d$.

定理 4　可乘性：$\left.\begin{matrix} a>b \\ c>0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow ac>bc$，$\left.\begin{matrix} a>b \\ c<0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow ac<bc$.

推论 1　$\left.\begin{matrix} a>b>0 \\ c>d>0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow ac>bd$.

注：此性质的条件可以放宽到 d(或 b)$\in \mathbf{R}$，其他三个数均为正数.

推论 2　$a>b>0 \Rightarrow a^n>b^n$($n\in \mathbf{N}$，且 $n>1$).

注：当 n 为奇数时，$a>b \Leftrightarrow a^n>b^n$；当 n 为偶数时，只有 a、$b\in \mathbf{R}^+$ 时，才有 $a>b$

$\Leftrightarrow a^n > b^n$.

推论 3 当 $ab>0$ 时，$a>b\Leftrightarrow\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$；当 $ab<0$ 时，$a>b\Leftrightarrow\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$.

定理 5 $a>b>0\Rightarrow\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$（$n\in\mathbf{N}$，且 $n>1$）.

注：当 n 为奇数时，$a>b\Leftrightarrow\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$；当 n 为偶数时，只有当 a、$b\in\mathbf{R}^+$ 时，$a>b\Leftrightarrow\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$.

由定理 4 的推论 2 和定理 5 结合起来，可以把这一性质推广到正有理数指数幂的情形，即 $a>b>0\Rightarrow a^s>b^s$（$s\in\mathbf{Q}^+$）.

高考诠释

不等式性质的内容在高考中经常出现，并往往与函数的单调性、判断不等关系是否成立、比较大小以及确定条件与结论的充要条件等内容综合起来进行考查，这些内容常出现在选择题或填空题之中，有时也渗透到解答题中.

比较法是重要的数学方法之一.

典例精析

例 1 (1)比较 $\left(1+\frac{\sqrt{2}}{a}\right)^3$ 与 $2-\left(1-\frac{\sqrt{2}}{a}\right)^3$ 的大小.

(2)已知 a、$b\in\mathbf{R}^+$，试比较 $\frac{a}{\sqrt{b}}+\frac{b}{\sqrt{a}}$ 与 $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ 的大小.

(3)比较 $a^2+b^2+c^2$ 与 $ab+bc+ca$ 的大小.

解 (1) $\because$ $\left(1+\frac{\sqrt{2}}{a}\right)^3-\left[2-\left(1-\frac{\sqrt{2}}{a}\right)^3\right]$

$$=\left(1+\frac{\sqrt{2}}{a}\right)^3+\left(1-\frac{\sqrt{2}}{a}\right)^3-2$$

$$=\left[\left(1+\frac{\sqrt{2}}{a}\right)+\left(1-\frac{\sqrt{2}}{a}\right)\right]\cdot\left[\left(1+\frac{\sqrt{2}}{a}\right)^2-\left(1+\frac{\sqrt{2}}{a}\right)\left(1-\frac{\sqrt{2}}{a}\right)+\left(1-\frac{\sqrt{2}}{a}\right)^2\right]-2$$

$$=2\left(2+\frac{4}{a^2}-1+\frac{2}{a^2}\right)-2$$

$$=\frac{12}{a^2}>0,$$

$\therefore$ $\left(1+\frac{\sqrt{2}}{a}\right)^3>2-\left(1-\frac{\sqrt{2}}{a}\right)^3$.

(2)解法一 $\left(\frac{a}{\sqrt{b}}+\frac{b}{\sqrt{a}}\right)-(\sqrt{a}+\sqrt{b})$

$$=\left(\frac{a}{\sqrt{b}}-\sqrt{b}\right)+\left(\frac{b}{\sqrt{a}}-\sqrt{a}\right)$$

$$=\frac{a-b}{\sqrt{b}}+\frac{b-a}{\sqrt{a}}$$

$$=\frac{(a-b)(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{\sqrt{ab}}$$

$$=\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{\sqrt{ab}}.$$

$\because\quad a、b\in\mathbf{R}^+,$

$\therefore\quad \sqrt{a}+\sqrt{b}>0,\sqrt{ab}>0,(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\geqslant 0,$

$\therefore\quad \dfrac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{\sqrt{ab}}\geqslant 0$，当且仅当 $a=b$ 时取“$=$”号.

