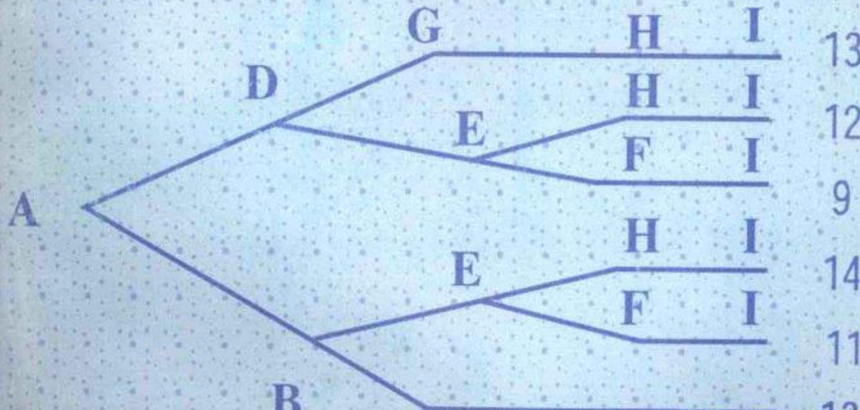
现代管理数学方法

主编：马湘玲 赵昇



陕西人民出版社

现 代 管 理 数 学 方 法

主　编　马湘玲　赵　昇
副主编　冯密罗　李文华
　　　　马　伟　张　华

陕 西 人 民 出 版 社

(陕)新登字 001 号

Xiandai Guanli Shuxüe Fangfa
现代管理数学方法
马湘玲　赵　昇　主　编
陕西人民出版社出版发行
(西安北大街 131 号)
岐山县印刷厂印刷
787×1092 毫米　32 开本　10.375 印张　220 千字
1997 年 10 月第 1 版　1997 年 10 月第 1 次印刷
印数:1－3000
ISBN 7－224－04546－2/F·643
定价:15.80 元

前　言

管理科学的形成约在40年代，其内容大致包括运筹学、系统工程、工业工程或管理工程等内容，其主要特征是借助于数学的手段，建立实际问题的数学模型，求出最合理的方案。

管理科学的形成有一个历史过程。究其渊源，人们想把管理事务做得有成效的愿望及办法很早就有了。在古代中国，就有许多精于管理的能人以及许多有价值的论著，在军事领域中表现得尤为突出。军事活动，是一种特殊的活动，目的性强，涉及部门多，如何组织管理得有效，达到军事目的，是至关重要的，因此就产生了旨在提高军事活动的成效的兵法。古时的兵法不仅为兵家所必读，而且对今天的管理者和经营者也有指导意义。在古代其他国家也出现了一些有价值的管理实践和思想。但是总的来看，古时人们对管理问题是停留在宏观的规律性的把握上，管理者个人的智慧和经验是提高管理效率的重要基础和条件。

18世纪欧洲发生了资产阶级工业革命，经过一个多世纪的自由发展，19世纪末、20世纪初西方出现了一些工业发达的资本主义国家。大工业、大企业的生产需要科学有效的管理。此期间出现了泰勒等一批管理问题的研究者，建立了科学管理的理论。此时的理论主要是关于工业的组织和管理的，主要思想是管理工作要以科学的规范为基础，使管理变得科学化、规范化，取代过去完全靠管理者自已的经验行事的管理模式。

二战期间，战争的需要刺激了许多研究工作者。战事的复

杂性以及资源的匮乏迫切要求提高战术效果，在英国和美国先后成立了由科学家组成的研究小组，研究在军事行动中如何有效地打击德军。由于研究所提出的方案确实带来了实际成效，因此战后这种研究活动继续得到了发展，研究内容也从军事问题扩展到工业、管理等问题。这种研究活动在开始称为 operations reseerch，名称沿用至今，中文译为运筹学。战时及战后由于美国的特殊地位，虽然工业生产在迅速膨胀，但仍然满足不了需要，为了更有效地提高生产效率，对工业生产组织及其管理的研究活动有了很大的发展，出现了运筹学、系统工程、管理（工业）工程等学科共同发展局面，此时的管理科学的内容变得很丰富了。此时研究管理问题的一个重要特征是数学手段的广泛应用，从过去的定性把握来决策变成了从不同的精确的方案中做决策，管理工作从此开始建立在科学有定量分析的基础之上了。

