ADVANCED ENGINEERING MATHEMATICS

Erwin Kreyszig

Fourth Edition

高等工程數學

黃文儀譯

4

高等工程數學

第四版（1979）

第四册

原著者
Erwin Kreyszig
PROFESSOR OF MATHEMATICS
OHIO STATE UNIVERSITY

譯者
黃文儀
私立大同工學院教授

東華書局印行

中華民國六十九年六月初版

大學用書 高等工程數學（全四冊）

第四冊 定價 新台幣七十元整

（外埠酌加運費滙費）

譯 者 黃 文 儀

發行人 卓 鑫 淼

出版者 臺灣東華書局股份有限公司

臺北市博愛路一〇五號

電話：3819470 郵撥：6481

印刷者 合 興 印 刷 廠

行政院新聞局登記證 局版臺業字第零柒貳伍號

（69016）

原序

本書目的　　此書主旨，係對研習工程及物理之讀者，介紹近代數學中，有關實際問題之各種最重要課目。各項主題，依據其在應用方面遭遇之多寡情形，精心加以選擇。近年來，在工程教育專題討論會上，所發表各種有關現代數學之新觀念，均被考慮予以搜集。無論對已在數學訓練方面，早訂有擴展課程計劃之各院校，或正準備適應一般潮流，而加強其數學訓練計劃之學術機構，此書應均適合。

　　基本微積分，係研讀本書前之惟一先修課程。

　　本書所搜集之材料，係選自美國，加拿大，及歐洲各學校大學部及研究所內，爲研習工程，物理，或數學者所講授之主要課程。

本書第四版之改進要點

此一版本與第一，二及三版主要不同之處如下：

習題　　習題均已改變。並包含更多的應用問題。

模型化(Modeling)可藉於不同章節之應用而更加深印象。

線性常微分方程式　　於第二章中包含**微分運算子**(Differential Operators)新的一節。**相平面法**(Phase plane methods)，**穩定性**(Stability)以及著名的**范德伯方程式**(Van der Pol equation)則於新的一章(第三章)中加以探討。

微分方程式系統　　加上了不用矩陣之基本方法。採用矩陣的方法

則加以擴充而成爲新的一節。

拉普拉斯變換運算法　包含 褶積(Convolution)。整章重寫而更爲緊湊。在此新版中，兩個移位定理(Shifting theorems)包含於同一節，微分方程較早出現，並介紹褶積及其應用，部分分式法(Partial fractions)於稍後討論，並且不那麽強調。

偏微分方程式　本章包含新的一節討論拉氏變換運算法對偏微分方程的應用。

矩陣　本章部分加以重組與重寫，以符合近代線性代數之潮流。新的一版也包括較多的應用。

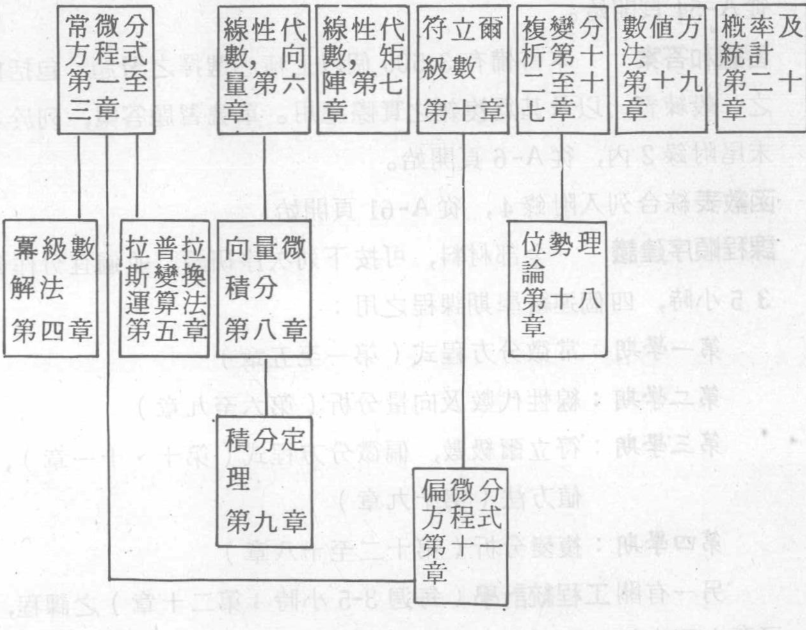
複變分析改成如下更有利之方式。關於複數有短的三節(前面版本爲長的一節)對本題作一簡單的介紹。基於相同的理由，保角寫像(Conformal mapping)的那一章，於開始時有較多的例題。有關數列(Sequence)與級數(Series)之一章則加以重寫，以便使在複變分析的班級上，僅需要本章最初兩節，因此可節省許多時間而不致於喪失關聯性。冪級數(Power series)，泰勒級數(Taylor seires)與勞倫級數(Laurent seires)出現於同一章，也就是說它們比前面版本彼此更靠近。