$\therefore\quad \dfrac{a}{\sqrt{b}}+\dfrac{b}{\sqrt{a}}\geqslant\sqrt{a}+\sqrt{b}$，当且仅当 $a=b$ 时取等号.

✔ **解法二** $\left(\dfrac{a}{\sqrt{b}}+\dfrac{b}{\sqrt{a}}\right)^2=\dfrac{a^2}{b}+\dfrac{b^2}{a}+2\sqrt{ab}$，

$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2=a+b+2\sqrt{ab}.$

$\therefore\quad \left(\dfrac{a}{\sqrt{b}}+\dfrac{b}{\sqrt{a}}\right)^2-(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$

$$=\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{a}+2\sqrt{ab}-a-b-2\sqrt{ab}$$

$$=\left(\frac{a^2}{b}-a\right)+\left(\frac{b^2}{a}-b\right)$$

$$=\frac{(a-b)a}{b}+\frac{b(b-a)}{a}$$

$$=\frac{(a+b)(a-b)^2}{ab}.$$

$\because\quad a>0,b>0,$

$\therefore\quad \dfrac{(a+b)(a-b)^2}{ab}\geqslant 0,$

$\therefore\quad \left(\dfrac{a}{\sqrt{b}}+\dfrac{b}{\sqrt{a}}\right)^2\geqslant(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2,$

$\therefore\quad \dfrac{a}{\sqrt{b}}+\dfrac{b}{\sqrt{a}}\geqslant\sqrt{a}+\sqrt{b}$，当且仅当 $a=b$ 时取等号.

✔ **(3)解法一** $(a^2+b^2+c^2)-(ab+bc+ca)$

$$=\frac{1}{2}[(a^2-2ab+b^2)+(b^2-2bc+c^2)+(c^2-2ca+a^2)]$$

$=\dfrac{1}{2}[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]\geqslant 0$，当且仅当 $a=b=c$ 时取等号.

$\therefore$ ①当 $a=b=c$ 时，$a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca.$

②当 $a、b、c$ 不同时相等时，有 $a^2+b^2+c^2>ab+bc+ca.$

✔ **解法二** $\because\quad a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$

$= a^2-(b+c)a+b^2+c^2-bc$

$=\left(a-\dfrac{b+c}{2}\right)^2+b^2+c^2-bc-\dfrac{(b+c)^2}{4}$

$=\left(a-\dfrac{b+c}{2}\right)^2+\dfrac{3(b^2+c^2-2bc)}{4}$

$=\left(a-\dfrac{b+c}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}(b-c)^2\geqslant 0$,

$\therefore\quad a^2+b^2+c^2\geqslant ab+bc+ca$，当且仅当 $a=b=c$ 时取等号.

解法三 $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac=a^2-(b+c)\cdot a+b^2+c^2-bc$.

把上式看作关于 a 的一元二次函数，则

$\Delta=(b+c)^2-4(b^2+c^2-bc)$

$\quad=-3(b^2+c^2-2bc)$

$\quad=-3(b-c)^2\leqslant 0$,

$\therefore\quad a^2-(b+c)a+b^2+c^2-bc\geqslant 0$ 恒成立，即 $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\geqslant 0$ 成立. 故有 $a^2+b^2+c^2\geqslant ab+bc+ca$，当且仅当 $a=b=c$ 时取等号.

评析 (1)比较两个数的大小，常用作差比较法. 其解题步骤可分为三步一结论，即一是作差；二是变形；三是判断符号；四是做结论. 其中变形是关键，变形的主要目的不是化简，而是为了判断符号，主要途径有化简[如第(1)小题]、因式分解[如第(2)小题]或者配方[如第(3)小题]等.

(2)本例第(2)小题解法二是利用当 a、$b\in\mathbf{R}^+$ 时，$a>b\Leftrightarrow a^2>b^2$ 解题. 如果直接比较两个数或根式(都大于0)的大小不容易时，可比较这两个数或根式的平方，平方的大小确定了，原来的两个数或式子的大小也就确定了.

(3)本例第(3)小题三种解法从不同的角度去确定差式的符号. 解法一采用配方法，利用正数的和为正数确定符号；解法二以 a 为"主元"配方解决问题；解法三则是与一元二次函数(以 a 为主元)相结合，利用判别式求解.

例2 设 $x\in\mathbf{R}$，比较 $8x^4+1$ 与 $8x^3+x$ 的大小.