在最近的几十年内，电子技术、计算机、信息技术以及其他技术得到了迅猛的发展，自动化、信息化、全球一体化的趋势使工业生产变得更讲求效率以利于竞争，工业生产的组织和管理更依赖于科学手段。同时科学技术的发展也呈现出相互交叉和融合的趋势，管理科学的思想及方法也被应用到其他领域。以寻求最优方案为目的的数学规划的内容不断丰富起来，成为多学科、多领域共用的工具。数学规划的理论和方法不仅在管理领域，而且在经济、军事、科研设计和主要的工业技术领域，都得了广泛的应用。

本书的目的是向读者通俗地介绍数学规划的基本理论和方法。数学规划的内容很多，数学手段本身的严密性使一般读者感到读起来有困难。本书一般不做繁琐的论证，着重介绍处理问题的思想及方法，以便让一般不具有很深数学基础的读者能

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.c

对数学规划的基本理论和方法得到一个清楚的了解和掌握。

在撰写本书的过程中，参考了有关的教材及论著。在此向这些作者致谢。限于作者的学识，定有错误和不妥之处，敬请指正。

作者

1996 年 10 月于　郑州

目　　录

第一章　必要的数学基础

§1.1　行列式

§1.1.1　行列式的定义

在给出行列式的定义之前，需要了解一下反序的概念。在一个由若干个自然数组成的排列中，如果各个数是按从小到大的顺序排列，则称该排列的反序数为 0；如果数字不全是按从小到大排列，则称前面的数字大于后面的数字的情况为一个反序，排列中所存在的全部反序个数，称为该排列的反序数。

比如，123 的反序数为 0，213 的反序数为 1(2，1 构成一个反序)，231 的反序数为 2(2、1 构成一个反序，3、1 构成一个反序)，321 的反序数为 3(3、2 为一反序，3、1 为一反序，2、1 为一反序)。

下面给出行列式的定义。

由 n^2 元素排成 n 行、n 列(a_{ij} 为第 i 行第 j 列的元素)的形式称为 n 阶行列式，其值为：

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{s_1\cdots s_n} (-1)^{\tau(s_1\cdots s_n)} a_{1s_1} a_{2s_2} \cdots a_{ns_n}$$

其中 $\tau(s_1\cdots s_n)$ 表示 $s_1\cdots s_n$ 的反序数，$\sum\limits_{s_1\cdots s_n}$ 表示对所有 $s_1\cdots s_n$ 的排列求和。

由以上定义可知，n 阶行列式的值是 $n!$ 项的代数和，其中一半项数为正，一半项数为负，每项是各行各列的任一个元素、

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.c

共 n 个元素的乘积。

当 $n=2$ 时，二阶行列式的值为

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

当 $n=3$，即三阶行列式，

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$- a_{31}a_{22}a_{13} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23}$$

当 n 较大时，根据以上行列式的定义直接计算出行列式的值是很困难的，因为行列式展开共有 $n!$ 项，比如 5 阶行列式展开后共有 $5!=120$ 项，6 阶行列式展开后有 $6!=720$ 项，此外，每项前面的符号确定也很麻烦。因此需要研究行列式的性质，将高阶行列式化为低阶行列式，将复杂的行列式化为简单的行列式，以便计算。

§1.1.2 行列式的性质

根据行列式的定义，可推出行列式的以下性质：

1. **行列式转置后值不变。**所谓转置，就是第 i 行变成 i 列，原来第 i 列变成第 i 行，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

行列式 $|A|$ 转置后得到的行列式一般记为 $|A|^T$,上式可写为 $|A| = |A|^T$

由于转置后行列式的值不变,因此对行适用的性质对列也适用。

2. 若行列式 $|A|$ 任两行(列) 互换,则换后的行列式值为 $-|A|$

由此性质可知,如果有两行(列) 元素相同,该行列式必为0,因为将这两行相同元素互换后,仍为同一行列式,但由性质2知 $|A| = -|A|$,故 $|A| = 0$。所以有性质3:

3. 如果行列式中有两行(列) 元素相同,则行列式值为 0

4. 行列式的行(列) 元素的公因子可提到行列式外。

5. 如行列式 $|A|$ 的行(列) 为如下情况可以分成两个行列式计算:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1}+c_{i1} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1} & \cdots & b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{i1} & \cdots & c_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