數値分析　本版包含關於線規(Splines)新的一節，它對於工學專家有日漸增加的重要性。

概率與統計　習題加以擴充而包含較多的應用。

參考資料於附錄 1 中者，補充了新資料。

本書內容及其安排　本書各重要部分之間，其主題材料之安排，可由下列圖解表示。



本書中對常微分方程式，線性代數和向量分析，以及複變分析，此三種也許是工程師們最感重要之部門，所提供之討論，極具分量。其他如符立爾級數；偏微分方程式，數值方法等各章之長度，亦使能包含足夠之材料，以便於一般的各類課程採作教本之用。

爲便利選用本書部分內容起見，各章均儘可能保持其獨立性。

所有各章均分爲若干較短之節數，每節均含有闡釋觀念、方法、結果、以及工程應用之例題及習題。

本書包含各種歷史性之註腳，原始參考文獻，以及400個以上之挿圖。

參考資料　若干用作參考及進一步研究之書籍，可於本書末尾從A-1頁開始查得。部分有關特殊函數之公式，則包含在附錄3內，

從A-54頁開始。

習題和答案　本書備有3,500個以上精心選擇之習題，包括簡單之一般練習，以及甚為複雜之實際應用。單號習題答案，列於本書末尾附錄2內，從A-6頁開始。

函數表綜合列入附錄4，從A-61頁開始。

課程順序建議　全部材料，可按下列次序研讀，並適宜分作每週3 5小時，四個連續學期課程之用：

第一學期：常微分方程式（第一至五章）

第二學期：線性代數及向量分析（第六至九章）

第三學期：符立爾級數，偏微分方程式（第十、十一章），數值方法（第十九章）

第四學期：複變分析（第十二至十八章）

另一有關**工程統計學**（每週3-5小時；第二十章）之課程，則可在上列之任一學期中，或以後開授。

單獨一學期課程　此外本書亦適宜於作一學期獨立課程，每週三小時之用，例如：

常微分方程式入門（第一，二章）

拉氏變換運算法（第五章）

向量代數及微積分（第六，八章）

矩陣及線性方程式系統（第九章）

符立爾級數及偏微分方程式（第十，十一章）

複變分析（第十二至第十七章）

數值分析（第十九章）

縮短課程　縮短課程時，可予省略之節數，均在每章前面，加以註明。

選擇主題之準則　　類似於本書之著作，究應包含那些主題？以及此等主題應如何安排和介紹？

爲尋得上述各基本問題之答案起見，我們可追溯工程數學發展之一段歷史，此項發展顯示出如下兩種有趣事實。

1. 數學在工程科學中日趨重要，且可預測此種情形，將一直繼續下去。此種趨勢的一個重要原因，係由於近代工程問題已變成如此複雜，使得我們不可能似以往之純靠物理直覺，或僅憑過去經驗以求得其解答。此種實驗方法，過去對若干問題之解答，相當成功。但當極高速度，極大力量，極高溫度，或其他不正常條件摻入時，則無法予以解決而致失敗。且當各種具有不尋常物理特性之近代新穎材料（如塑膠，合金等）出現後，情況更加嚴重。因此上述之實驗工作，達到費時，費力之驚人複雜程度。此時數學乃可予以協助，以籌劃實驗及其構造，計算出實驗數據，並減少其尋求解答之工作與費用。

2. 過去基於純理論性之原因而發展之數學方法，在工程數學中突然變成十分重要。例如矩陣，保角寫像之理論，以及具有週期性解答之微分方程式之理論等。

以上之發展事實，對工程數學教學方面之反應如何？由於所需求之數學不斷增加，我們應否在課程中，增加更多之主題數目，而致減少每一主題所佔有之時間？或應集中精力，選出若干具有實際重要性之少數重要事物，俾便適於教學訓練，並啓迪學生之數學思想，以發展其本身之創造能力？

六十或八十年以前，無人能預知保角寫影或矩陣，將在工程業務之數學部分，佔據重要之位置。在相似情形下，欲預測何類數學理論，在今後二十或三十年，將對工程應用方面增加其重要性，亦