解 记 $M=(8x^4+1)-(8x^3+x)$

$\quad=(8x^4-8x^3)+(1-x)$

$\quad=(x-1)(2x-1)(4x^2+2x+1)$.

$\because\quad 4x^2+2x+1=3x^2+(x+1)^2>0$,

$\therefore\quad$ 当 $x>1$，或 $x<\dfrac{1}{2}$ 时，$M>0$，即 $8x^4+1>8x^3+x$；

当 $x=1$，或 $x=\dfrac{1}{2}$ 时，$M=0$，即 $8x^4+1=8x^3+x$；

当 $\dfrac{1}{2}<x<1$ 时，$M<0$，即 $8x^4+1<8x^3+x$.

评析 (1)判定两个实数差的符号，对于差式的变形一定要到位，将差式进行因式分解或分成若干个非负数的和，以能够确定符号为准.

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

(2)当差式的符号结论不确定时，要进行分类讨论.

例3 已知 $-\frac{1}{2}<a<0, A=1+a^2, B=1-a^2, C=\frac{1}{1+a}, D=\frac{1}{1-a}$，试将 A、B、C、D 按大小顺序排列.

解 已知 $-\frac{1}{2}<a<0$，取 $a=-\frac{1}{3}$，则 $A=\frac{10}{9}, B=\frac{8}{9}, C=\frac{3}{2}, D=\frac{3}{4}$，由此猜测 $D<B<A<C$. 只需证明 $C-A>0, A-B>0, B-D>0$ 即可.

$\because\quad B-D=(1-a^2)-\frac{1}{1-a}=\frac{a^3-a^2-a}{1-a}=\frac{a\left[\left(a-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}\right]}{1-a}$，

又$\because\quad -\frac{1}{2}<a<0$，

$\therefore\quad 1-a>0$.

又$\because\quad -1<a-\frac{1}{2}<-\frac{1}{2}$，

$\therefore\quad \frac{1}{4}<\left(a-\frac{1}{2}\right)^2<1$，

$\therefore\quad \left(a-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}<0$，

$\therefore\quad \frac{a\left[\left(a-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}\right]}{1-a}>0$，

$\therefore\quad B>D$.

$\because\quad A-B=1+a^2-(1-a^2)=2a^2>0$，

$\therefore\quad A>B$.

$\because\quad C-A=\frac{1}{1+a}-(1+a^2)=\frac{-a\cdot(a^2+a+1)}{1+a}$

$=\frac{-a\left[\left(a+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]}{1+a}$，

$\because\quad 1+a>0, -a>0, \left(a+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$，

$\therefore\quad \frac{-a\left[\left(a+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]}{1+a}>0$，

$\therefore\quad C>A$.

综上可得，A、B、C、D 四个数的大小顺序是 $C>A>B>D$.

评析 若干个数比较大小，先取一个符合条件的特殊值确定它们之间的相互关系，然后进行证明是一种常见的解题思路.

例4 设二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c, p>0, q>0$，且 $p+q=1$，比较 $f(px+$

$qy)$与 $pf(x)+qf(y)$的大小.

☑ **解** $f(px+qy)-[pf(x)+qf(y)]$

$$=a(px+qy)^2+b(px+qy)+c-[p(ax^2+bx+c)+q(ay^2+by+c)],$$

$\because$ $c=pc+qc$,

$\therefore$ 原式 $=a(px+qy)^2-a(px^2+qy^2)$

$$=a[p(p-1)x^2+q(q-1)y^2+2pqxy]=a(-pqx^2-pqy^2+2pqxy)$$

$$=-apq(x-y)^2.$$

$\because$ $p>0,q>0,(x-y)^2\geqslant 0$,故 $pq(x-y)^2\geqslant 0$,当且仅当 $x=y$ 时等号成立,

$\therefore$ $a>0$ 时,$f(px+qy)\leqslant pf(x)+qf(y)$;

$a<0$ 时,$f(px+qy)\geqslant pf(x)+qf(y)$.

💡 **评析** (1)判定两个实数差的大小时,要注意观察差式的特点,必要时应对差式进行合理的拆项、并项、配凑等变形.