由性质 3,4,5 可以推得

6. 将行列式的任一行(列)的 K 倍加到另一行(列)上去,行列式的值不变。

以上性质可以简化行列式的计算,但是要将行列式降阶,还需要介绍一个重要定理,关于行列式展开的拉普拉斯定理。

§1.1.3 行列式的展开。

在介绍拉普拉斯定理前,需要介绍代数余子式的概念。

在 n 阶行列式中,划去 l 行:$i_1,\cdots,i_l$,划去 l 列:$j_1,\cdots,j_l$,剩下的元素所组所的 $n-l$ 阶行列式 M 称为原行列式的一个 $n-l$ 阶子式。位于被划去的 l 行,l 列交叉点上的元素组成的 l 阶行列式 N 是原行列式的一个 l 阶子式,称子式 M、N 互为余子式。代数余子式是指余子式前带上符号:

M 的代数余子式为:$(-1)^m N$ （m 为 M 的各行号、列号之和）

N 的代数余子式为:$(-1)^n M$ （n 为 N 的各行号、列号之和）

例如对于以下行列式

$$|A| = \begin{vmatrix} 1\cdots & 2\cdots & -2\cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots & \\ 3 & 0 & 1 & -5 \\ \vdots & & \vdots & \\ -3\cdots & 1\cdots & -3\cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots & \\ -1 & 3 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

划去第 1、3 行,第 1,3 列后可得一个 2 阶子式

$$M = \begin{vmatrix} 0 & -5 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}$$

M 的余子式为

$$N = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -3 & -3 \end{vmatrix}$$

M 的代数余子式为:

$$(-1)^{2+4+2+4} N = N$$

N 的代数余子式为:

$$(-1)^{1+3+1+3}M = M$$

当只划去第1行、第1列时,可得元素 a_{11} 的代数余子式:

$$(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 0 & 1 & -5 \\ 1 & -3 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -5 \\ 1 & -3 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

拉普拉斯(Lapace)定理 **在 n 阶行列式 $|A|$ 中任取 k 行(列)($1 \leqslant k \leqslant n-1$)出来,找出这 k 行(列)中的一切 k 阶子式,设为 $M_1, M_2, \cdots, M_s$($S = C_n^k$),其代数余子式分别为 $N_1, N_2, \cdots, N_s$,则**

$$|A| = M_1N_1 + M_2N_2 + \cdots + M_sN_s$$

拉普拉斯定理将 n 阶行列式的计算转化为若干个 k 阶子式和 $n-k$ 阶子式的计算,使行列式的阶数减少了,再加上前面所讲的行列式的性质,设法使展开的子式尽可能多地为0,这样就可以大大简化计算。

例 1.1.1 计算下面左下三角行列式的值

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

解 根据拉普拉斯定理,将行列式按第一行展开得

$$|A| = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

可见展开后剩下的 $n-1$ 阶行列式仍为一三角式，继续展开该式，可以想象得到，结果仍有一个 $n-2$ 阶三角式，依次展开下去，可得

$$|A|=a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}$$

根据行列式性质知，转置后行列式值不变，那么上面的左下三角行列转置后为右上三角行列式，因此可知右上三角行列式值也为对角线上各元素乘积。

同样的方法可求得右下三角行列式的值

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2n-1}\cdots a_{n1}$$

由以上的计算可知三角行列式的值很容易求出，那么一般行列式能否化为三角行式呢？可以证明，任何行列式均可经保值变换化为三角行列式。所谓保值变换是指：

1)将某行(列)改变符号后与另一行(列)互换。

2)将某行(列) K 倍加到另一行(列)上。

根据行列式的性质可知，对行列式实行以上两种变换不会改变行列式的值，因此称为保值变换。

例 1.1.2 将以下行列式化为三角行列式，然后求出其值。

$$|A|=\begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

解 将第 3 行乘以 -1，然后与第一行互换，可得

$$|A| = \begin{vmatrix} -2 & -1 & -3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

将第 1 列乘以 $-\frac{3}{2}$ 加到第 3 例,第 1 列乘以 $-\frac{1}{2}$ 加到第 2 列,可得

$$|A| = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 3 & \frac{1}{2} & -\frac{7}{2} \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

将第 2 列乘以 7,加到第 3 列,可得

$$|A| = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 3 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 & 17 \end{vmatrix}$$

$$= -2 \times \frac{1}{2} \times 17 = -17$$

§1.2 矩阵

§1.2.1 矩阵的定义及其运算

将 $m \times n$ 个数排列成 m 行、n 列的阵式,称为 $m \times n$ 矩阵,其中的数称为矩阵的元素,a_{ij} 表示排列在 i 行、j 列的元素。

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.c