屬極爲困難。惟無論將發生之事實如何，具有良好數學訓練基礎之學者，將可適合未來之各種需要，而能利用其所學，以熟習新穎數學方法。

因此工程數學教育最重要之目標，在使學生如何熟習運用數學之思考方法，並認識各項指導原理及觀念之幕後背景。此點較僅學習如何正式運用數學方法，更爲重要。學者應認識數學並非搜羅戲法或秘訣，而係建立在較少數基本觀念上的一門具有實際重要性和系統性科學，其中包含有極具效力之各種統一方法。學者尤應深切體會運用數學程序於工程問題之必要，而發覺理論和應用間之相互關係，有如樹木和果實間之彼此密切性一樣。

讀者將可看出應用數學來解答工程問題時，包含三個主要步驟:

1. 將已知物理資料翻譯成數學形式（模型化）（Modeling）如此我們可得出該物理情況之一種數學翻版模型。此模型可能即爲一微分方程式，一組聯立線性方程式，或其他之數學表示式。

2. 將此模型利用數學方法處理之，此即導致已知問題數學形式之解答。

3. 將此數學解答之結果，以物理條件解釋之。

所有以上三步驟似有相等之重要性，而本書在作各種介紹時，主要在輔助讀者，能充分發揮其完成三個步驟之技術。故有關應用問題之選擇，以具有一般性者爲優先。

在若干討論情形下，常不免依賴各種已知結果，其證明之手續或方法，超出類似本書水準之範圍。遇有此等情形時，書中均一一加以明顯之註解。因困難之隱瞞，或事物之過度簡化，對從事職業性工作之讀者均無裨益。

以上即爲作者用來選擇及介紹本書題材的一些指導原則。各種材料之選擇，均曾根據過去及目前之教學及研究經驗，在極爲審愼之

態度下，作成決定。有時寧可對勸使包含工程數學中之“每一重要事物”之誘惑性建議，拒絕加以考慮。

關於如何方能對各項主題，儘可能作簡單明瞭而準確之介紹方面，作者曾加以特別之努力，其中亦包括註解符號之選擇。每章中水準之深度，逐漸增加，並避免各種艱深理論之跳越及累積。

某一證明之結尾加註 ▮ 記號。此記號亦使用於某些定義以及一組例題之末尾，以便繼續進行本文之敍述。

銘謝 作者對其從前許多老師，同事，和同學，在編著本書時所提供之協助和建議，深致謝意。原稿之若干部分，係以油印形式，先分發給各班同學，再由他們細閱後，加註改進建議退還。與許多工程師及數學家口頭或書面之討論，對作者實有極大之幫助，其中本人願特別提到褒格曼（S. Bergman）(†)，坎培爾（S.L. Campell)，卡格（J.T. Cargo），張伯（P.L. Chambré），克郎漢（A. Cronheim），弟拉尼（J. Delany），德特曼（J.W. Dettman），赫爾索（R.G. Helsel），胡夫（W.N. Huff），克利普（E.C. Klipple），可姆科（V. Komkow），孔氏（H. Kuhn），蘭伯（G. Lamb)，曼氏（H.B. Mann），馬克思（I. Marx），孟羅（W.D. Munroe)，浦氏（H.W. Pu），瑞多（T. Rado）(†)，瑞契多夫（P.V. Reichelderfer），雪克（J.T. Scheick），史密斯（H.A. Smith)，史本賽（J.P. Spencer），托德（J. Todd），懷斯（H.J. Weiss)，及衞南斯基（A. Wilansky）等在美國之各位教授，多倫多（Toronto）之柯克斯特（H.S.M. Coxeter）教授，以及在歐洲之保羅（B. Baule）(†)，彭克（H. Behnke），費羅原（H. Florian)，格拉夫（H. Graf），何亨伯格（F. Hohenberg），克羅特（K. Klotter)，賓氏（M. Pinl），路特（F. Reutter），史密登（C. Schmieden)，恩格（H. Unger），華爾特（A. Walther）(†)，衞南德（H. Wie-

landt）教授等。在此作者僅能表示其誠摯之謝意。

最後，本人應向約翰－衛律和孫氏公司（John Wiley and Sons）對其編印此版本書時之有效合作和審愼精神，表示感謝。

許多讀者所提供之寶貴建議，均在編印此版時，予以採納。其他任何對改進本書之批評和意見，將受本人之衷心歡迎。

愛文－克雷斯聚格

（Erwin Kreyszig）

高等工程數學

第四冊目錄

第十六章　冪級數，泰勒級數，勞倫級數

第十七章　剩值積分法

第十八章　複變解析函數與位勢理論

第十九章　數值分析

第二十章　概率及統計學

第十六章

冪級數·泰勒級數·勞倫級數

(Power Series. Taylor Series. Laurent Series)