(2)在本例中,令 $p=q=\dfrac{1}{2}$ 可得:$a>0$ 时,$f\left(\dfrac{x+y}{2}\right)\leqslant\dfrac{f(x)+f(y)}{2}$;$a<0$ 时,$f\left(\dfrac{x+y}{2}\right)\geqslant\dfrac{f(x)+f(y)}{2}$.该式反映了二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c$ 的图象当 $a>0$ 时的下凸性和当 $a<0$ 时的上凸性.

例5 (1)设 $a>0,b>0$,且 $a\neq b$,比较 a^ab^b 与 a^bb^a 的大小.

(2)设 $0<x<1$,比较 $|\log_a(1-x)|$ 与 $|\log_a(1+x)|$ 的大小.

☑ **解** (1)$\dfrac{a^ab^b}{a^bb^a}=a^{a-b}\cdot b^{b-a}=\left(\dfrac{a}{b}\right)^{a-b}$.

当 $a>b>0$ 时,$\dfrac{a}{b}>1,a-b>0$,

$\therefore$ $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{a-b}>1$, $\therefore$ $a^ab^b>a^bb^a$;

当 $b>a>0$ 时,$0<\dfrac{a}{b}<1,a-b<0$,

$\therefore$ $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{a-b}>1$, $\therefore$ $a^ab^b>a^bb^a$.

综上所述有 $a^ab^b>a^bb^a$.

💡 **评析** (1)当两个数都是正数时,可用"作商比较法"比较两个实数的大小.其解题步骤为:①作商;②变形;③判断商式与1的大小关系;④做结论.

(2)在比较分式与分式、指数式与指数式、对数式与对数式的大小时,通常用"作商比较法"比较大小.

(3)运用"作商比较法"比较两个实数的大小,判断商式与1的大小关系时,常利用指数函数或对数函数的性质.

☑ (2)**解法一** 由对数换底公式可得

$|\log_a(1-x)|-|\log_a(1+x)|$

$$=\frac{1}{|\lg a|}[\,|\lg(1-x)|-|\lg(1+x)|\,]$$

$$=\frac{1}{|\lg a|}[-\lg(1-x)-\lg(1+x)]$$

$$=\frac{-\lg(1-x^2)}{|\lg a|}.$$

$\because\ 1-x^2\in(0,1),\quad \therefore\ \lg(1-x^2)<0.$

$\therefore\ \dfrac{-\lg(1-x^2)}{|\lg a|}>0.$

$\therefore\ |\log_a(1-x)|>|\log_a(1+x)|.$

✔ 解法二 $\left|\dfrac{\log_a(1-x)}{\log_a(1+x)}\right|$

$=|\log_{(1+x)}(1-x)|$

$=-\log_{(1+x)}(1-x)=\log_{(1+x)}\dfrac{1}{1-x}.$

$\because\ (1+x)\cdot(1-x)=1-x^2<1$,且 $1-x>0$,

$\therefore\ 1+x<\dfrac{1}{1-x}.$

又$\because\ 1+x>1$,

$\therefore\ \log_{(1+x)}\dfrac{1}{1-x}>\log_{(1+x)}(1+x)=1,$

$\therefore\ \left|\dfrac{\log_a(1-x)}{\log_a(1+x)}\right|>1,$

$\therefore\ |\log_a(1-x)|>|\log_a(1+x)|.$

评析 利用对数的换底公式,避免了对字母 a 的讨论.本题亦可以不用换底公式,直接按 a 的取值分 $a>1$ 和 $0<a<1$ 两种情况讨论.

想一想,若本小题中,x 的取值范围是 $-1<x<1$,应如何求解?

例6 设 a、$b\in\mathbf{R}^+$,$n\in\mathbf{N}^*$,求证:$\dfrac{a^n+b^n}{2}\geqslant\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^n$.

✔ 证明 原不等式等价于 $\dfrac{\frac{a^n+b^n}{2}}{\left(\frac{a+b}{2}\right)^n}\geqslant 1.$

构造函数 $f(n)=\dfrac{\frac{a^n+b^n}{2}}{\left(\frac{a+b}{2}\right)^n}$,

则 $\dfrac{f(n+1)}{f(n)}=\dfrac{2(a^{n+1}+b^{n+1})}{(a^n+b^n)(a+b)}=1+\dfrac{(a^n-b^n)(a-b)}{(a^n+b^n)(a+b)}$

$\because\ a-b$ 与 a^n-b^n 同号或同为 0, $\therefore\ \dfrac{(a^n-b^n)(a-b)}{(a^n+b^n)(a+b)}\geqslant 0,$

$\therefore \quad \dfrac{f(n+1)}{f(n)} \geqslant 1$,且 $f(1)=1, f(n)>0$,

$\therefore \quad f(n) \geqslant f(n-1) \geqslant \cdots \geqslant f(1)=1$.