冪級數（16.1 節）爲複變分析中最重要的級數型式。理由是它們可代表解析函數（16.2 節，定理 5），而且反過來說，每一個解析函數亦均有其冪級數的表示法，稱爲**泰勒級數**（16.3 ～ 16.6 節）。這些複數的泰勒級數類似於實數微積分中的泰勒級數。事實上，若我們將後者中的實變數以複變數取代，則可以把實函數“**推廣**”或“**連續**”至複數領區。

本章最後部分，將致力於如何使解析函數以勞倫級數表示，此爲同時包含自變數的正負整數冪之級數。下章中將可看出，這些級數在求複變數及實變積分時，極有助益。

研讀本章前之預修課目：第十二，十四，十五章。

短期課程可予省略之節數：16.6，16.8 節。

習題答案：附錄 1。

16·1 冪級數

我們已在 15.2 節中討論過每項爲常數之各種級數。若一級數之各項爲變數，即變數 z 之函數，而當 z 賦予一固定值時，這些函數均

成爲定值，則前述之定義卽可應用。顯然如此一 z 函數之級數，其部分和，餘數及其和亦爲 z 之函數。通常此類級數，對某些 z 值，例如某區域中之所有 z 爲收斂，而對其他之 z 值則爲發散。

在複變分析中，最重要的具有變數項之級數，卽爲冪級數。一個含有 $z-a$ 各次乘冪的**冪級數**[1]爲形式如下：

$$\sum_{m=0}^{\infty} c_m(z-a)^m = c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \cdots \tag{1}$$

之無限級數，其中 z 爲一變數，$c_0, c_1, \cdots$ 均爲常數，稱爲**係數**。a 亦爲一常數，而稱爲此級數之**中心**。

若 $a=0$，可得一特殊情形，卽以 z 乘冪爲項之冪級數。

$$\sum_{m=0}^{\infty} c_m z^m = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots. \tag{2}$$

一冪級數之收斂性質，可以很簡單之方法歸納得出。玆舉三個典型例題，作爲硏討之開始。

例 1　於一圓盤內的收斂性・幾何級數

當 $|z|<1$ 時，乘幾何級數

$$\sum_{m=0}^{\infty} z^m = 1 + z + z^2 + \cdots$$

爲絕對收斂，而當 $|z| \geqq 1$ 時，則爲發散（參考 15.5 節定理 2 ）。

例 2　於整個有限平面中的收斂性

冪級數

註 1：必須注意，單用"乘冪級數"之名詞時，通常係指形式 (1) 之級數，包含特殊情形 (2), 但**不包括** z 之負乘冪級數，如 $c_1z^{-1}+c_2z^{-2}+\cdots$，或涉及 z 之分數乘冪之級數。

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots$$

對每一（有限）z 均為收斂，如由比率試驗法即知。事實上，對任何固定的 z 值，

$$\left|\frac{z^{n+1}/(n+1)!}{z^n/n!}\right| = \frac{|z|}{n+1} \to 0 \quad 當 \quad n \to \infty.$$

例 3　僅在中心的收斂性

冪級數

$$\sum_{n=0}^{\infty} n!\, z^n = 1 + z + 2z^2 + 6z^3 + \cdots$$

僅於中心 $z = 0$ 處為收斂，對任何 $z \neq 0$ 之數均為發散。事實上此可由比率測驗法得知，因

$$當\ n \to \infty\ 時，\left|\frac{(n+1)!z^{n+1}}{n!\, z^n}\right| = (n+1)|z| \to \infty（z\ 固定且 \neq 0）$$ ▌

當 $z = a$ 時，級數(1)收斂，因 $z - a = 0$ 而該級數即化簡成單一項 c_0．例 3 說明在某些情形下，此可能為該級數收斂之唯一 z 值。但若級數(1)在一 $z_0 \neq a$ 處為收斂，則對任何至中心之距離較 z_0 為近之每一 z 點，該級數均為收斂。今以如下定理說明此項事實。

定理 1　冪級數的收斂性

若冪級數(1)在 $z = z_0$ 處收斂，則對每一 $|z - a| < |z_0 - a|$ 之 z，亦即中心在 a，而通過 z_0 之圓周內各 z 點，該級數均為絕對收斂。

證明：因級數(1)在 z_0 處為收斂，由 15.2 節定理 3 可知

$$當\ n \to \infty\ 時，\quad c_n(z_0 - a)^n \to 0$$