$\therefore$ 不等式得证.

评析 证明与正整数 n 有关的递推不等式除了用数学归纳法外,可作商(或作差)构造以正整数 n 为自变量的函数 $f(n)$,然后作商(或作差)证明 $f(n)$ 的单调性来解决问题.

例 7 比较 $1+\log_x 3$ 与 $2\log_x 2\ (x>0, x\neq 1)$ 的大小.

分析 由于要比较的两个数都是对数,联想对数的性质以及对数函数的单调性来解答.

解 $(1+\log_x 3)-2\log_x 2=\log_x \dfrac{3x}{4}$.

当 $\begin{cases}0<x<1\\0<\dfrac{3x}{4}<1\end{cases} \Rightarrow 0<x<1$,或当 $\begin{cases}x>1\\\dfrac{3x}{4}>1\end{cases} \Rightarrow x>\dfrac{4}{3}$ 时,

有 $\log_x \dfrac{3x}{4}>0$,

即 $1+\log_x 3>2\log_x 2$;

当 $\begin{cases}0<x<1\\\dfrac{3}{4}x>1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x>1\\0<\dfrac{3}{4}x<1\end{cases} \Rightarrow 1<x<\dfrac{4}{3}$ 时,有 $\log_x \dfrac{3x}{4}<0$,即 $1+\log_x 3<2\log_x 2$.

当 $\dfrac{3}{4}x=1 \Rightarrow x=\dfrac{4}{3}$ 时,有 $\log_x \dfrac{3}{4}x=0$,即 $1+\log_x 3=2\log_x 2$.

综上所述,当 $0<x<1$,或 $x>\dfrac{4}{3}$ 时,$1+\log_x 3>2\log_x 2$;

当 $1<x<\dfrac{4}{3}$ 时,$1+\log_x 3<2\log_x 2$;当 $x=\dfrac{4}{3}$ 时,$1+\log_x 3=2\log_x 2$.

评析 (1)分类讨论问题已成为高考考查学生的知识与能力的热点问题,这是因为:

①分类讨论问题一般覆盖的知识点较多,有利于知识面的考查;

②解答分类讨论问题需要有一定的分析能力和一定的分类思想与分类技巧,有利于对学生能力的考查;

③分类思想与生产实践和高等数学都紧密相关.

(2)解答分类讨论问题的实质:

将整体问题化为若干个子问题来解决,从而子问题增加了题设的条件,可将问题解答进行到底,这正是我们要分类讨论的根本原因.

(3)分类讨论时要注意的几点:

①根据问题实际,做到分类不重复、不遗漏;

②不断地总结经验和教训，克服分类讨论中的主观性与盲目性；

③要注意简化或避免分类讨论，优化解题过程.

例8 对于实数 a、b、c，判断下列命题的真假：

(1)若 $a>b$，则 $ac<bc$.

(2)若 $a>b$，则 $ac^2>bc^2$.

(3)若 $ac^2>bc^2$，则 $a>b$.

(4)若 $a<b<0$，则 $a^2>ab>b^2$.

(5)若 $a<b<0$，则$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$.

(6)若 $a<b<0$，则$\frac{b}{a}>\frac{a}{b}$.

(7)若 $a<b<0$，则$|a|>|b|$.

(8)若 $a<b<0$，则$\frac{b}{a}<1$.

(9)若 $c>a>b>0$，则$\frac{a}{c-a}>\frac{b}{c-b}$.

(10)若 $a>b$，$\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$，则 $a>0$，$b<0$.

解 (1)因 c 的正负或是否为 0 未知，无法判断 ac 与 bc 的大小，所以是假命题.

(2)因 $c^2\geqslant 0$，所以 $c=0$ 时，有 $ac^2=bc^2$，故为假命题.

(3)由 $ac^2>bc^2$，知 $c\neq 0$，$c^2>0$，所以为真命题.

(4)由$\left.\begin{array}{l}a<b\\a<0\end{array}\right\}\Rightarrow a^2>ab$，又$\left.\begin{array}{l}a<b\\b<0\end{array}\right\}\Rightarrow ab>b^2$，所以为真命题.

(5)例如 $-3<-2<0$，但$-\frac{1}{3}>-\frac{1}{2}$，所以为假命题，

事实上，由$\left.\begin{array}{l}a<b<0\\\frac{1}{ab}>0\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$.

(6)因 $a<b<0\Rightarrow\left.\begin{array}{l}-a>-b>0\\\frac{1}{a}>\frac{1}{b}\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}-a>-b>0\\-\frac{1}{b}>-\frac{1}{a}>0\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{a}{b}>\frac{b}{a}$，

所以为假命题.

(7)两负实数，绝对值大的反而小，所以为真命题.

(8)同(7)，$|a|>|b|>0\Rightarrow\frac{|b|}{|a|}<1\Rightarrow\frac{b}{a}<1$，所以为真命题.

(9)因 $-a<-b\Rightarrow 0<c-a<c-b\Rightarrow\frac{1}{c-a}>\frac{1}{c-b}>0$，

又$\left.\begin{array}{l}\frac{1}{c-a}>\frac{1}{c-b}>0\\a>b>0\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{a}{c-a}>\frac{b}{c-b}$，所以为真命题.

(10) $\left.\begin{cases}\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}>0\Rightarrow\dfrac{b-a}{ab}>0\\ a-b>0\end{cases}\right\}\Rightarrow ab<0$, 又 $a>b$,

$\therefore\ \ a>0, b<0,\ \ \therefore$ 为真命题.

事实上, $a>0, b<0$ 时, $a>b$, $\dfrac{1}{a}>\dfrac{1}{b}$ 显然成立. 而 $a>b$, $\dfrac{1}{a}>\dfrac{1}{b}$ 同时成立的充要条件为 $a>0, b<0$.

评析 通过这一类判断题的练习可以熟悉不等式的性质,更好地掌握性质定理的条件和结论. 本例中第(1)~(4)是考查对性质4的理解,这是性质定理中易错的,在不等式两边同乘(除)一个数(式)时,必须能确定是正、是负,还应特别注意是否为0;第(5),(6),(9),(10)题涉及两个已知大小的数的倒数间关系,由定理4可推导出结论. 另外,对于判断题,如果是真命题,应说明理由或进行证明. 在推理过程中应紧扣定义性质,并要注意特殊情况. 如果是假命题只需举一反例,但若能经过推导修改成真命题,对深刻理解、牢固掌握知识会更有好处.

例9 适当增加条件,使下列各命题成立:

(1)若 $a>b$,则 $ac^2>bc^2$.

(2)若 $a>b$,则 $-ac<-bc$.

(3)若 $a>b$,则 $\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{b}$.

(4)若 $a>b, c>d$,则 $ac>bd$.

(5)若 $a<b$,则 $a^2<b^2$.

解 (1)增加条件 $c\neq0$,或 $c>0$,或 $c<0$ 均可.

(2)由 $a>b$ 与 $-ac<-bc$ 对照,可知 $c>0$,故增加条件 $c>0$ 即可.

(3) $a>b\Rightarrow a-b>0$.

$\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{b}\Rightarrow\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}=\dfrac{b-a}{ab}<0$.

$\because\ \ a-b>0,\ \ \therefore\ \ b-a<0,\ \ \therefore\ \ ab>0$.

故增加条件 $ab>0$,或 $a>0$ 且 $b>0$,或 $a<0$ 且 $b<0$ 即可.

(4)增加条件 $b\geqslant0$ 且 $d\geqslant0$,或者 $b\geqslant0$ 且 $c>0$,或者 $a>0$ 且 $d\geqslant0$ 均可.

(5)增加 $a>0$ 即可.

例10 已知三个不等式:① $ab>0$,② $\dfrac{c}{a}>\dfrac{d}{b}$,③ $bc>ad$. 以其中两个作条件,余下一个作结论,则可组成________个正确命题.

分析 三个命题中任选两个作条件可以写出三个命题,然后利用不等式的性质逐一判断.

解 对命题②作等价变形: $\dfrac{c}{a}>\dfrac{d}{b}\Leftrightarrow\dfrac{bc-ad}{ab}>0$,于是由 $ab>0$, $bc>ad$ 得②,命题正确. 即①③$\Rightarrow$②.

此为试读，需要完整PDF请访问： www.ertongbook.com